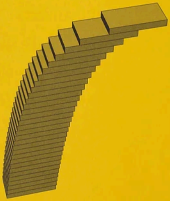
CAHIERS DE LA CRM

Séries numériques et séries de Taylor

Alex Willa



CAHIER N° 4

COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE

Préface

La mise en œuvre du RRM a nécessité certains ajustements des programmes de mathématiques enseignés dans les gymnases de Suisse romande. La Commission Romande de Mathématique (CRM) tient à proposer des moyens d'enseignement conformes aux exigences du règlement de maturité. Aussi ses membres s'emploient-ils depuis plusieurs années à la mise à jour de sa collection « Ouvrages collectifs » qui couvrent en priorité les besoins du programme de niveau standard.
Certaines notions généralement étudiées dans les cours de mathématiques de niveau renforcé ont été volontairement retirées des ouvrages de base. En outre, l'introduction des options spécifiques a ouvert de nouveaux horizons quant aux sujets de mathématiques abordés. Soucieuse de tenir compte de cette évolution, la CRM proposait en 2004 les deux premiers ouvrages d'une nouvelle collection, les *Cahiers de la CRM*.
La CRM est heureuse de présenter aujourd'hui une suite au premier ouvrage de cette *série* :

« Séries numériques et séries de Taylor »,
d'Alex Willa

Les ouvrages publiés ces dernières années par la CRM sont marqués par le souci d'être accessibles à la lecture individuelle par les élèves. Ils ont aussi pour ambition d'amener les étudiants à la découverte de nouveaux concepts mathématiques à l'aide de nombreux exemples, épaulés par une solide théorie. Ce cahier se situe bien dans cette optique. Le lecteur trouvera de nombreux « trous » dans le texte qu'il lui faudra compléter. Le travail pédagogique de l'enseignant garde ici toute sa valeur. Il prend même une importance particulière dans le choix des théorèmes, des démonstrations et des exercices.
Tous mes remerciements à Alex Willa pour s'être lancé dans l'aventure de la publication d'un deuxième cahier, ainsi qu'aux membres de la CRM qui ont consacré de leur temps à une lecture finale minutieuse.

Patrick Hochuli
Président de la CRM
Juin 2007

Table des matières

Avant-propos

Au V^e siècle avant J.-C., le philosophe grec Zénon d'Élée proposa des paradoxes basés sur l'idée suivante : la somme infinie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ de grandeurs strictement positives s'approche de la valeur 2 sans jamais la dépasser ni même l'atteindre. À l'aide de cet argument, Zénon démontra l'impossibilité de tout mouvement. Les notions sous-jacentes d'infini et d'indivisible posaient de profonds problèmes d'ordre philosophique et scientifique.

Si l'on peut saisir intuitivement que la série précédente *converge vers 2*, il est en revanche plus difficile de déterminer la somme $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$, de comprendre que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ tend vers l'infini (quand bien même toute machine à calculer fournira un résultat fini) ou de concevoir que le résultat du calcul $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ dépend de l'ordre dans lequel les termes sont additionnés !

L'objectif du premier chapitre de ce cahier est de présenter la notion de convergence des séries numériques et les méthodes permettant de calculer leur somme. Au delà de l'aspect épistémologique, il s'agit avant tout de préparer l'étude des séries de fonctions.

En considérant des *polynômes de degré infini*, on abordera dans le second chapitre la classe des fonctions analytiques. Les valeurs des dérivées successives en un seul point déterminent une telle fonction dans tout un intervalle. La quantité d'informations nécessaire à sa connaissance devient dénombrable et autorise des approximations successives. C'est cet aspect qui rend la théorie des séries de fonctions particulièrement utile dans de nombreuses applications. Familiarisé avec les séries entières, l'étudiant pourra poursuivre avec la classe importante des séries de Fourier qui n'ont pas trouvé place ici.

Le cahier s'adresse ainsi avant tout aux étudiants de gymnase qui se préparent à entreprendre des études scientifiques.

Avertissement

Pour éviter un aspect trop formel et académique, on a renoncé à présenter toutes les **démonstrations**, en particulier celle du théorème de Taylor. Un choix judicieux et l'ajout de compléments incombent au professeur accompagnant. Les preuves des théorèmes fondamentaux des séries entières dépassent cependant le programme du secondaire II.

Les **exemples** de la partie théorique invitent le lecteur à se familiariser avec les différentes notions traitées ; ils nécessitent sa participation active et devraient être complétés au fur et à mesure de la lecture.

Les **exercices** variés servent à assimiler la théorie. Les problèmes proposés sont nombreux et de niveaux très divers. Pour les résoudre, on privilégiera des essais numériques avant de postuler et de démontrer les résultats.

Les **réponses** aux exercices sont données à la fin du cahier chaque fois qu'elles pouvaient s'exprimer simplement.

Alex Willa
Sion, mai 2007

1 Exemples d'introduction

1. On considère la suite $1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16,\ \ldots$ de terme $u_k = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
   En calculant les sommes s_n des n premiers termes de cette suite, on obtient :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ s_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \\ s_4 &= \\ s_5 &= \\ \ldots \end{aligned}$$

   En général, on a $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

   La suite (s_n) est appelée série numérique de terme $\frac{1}{2^k}$.
   Cette série converge. Sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ est la somme de la série.
   Dans l'exemple, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$ et on écrit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots = 1$$

2. En formant les n-ièmes sommes partielles de la suite $1, 2, 3, 4, \ldots$, on obtient :

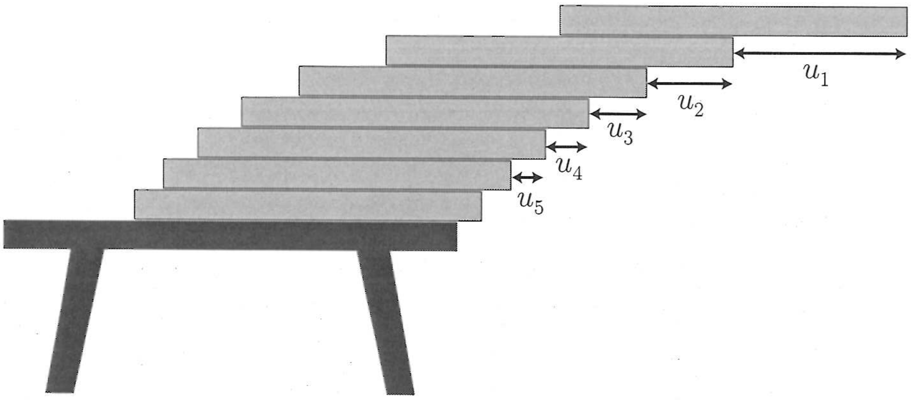
$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+2=3 \\ s_3 &= 1+2+3=6 \\ s_4 &= 1+2+3+4= \\ s_5 &= \\ s_6 &= \\ \ldots \end{aligned}$$

   En général, on a $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$
   La série de terme $u_k = k$ est divergente (elle tend vers $+\infty$).

3. Est-il possible d'empiler des livres sur une table de sorte que le dernier livre de la pile se trouve entièrement au dessus du vide ?

   a) Faire des essais avec une pile de livres de même format.

   b) Trouver des valeurs de u_k dont la somme dépasse la largeur d'un livre.



4. Considérons la suite des polynômes

   $p_1(x) = 1$
   $p_2(x) = 1 + x$
   $p_3(x) = 1 + x + x^2$
   $p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
   $p_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
   ...

   La somme de cette série (de fonctions) de terme x^k est

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \ldots$$

   Cette expression fonctionnelle n'est pas définie pour tout x réel. En posant $x = 1$, par exemple, on obtient une série numérique divergente. Cependant, si on pose $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$, on obtient des séries numériques convergentes.

   $x = 0$:

   $x = \frac{1}{2}$:

   La suite $1, x, x^2, x^3, \ldots$ est une suite géométrique de raison x et on sait[1] que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\text{et} \lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n\right) = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si } |x| < 1$$

   Dans cette situation, on écrit

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{lorsque } |x| < 1$$

[1]Voir *Suites de nombres réels*, Cahier de la CRM N° 1, pages 16-19.

2 Série numérique

2.1 Définitions

On considère une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
A cette suite, nous associons une nouvelle suite (s_n) formée des sommes suivantes.

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_1 \\
s_2 &= u_1 + u_2 \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
s_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
\ldots
\end{aligned}$$

Pour écrire le terme d'indice n de cette suite, on utilise la notation[2] $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On peut encore définir la suite (s_n) de manière récursive par

$$\begin{cases} s_1 &= u_1 \\ s_{n+1} &= s_n + u_{n+1}\,, n \geq 1 \end{cases}$$

La suite (s_n) est la *série numérique de terme* u_k. Le terme s_n est la *n-ième somme partielle* de cette série[3].
Si la suite (s_n) converge, on dit que la *série de terme u_k converge.* Dans ce cas, la limite S de la suite (s_n) est la *somme de la série*, et on utilise l'une des écritures suivantes.

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

Si une série ne converge pas, elle *diverge.*

Exemples

1. Écrire les premiers termes de la série (s_n) de terme $u_k = \dfrac{1}{3^k}\,, k \in \mathbb{N}^*$.

   Cette série converge, sa somme vaut $\dfrac{1}{2}$, et on écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$.

2. Écrire les premiers termes de la série (s_n) de terme $u_k = 1 + \dfrac{1}{10^k}, k \in \mathbb{N}^*$.

   Cette série diverge, mais la suite (u_k) converge vers 1.

[2] Le symbole de sommation Σ est introduit en annexe, page 43.
[3] Dans ce chapitre, une *série* désigne toujours une série numérique.

3. On considère la série de terme $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

   En remarquant (décomposition en *fractions simples*) que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   on peut trouver une formule pour la n-ième somme partielle de cette série.

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$, la série de terme u_k est convergente de somme 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \ldots = 1$$

4. Montrer que la série de terme $u_k = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$, diverge (somme infinie).

5. Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique, alors on a $s_n = n\dfrac{u_1 + u_n}{2}$. La série dont le terme est celui d'une suite arithmétique est donc divergente.

Remarques

1. Il est en général impossible de trouver une forme explicite pour la n-ième somme partielle d'une série donnée par son terme général.
2. On est quelquefois amené à considérer une suite $(u_k)_{k \in I}$ où I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ autre que $\mathbb{N}^*$; on définit alors de manière analogue la série de terme u_k, $k \in I$.
3. Attention de ne pas confondre la suite de terme u_k et la série de terme u_k.

2.2 Propriétés des séries convergentes

Propriété 1

La somme d'une série convergente est unique.

Cette propriété est une conséquence de l'unicité de la limite d'une suite.

Propriété 2 **(condition nécessaire de convergence)**
Si la série de terme u_k converge, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Démonstration
On note $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $S = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Comme $s_n - s_{n-1} = u_n$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Remarque
La réciproque de cette propriété est fausse : il ne suffit pas que la suite (u_k) converge vers 0 pour que la série correspondante converge. Par exemples :

1. La série de terme $u_k = \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ diverge (voir exemple 4, page 4).

   Pourtant son terme général tend vers zéro : $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = 0$

2. Observer la divergence de la *série harmonique* de terme $\dfrac{1}{k}$.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\frac{1}{17}+\ldots$$

Propriété 3 **(critère de divergence)**
Si $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k \neq 0$, alors la série de terme u_k diverge.

Cette propriété est la contraposée de la propriété 2.
Par exemple, la série de terme $u_k = \dfrac{k}{2k+1}$ diverge, car $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{2k+1} =$

Propriété 4 **(linéarité)**
Si deux séries de terme u_k et v_k convergent vers U et V respectivement, et si λ est un nombre réel, alors
a) la série de terme $u_k + v_k$ converge vers $U+V$;
b) la série de terme $\lambda\, u_k$ converge vers $\lambda\, U$.

Corollaire
Si la série de terme u_k diverge et que $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors la série de terme $\lambda\, u_k$ diverge.

Cette propriété est la contraposée de la propriété 2.

Propriété 5
Si une série converge (diverge), alors la série obtenue en supprimant ou en ajoutant un nombre fini de termes converge (diverge).

Ainsi, dans toutes les questions relatives à la convergence d'une série, seul le comportement des termes au-delà d'un certain rang détermine la nature de la série (mais non sa somme).

Exemples

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \quad \text{converge vers} \quad 2$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \quad \text{converge vers}$$

$$7 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \quad \text{converge vers}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \quad \text{diverge}$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + \dots \quad \text{diverge}$$

La suppression d'un nombre infini de termes peut, par contre, transformer une série divergente en une série convergente. En supprimant un terme sur deux (à partir du premier) de la série divergente

$$1 + 1 + 2 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4} + 8 + \frac{1}{8} + 16 + \frac{1}{16} + 32 + \dots$$

on obtient une série convergente.

2.3 Séries particulières

Deux séries particulières seront souvent choisies comme séries de référence dans l'étude d'une série quelconque : la série géométrique et la série de Riemann.

2.3.1 La série géométrique

Soit r un nombre réel non nul. La série de terme r^k est une *série géométrique*. Le nombre r est la *raison de la série*.

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n$$

Pour $|r| \geq 1$, le terme r^k ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la série géométrique diverge.

Pour $|r| < 1$, on a $\quad s_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad$ et $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - r} \quad$ (voir page 2).

La série géométrique de terme r^k

- converge si $|r| < 1$; dans ce cas, on a $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \dfrac{1}{1 - r}$
- diverge si $|r| \geq 1$.

En appliquant la propriété 4 de la page 5, on peut généraliser ce résultat : la série géométrique de premier terme a non nul et de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas, la somme de la série est $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \dfrac{a}{1 - r}$.

Exemples

1. La série géométrique de premier terme 1 et de raison $r = -\dfrac{1}{2}$ converge.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2^k} + \ldots =$$

2. La série géométrique de premier terme 1 et de raison $r = 2$ diverge

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^k + \ldots = +\infty$$

3. La série géométrique de premier terme 1 et de raison $r = \dfrac{99}{100}$ converge.
   Écrire et calculer sa somme.

4. La série géométrique de premier terme 81 et de raison $\dfrac{1}{3}$ converge.

$$81 + 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots =$$

5. Compléter $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{48} + \ldots =$

2.3.2 La série de Riemann

Soit α un nombre réel. La série de terme $u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$, $k \geq 1$, est une *série de Riemann*[4].

Exemples

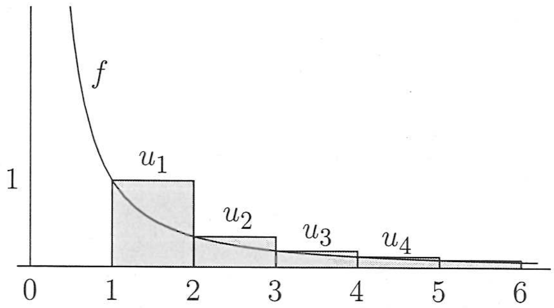
$$\begin{array}{lll}
\alpha = 1 & : & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \\[2ex]
\alpha = 2 & : & 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots \\[2ex]
\alpha = \frac{1}{2} & : & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots \\[2ex]
\alpha = -1 & : & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots \\[2ex]
\alpha = 0 & : & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\[2ex]
\alpha = -\frac{1}{2} & : & 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \ldots
\end{array}$$

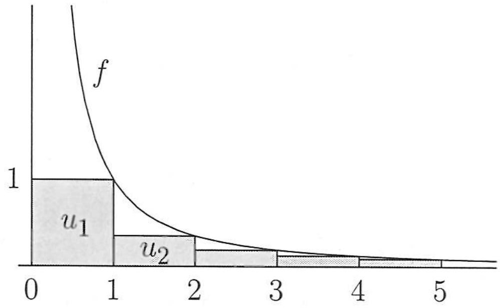
Pour $\alpha \leq 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \neq 0$ et la série de Riemann diverge (par propriété 3, page 5).

Pour étudier la convergence de la série de Riemann lorsque $\alpha > 0$, il est commode de donner une interprétation graphique de la n-ième somme partielle en considérant la

[4]Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand.

courbe représentative de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ pour $x > 0$.





Les termes successifs $u_k = f(k)$ de la série de Riemann sont interprétés comme aires de rectangles de base 1. La fonction f est décroissante. En calculant la somme s_n des n premiers termes, on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < s_n < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad (*)$$

Or $\displaystyle \int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{-\alpha+1}\,x^{-\alpha+1} + C$ si $\alpha \neq 1$

et $\displaystyle \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$

donc $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge et tend vers } +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

On applique ce résultat à la double inégalité $(*)$.

1. Si $\alpha \leq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ et la série de Riemann diverge.
2. Si $\alpha > 1$, alors la suite (s_n) des n-ièmes sommes partielles est
   - croissante, puisque $s_n - s_{n-1} = \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$
   - majorée, car $s_n \leq 1 + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

   la série de Riemann est donc convergente.

Une série de Riemann de terme $u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$
- converge si $\alpha > 1$
- diverge si $\alpha \leq 1$

Remarque

Pour $\alpha > 1$, on désigne habituellement par $\zeta(\alpha)$ la somme de la série de Riemann.

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

On appelle ζ la *fonction zêta de Riemann*. L'encadrement $(*)$ précédemment obtenu pour s_n conduit à un encadrement de $\zeta(\alpha)$ par un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\frac{1}{\alpha-1} < \zeta(\alpha) < 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

Exemples

1. La série de terme $\dfrac{1}{k^2}$ converge.
2. La série harmonique de terme $\dfrac{1}{k}$ diverge.
3. La série de terme $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ diverge.

2.4 Série à termes positifs

On considère dans ce paragraphe une série dont le terme u_k est positif à partir d'un certain rang. La nature d'une série n'étant pas affectée par la suppression d'un nombre fini de termes, il sera commode de supposer cette condition remplie à partir du premier rang, c'est-à-dire $u_k \geq 0$ pour $k \geq 1$.

L'étude d'une série à termes négatifs se réduit aisément à l'étude d'une série à termes positifs (voir propriété 4, page 5, avec $\lambda = -1$).

Pour une série à termes positifs, la suite (s_n) des sommes partielles est croissante. Or une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée.

Lemme
Une série à termes positifs est convergente si et seulement si elle est majorée.

Critères de comparaison

On considère deux séries à termes positifs u_k et v_k et on note p un entier naturel.

a) Si $u_k \leq v_k$ pour tout $k \geq p$ et que la série de terme v_k converge, alors la série de terme u_k converge (on dit qu'elle admet une *majorante convergente*).

b) Si $u_k \geq v_k$ pour tout $k \geq p$ et que la série de terme v_k diverge, alors la série de terme u_k diverge (on dit qu'elle admet une *minorante divergente*).

Les deux séries particulières étudiées dans le paragraphe précédent sont souvent utilisées comme séries de référence. Les réciproques des deux critères de comparaison sont fausses.

Démonstration

a) Si $u_k \leq v_k$ pour tout k, alors la somme s_n des n premiers termes de la suite (u_k) est inférieure ou égale à la somme t_n des n premiers termes de la suite (v_k), c'est-à-dire

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k = t_n$$

Par hypothèse, la suite (t_n) est convergente, donc majorée par un réel T. Ainsi

$$s_n \leq t_n \leq T$$

La suite (s_n) est donc elle-aussi croissante (série à termes positifs) et majorée, donc convergente.

b) est la contraposée de a).

Exemples

1. La série de terme général $\dfrac{1}{k^k}$ converge. En effet, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$k^k \geq 2^k \quad \text{et} \quad \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

La série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge. Elle est une majorante convergente de la série considérée.

2. Pour tout entier naturel non nul k, on a $\sqrt{k} \leq k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{k}$.

Or la série de terme $\dfrac{1}{k}$ diverge, donc la série de terme $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ diverge également.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \ldots = +\infty$$

3. On considère la série de terme $\dfrac{1}{\ln(k)}$ pour $k \geq 2$.

Démontrons que, pour tout x réel strictement positif, $\ln(x) < x$ en montrant que la fonction $f\colon x \mapsto x - \ln(x)$ admet une valeur minimale positive.

On a donc, pour $k \geq 2$, $\ln(k) < k$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\ln(k)} > \dfrac{1}{k}$.

Comme la série (minorante) de terme $\dfrac{1}{k}$ diverge, il en est de même de la série considérée.

4. On considère la série de terme $\dfrac{1}{\big(\log(k)\big)^k}$ pour $k \geq 2$.

Lorsque $k \geq 100$, on a $\log(k) \geq 2$ et $\dfrac{1}{\big(\log(k)\big)^k} \leq \dfrac{1}{2^k}$.

La série considérée converge, puisqu'elle admet la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ comme majorante convergente.

Critère de la racine (Cauchy[5])

On considère une série de terme $u_k \geq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Démonstration

Supposons que $0 \leq c < 1$: il existe un nombre réel r tel que $c < r < 1$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = c$, il existe un entier p tel que $\sqrt[k]{u_k} < r$ pour tout k, $k > p$.

Ainsi $u_k < r^k$ pour tout k, $k > p$.

La série géométrique de raison r est donc une majorante (à partir du rang p) convergente (car $r < 1$) de la série de terme u_k.

Pour $c > 1$, on montre de manière analogue qu'une série géométrique de raison r, avec $1 < r < c$, est une minorante divergente de la série de terme u_k.

Exemples

1. La série de terme $\left(\dfrac{k}{2k+1}\right)^k$ converge.

2. La série de terme $\left(\dfrac{2k}{k+1}\right)^k$ diverge.

3. Pour les séries de terme $\dfrac{1}{k}$ et $\dfrac{1}{k^2}$, le critère de la racine ne permet pas de conclure. Ces deux séries sont respectivement divergente et convergente.

[5] Augustin Louis Cauchy (1789–1857), mathématicien français.

Critère du quotient (d'Alembert[6])

On considère une série de terme $u_k \geq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Démonstration

Supposons que $0 \leq c < 1$: il existe un nombre réel r tel que $c < r < 1$.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = c$, il existe un entier p tel que $\frac{u_{k+1}}{u_k} < r$ pour tout k, $k > p$.

Ainsi
$$\begin{array}{lclclcl}
u_{p+1} & < & r \cdot u_p & & & & \\
u_{p+2} & < & r \cdot u_{p+1} & < & r^2 \cdot u_p & & \\
u_{p+3} & < & r \cdot u_{p+2} & < & r^3 \cdot u_p & & \\
\ldots & & & & & & \\
u_{p+m} & < & r \cdot u_{p+m-1} & < & \ldots & < & r^m \cdot u_p
\end{array}$$

La série géométrique de premier terme u_p et de raison r est donc une majorante (à partir du rang p) convergente (car $r < 1$) de la série de terme u_k.
Pour $c > 1$, on montre de manière analogue qu'une série géométrique de raison r, avec $1 < r < c$, est une minorante divergente de la série de terme u_k.

Exemples

1. La série de terme $\dfrac{1}{k!}$ converge.

2. La série de terme $\dfrac{2^k}{k}$ diverge.

3. Pour les séries de terme $\dfrac{k}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k(k+1)}$, le critère du quotient ne permet pas de conclure. Ces deux séries sont respectivement divergente et convergente.

[6] Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), mathématicien et philosophe français.

Critère d'équivalence

On considère deux séries à termes positifs u_k et v_k.

Si $L = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k} \neq 0$ et $L \neq +\infty$, alors les séries considérées sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes, et on dit qu'elles sont *équivalentes*.

Démonstration

Par hypothèse, L étant strictement positif, il existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < \varepsilon < L$. Par définition de la limite, il existe un entier naturel p tel que $\left|\dfrac{u_k}{v_k} - L\right| < \varepsilon$ pour $k > p$.

Ainsi, pour $k > p$:

$$\begin{array}{ccccc} -\varepsilon & < & \dfrac{u_k}{v_k} - L & < & \varepsilon \\ L-\varepsilon & < & \dfrac{u_k}{v_k} & < & L+\varepsilon \\ (L-\varepsilon)v_k & < & u_k & < & (L+\varepsilon)v_k \quad \text{car } v_k \geq 0 \end{array}$$

avec $L - \varepsilon > 0$. On utilise cette double inégalité, les critères de comparaison et la propriété 4 (page 5) pour conclure. Si, par exemple, la série de terme u_k diverge, alors celle de terme $(L+\varepsilon)v_k$ diverge et la série de terme v_k est donc elle aussi divergente.

Exemples

1. La série de terme $u_k = \dfrac{k+3}{k^3 - 12k + 7}$ est équivalente à celle de terme $v_k = \dfrac{1}{k^2}$, qui converge.

2. La série de terme $\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$ est équivalente à celle de terme $v_k = \dfrac{1}{k}$, qui diverge.

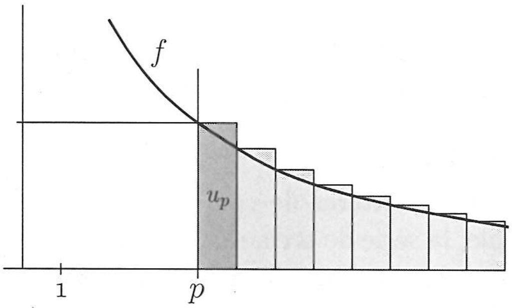
Critère de l'intégrale

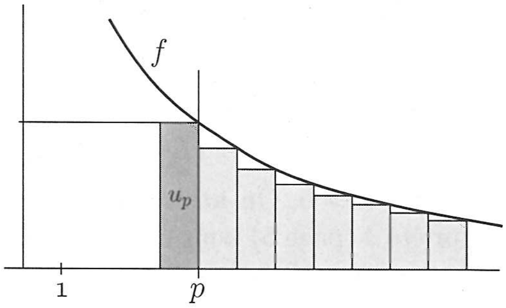
On note p un entier positif.

Si f est une fonction positive et décroissante dans l'intervalle $[p\,;\,+\infty[$ et si $f(k) = u_k$, alors la série de terme u_k converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{k=p}^{+\infty} u_k \;\leq\; u_p + \int_p^{+\infty} f(x)\,dx$

La démonstration est analogue à celle appliquée à la série de Riemann (page 7).





Exemples

1. Étudier la convergence de la série de terme $\dfrac{1}{k\,\ln(k)}$ pour $k \geq 2$.

2. Montrer que la série de terme $k \cdot \mathrm{e}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge.

Remarque

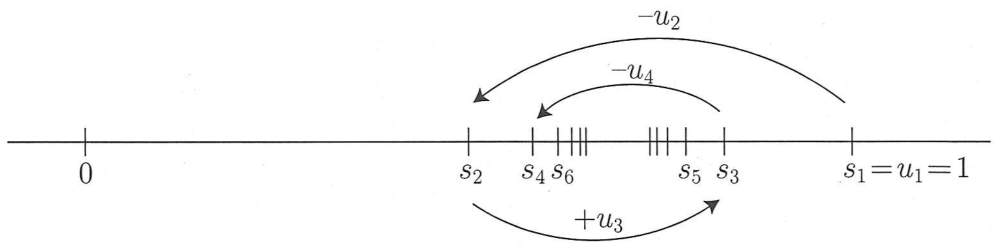
Lorsque le critère de l'intégrale permet de démontrer la convergence d'une série, l'erreur commise par l'approximation de sa somme S par s_n est inférieure à $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

2.5 Série alternée

Exemple

On considère la *série harmonique alternée* $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots$

En représentant sur un axe les premiers termes de cette série, on peut observer sa convergence.



Une *série alternée* est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une série alternée peut s'écrire $(-1)^{k+1}u_k$ avec $u_k \geq 0$.

Convergence d'une série alternée (critère de Leibniz[7])

On considère une série de terme $(-1)^{k+1}u_k$ avec $u_k \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{La série converge si, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} \leq u_k \ \text{ et } \lim_{k\to+\infty} u_k = 0.}$$

Autrement dit, si la suite (u_k) à termes positifs est décroissante et converge vers zéro, alors la série alternée de terme $(-1)^{k+1}u_k$ converge.

Démonstration

Considérons les sommes partielles d'indices pairs en regroupant les termes deux à deux.

$$s_{2p} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2p-3} - u_{2p-2}) + (u_{2p-1} - u_{2p})$$

La suite (u_k) étant décroissante par hypothèse, chacune des parenthèses de cette somme est positive et la suite (s_{2p}) est donc croissante. En écrivant

$$s_{2p} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(u_{2p-2} - u_{2p-1})}_{\geq 0} - \underbrace{u_{2p}}_{\geq 0}$$

on observe que la suite (s_{2p}) est majorée par u_1. La suite (s_{2p}) est donc convergente. De manière analogue, on montre que la suite (s_{2p+1}) des sommes partielles d'indices impairs est décroissante et minorée, donc convergente elle aussi.
Pour terminer, on montre que $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p+1}$.

$$\lim_{p\to+\infty} s_{2p+1} - \lim_{p\to+\infty} s_{2p} = \lim_{p\to+\infty} (s_{2p+1} - s_{2p}) = \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1} = 0 \qquad \text{(par hypothèse)}$$

[7]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), mathématicien, philosophe et diplomate allemand.

Exemples

1. La *série harmonique alternée* de terme $(-1)^{k+1}\,\dfrac{1}{k}$ converge.

2. La série de terme $(-1)^{k+1}\,\dfrac{1}{k^2}$ converge.

Remarques

1. La somme S d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz est toujours comprise entre deux sommes partielles s_n et s_{n+1}. Comme $|s_{n+1}-s_n| = u_{n+1}$, on peut dire que l'erreur commise par l'approximation de S par s_n est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé.

   Dans l'exemple de la série harmonique alternée, on a $|S - s_n| < \dfrac{1}{n+1}$. Cette série converge "lentement" vers $S = \ln(2) \approx 0.69314718$ (voir page 24).
2. La décroissance de la suite (u_k) n'est pas une condition nécessaire à la convergence d'une série alternée. La série de terme $(-1)^k \dfrac{1}{k+(-1)^k}$, pour $k \geq 2$, en est un contre-exemple.

2.6 Série à termes quelconques

On considère une série de terme u_k. Si la série de terme $|u_k|$ converge, alors on dit que la série de terme u_k *converge absolument.*

Théorème

Si une série converge absolument, alors elle converge.

Démonstration

Pour une série de terme u_k qui converge absolument, on définit deux séries à termes positifs v_k et w_k par

$$v_k = \begin{cases} u_k & \text{si } u_k \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w_k = \begin{cases} 0 & \text{si } u_k \geq 0 \\ -u_k & \text{si } u_k < 0 \end{cases}$$

Par exemple :

$$\sum u_k = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}+\frac{1}{512}\pm\ldots$$

$$\sum |u_k| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\ldots$$

$$\sum v_k = 1+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{8}+0+0+0+\frac{1}{128}+0+\frac{1}{512}+\ldots$$

$$\sum w_k = 0+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+0+\frac{1}{256}+0+\ldots$$

Pour tout entier naturel k, on a $v_k \leq |u_k|$ et $w_k \leq |u_k|$. La série de terme $|u_k|$ est une majorante convergente des séries de terme v_k et w_k. Ces deux séries positives sont donc elles-mêmes convergentes. Par la propriété 4 (page 5), la série de terme $v_k - w_k$ est elle aussi convergente. Comme $v_k - w_k = u_k$, la série de terme u_k converge.

Exemples

1. La série suggérée par $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}-\frac{1}{81}+\ldots$ converge, puisque la série de terme $\frac{1}{k^2}$ converge.
2. La série de terme $\dfrac{\sin(k\,\alpha)}{k^2}$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. La série de terme $\dfrac{\cos\left(\frac{2k-1}{4}\,\pi\right)}{3^k}$ converge.

Remarques

1. Pour étudier la convergence d'une série de terme u_k quelconque, on cherche d'abord à établir sa convergence absolue en appliquant à la série de terme $|u_k|$ les divers critères de convergence des séries à termes positifs.
2. La réciproque du théorème précédent est fausse. Une série à termes quelconques qui converge mais qui n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente*. Par exemple, la série harmonique alternée est semi-convergente.
3. On peut démontrer que, si une série est absolument convergente, on ne change ni sa nature ni sa somme en modifiant l'ordre des termes. Il n'en est pas de même pour les séries semi-convergentes.

La série harmonique alternée, par exemple, est une série semi-convergente qui converge vers $S = \ln(2)$ (voir page 24).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

Si on modifie l'ordre des termes en prenant un terme positif, suivi de deux termes négatifs

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

et que l'on regroupe les termes de la manière suivante

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots$$

on obtient la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right)$$

dont la somme vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$.

On peut même démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, il est possible de modifier l'ordre des termes d'une série semi-convergente pour qu'elle converge vers r. On peut même la faire diverger.

2.7 Estimation de la somme d'une série convergente

Dans un certain nombre de cas particuliers, il est possible de calculer une valeur exacte de la somme S d'une série convergente. On a vu, par exemple, que la série géométrique de premier terme a et de raison $|r| < 1$ converge vers $S = \dfrac{a}{1-r}$.

Dans le cas général, si une série converge, il n'est pas toujours possible de calculer sa somme S. On se contente alors de l'approximation donnée par la n-ième somme partielle s_n. La différence $S - s_n$ est l'erreur commise, appelée *reste de la série au rang n* et notée R_n.

$$R_n = S - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

On cherche alors une majoration de $|R_n|$.

- Pour une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz, on a $|R_n| < |u_{n+1}|$ (voir remarque 1, page 16).
- Pour une série à termes positifs qui converge selon l'un des critères de comparaison, on utilise la somme d'une série majorante convergente pour estimer l'erreur.
- Pour une série à termes positifs qui converge selon le critère de l'intégrale (voir page 14), on a $R_n \leq \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

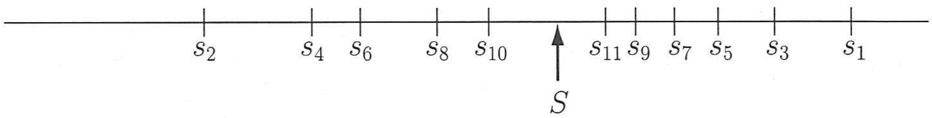
Exemples

1. Calculer $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$

   Il s'agit de la somme d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère de Leibniz.

   On a $\quad S \approx s_{11} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots - \dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{21} = 0.808\,078\ldots$

   qui est une *valeur par excès* (c'est-à-dire que la vraie grandeur est inférieure à cette valeur approximative).



   L'erreur commise peut être majorée par $|R_{11}| < \dfrac{1}{23} < 0.044$ (puisqu'on cherche à majorer l'erreur, on arrondit les valeurs numériques systématiquement vers le haut !).

   Ainsi $S \in]0.764\,; 0.808[$ et on écrit $S = 0.786 \pm 0.022$.

   Dans cet exemple, la convergence est extrêmement lente. La valeur exacte de la somme est $S = \pi/4 = 0.785\,398\,163\ldots$ (voir page 31 : développement en série de la fonction arctan).

2. Calculer une valeur approximative de la somme

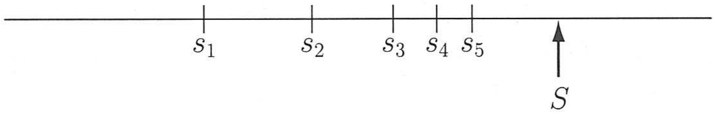
$$S = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \frac{1}{1\,111} + \frac{1}{11\,111} + \ldots$$

   Cette série à termes positifs est convergente puisqu'elle admet la série géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ comme majorante convergente.

   On a alors

$$S \approx s_5 = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \frac{1}{1\,111} + \frac{1}{11\,111} = 1.\,100\,908\,191\ldots$$

   La série est croissante et l'approximation calculée est donc une *valeur par défaut* de la somme inconnue S (c'est-à-dire que S est supérieure à la valeur approximative).



   Pour estimer l'erreur commise, on utilise la somme de la série majorante convergente.

$$R_5 < \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^8} + \ldots = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90\,000} < 0.\,000\,011\,112$$

   Ainsi $S \in]1.\,100\,908\,; 1.\,100\,920[$ et on écrit $S = 1.\,100\,914 \pm 0.\,000\,006$.

3. La série de terme $k \cdot \mathrm{e}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge (voir page 14). Calculer une valeur approximative de la somme de cette série.

$$S \approx s_8 = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \frac{5}{e^5} + \frac{6}{e^6} + \frac{7}{e^7} + \frac{8}{e^8} =$$

L'erreur commise est estimée par

$$R_8 = \sum_{k=9}^{+\infty} k\, e^{-k} < \int_8^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

On trouve $S = 0.921 \pm 0.002$.
La valeur exacte est $S = \dfrac{e}{(e-1)^2} = 0.920\,674...$ (voir exemple 1, page 23).

3 Série entière

3.1 Définition et convergence

Exemple

La série de terme $\dfrac{1}{k}\, x^k$ est la suite

$$s_1(x) = x$$
$$s_2(x) = x + \frac{1}{2}\, x^2$$
$$s_3(x) = x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3$$
$$s_4(x) = x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{4}\, x^4$$
$$\ldots$$

Chaque fois que l'on remplace x par une valeur réelle, on obtient une série numérique dont la convergence et la somme dépendent de x.

Définition

La série de terme $a_k x^k, k \in \mathbb{N}$, est une *série entière* de la variable x. Les nombres réels a_k sont les *coefficients de la série entière*. Sa n-ième somme partielle

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

est un polynôme de degré n de la variable réelle x. Une série entière constitue donc une généralisation de la notion de polynôme.

Exemple

La série géométrique de terme x^k est une série entière qui converge pour $|x| < 1$.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Cet exemple fait apparaître que la somme d'une série entière convergente est une fonction de la variable x. Le problème se pose donc de déterminer, pour une série entière donnée, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série entière converge et d'étudier dans ce domaine de convergence les propriétés de la fonction somme.

Remarque

Une série entière (abusivement appelée *série de puissances*) est un exemple particulier d'une *série de fonctions*. La théorie générale des suites et séries de fonctions n'est pas abordée dans ce cours. Signalons toutefois un autre exemple important qui possède de nombreuses applications (analyse harmonique d'un signal, intégration d'équations aux dérivées partielles) : la *série de Fourier*[8] de terme $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Théorème

Pour toute série entière, il existe un $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de sorte que la série converge absolument pour tout x si $|x| < r$, diverge pour tout x si $|x| > r$.

Lorsque $|x| = r$, on ne peut pas conclure. Une étude particulière est nécessaire pour chaque série entière. Les cas $r = 0$ et $r = +\infty$ correspondent respectivement à une série qui ne converge que pour $x = 0$ et à une série qui converge pour tout réel x.

Le nombre r est le *rayon de convergence* de la série entière. L'ensemble $]-r\,;+r\,[$ dans lequel la série entière est absolument convergente est *l'intervalle de convergence*. Le *domaine de convergence* est l'ensemble des réels pour lesquels la série entière converge.

Recherche du rayon de convergence

Pour trouver le rayon de convergence d'une série entière de terme $a_k\, x^k$, on applique les critères de d'Alembert ou de Cauchy à la série de terme $u_k = \left|a_k\, x^k\right|$.

On a $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\,|x|$.

Or, si $L = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\,|x| = L \cdot |x|$.

et la série de terme $\left|a_k\, x^k\right|$ converge si $L \cdot |x| < 1$, diverge si $L \cdot |x| > 1$.

Il en résulte que $r = \dfrac{1}{L}$ (ou $r = +\infty$ si $L = 0$), c'est-à-dire

$$\boxed{r = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

De façon semblable, en utilisant le critère de Cauchy, on trouve la formule de Cauchy-Hadamard[9]

$$\boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

[8] Joseph Fourier (1768–1830), mathématicien et physicien français.

[9] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), mathématicien français.

Exemples

Trouver le domaine de convergence des séries entières de terme u_k.

1. $u_k = \dfrac{1}{k}\, x^k$

2. $u_k = \dfrac{x^k}{k!}$

3. $u_k = 2^k\, x^k$

4. $u_k = k^{2k}\, x^k$

Définition

On note a un nombre réel. Une série de terme $a_k\,(x-a)^k$ est appelée *série entière de centre a*. On effectue le changement de variable $y = x - a$ et on étudie le domaine de convergence de la série entière de terme $a_k\, y^k$. Si r est son rayon de convergence, alors la série proposée converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a - r < x < a + r$.

Exemple

Trouver le domaine de convergence de la série entière de terme $\dfrac{1}{k}(x-3)^k$.

3.2 Propriétés de la fonction somme

Les propriétés de la fonction somme d'une série entière convergente découlent d'une propriété de certaines séries de fonctions (convergence uniforme d'une série entière) non traitée dans ce cours.

Théorème 1 (continuité)
La somme d'une série entière est une fonction continue dans tout l'intervalle de convergence.

Théorème 2 (dérivation)
Une série entière est dérivable terme à terme en toute valeur de l'intervalle de convergence.

Les séries entières de terme $a_k\, x^k$ et $k\, a_k\, x^{k-1}$ possèdent le même rayon de convergence r et on a, pour tout x avec $|x| < r$:

$$\begin{array}{ll} \text{si} & S(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots + a_n\, x^n + \ldots \\ \text{alors} & S'(x) = a_1 + 2a_2\, x + 3a_3\, x^2 + \ldots + n\, a_n\, x^{n-1} + \ldots \end{array}$$

La fonction somme d'une série entière admet une infinité de dérivées successives.

Exemples

1. La série géométrique de terme x^k est convergente pour $|x| < 1$ et

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Par dérivation, on obtient pour $|x| < 1$:

$$1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots + k\,x^{k-1} + (k+1)x^k + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En multipliant les deux membres par x, on trouve pour $|x| < 1$:

$$x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + \ldots + kx^k + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2. La série de terme $\dfrac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $S(x)$ sa somme.

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} =$$

Par dérivation on obtient :

$$S'(x) =$$

Ainsi, pour tout réel x, $S(x) = S'(x)$. Plus loin, on trouvera $S(x) = e^x$.

Théorème 3 (intégration)
Une série entière est intégrable terme à terme sur tout intervalle fermé inclus dans l'intervalle de convergence.
Les séries entières de terme $a_k x^k$ et $a_k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ possèdent le même rayon de convergence r et on a, pour tout x tel que $|x| < r$:

$$\begin{array}{ll} \text{si} & S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ \text{et} & T(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + a_2 \dfrac{x^3}{3} + \ldots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \\ \text{alors} & T \text{ est une primitive de } S \text{ sur }]-r\,;r[. \end{array}$$

La fonction T est la primitive de S qui s'annule pour $x = 0$.

$$T(x) = \int_0^x S(t)\,dt = a_0\,x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \ldots \quad \text{pour } |x| < r$$

Exemple
On considère $S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{k-1} + x^k + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
On intègre d'abord la série terme à terme.

$$T(x) =$$

La fonction T est la primitive de S qui s'annule pour $x = 0$.
Or $\displaystyle\int S(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + C$. Ainsi

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^k}{k} + \ldots = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{pour } |x| < 1$$

Cette série converge encore pour $x = -1$ et, par continuité, on obtient :

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \ldots = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

La série harmonique alternée converge donc vers $\ln(2)$.

Problème inverse
La somme d'une série entière est une fonction continue et indéfiniment dérivable dans l'intervalle de convergence $]-r\,;r[$.
On considère à présent une fonction f définie (au moins) dans un intervalle ouvert contenant 0. On peut se demander s'il existe une série entière de rayon de convergence r dont la somme S coïncide avec f dans $]-r\,;r[$. D'après ce qui précède, f doit être continue et indéfiniment dérivable. Ces conditions (nécessaires) ne sont pourtant pas encore suffisantes (voir paragraphe 3.4).

3.3 Développement limité d'une fonction

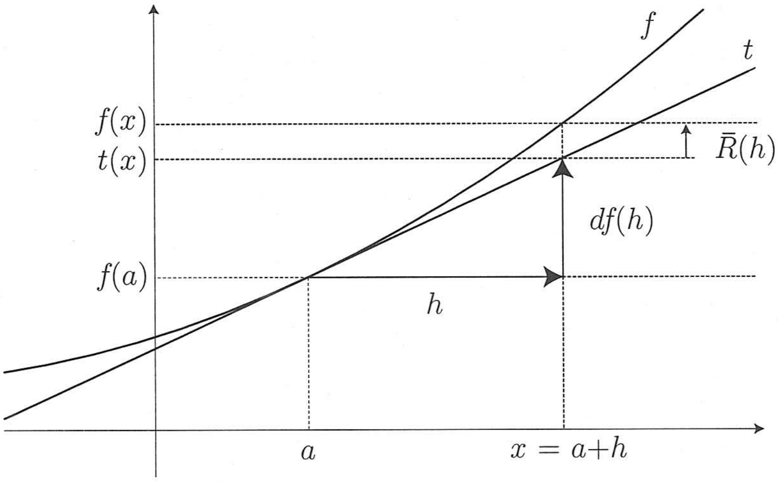
Rappel du cours d'analyse

On note f une fonction dérivable dans un voisinage de a. La fonction f admet en ce point une fonction affine tangente t et une fonction reste R telle que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{=\,t(x)} + R(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

ou, en posant $x = a + h$,

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)\,h}_{=\,df(h)} + \bar{R}(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \frac{\bar{R}(h)}{h} = 0$$



La propriété $\lim_{h\to 0} \frac{\bar{R}(h)}{h} = 0$ de la fonction $\bar{R}$ peut se traduire intuitivement par : *« lorsque h tend vers zéro, $\bar{R}(h)$ tend plus vite vers zéro que h ».*

La fonction affine t est une approximation (d'ordre 1) de la fonction f dans un voisinage de a. La fonction linéaire df est la différentielle de f en a. Le but de ce paragraphe est de trouver une meilleure approximation de la fonction f au moyen d'un polynôme de degré n.

Le polynôme de Taylor

On note f une fonction n fois dérivable dans un voisinage I de a. On se propose de déterminer un polynôme p_n de degré n vérifiant les conditions (C) suivantes.

$$(C)\left\{\begin{array}{rcll} f(a) & = & p_n(a) & \\ f'(a) & = & p_n'(a) & \\ f''(a) & = & p_n''(a) & \\ & \cdots & & \\ f^{(n)}(a) & = & p_n^{(n)}(a) & \quad \text{même dérivée } n\text{-ième en } a \end{array}\right.$$

On pose
$$\begin{aligned}
p_n(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n \\
p_n'(x) &= \\
p_n''(x) &= \\
&\ldots \\
p_n^{(n)}(x) &=
\end{aligned}$$

Les conditions (C) s'écrivent alors

$$\left\{\begin{aligned}
f(a) &= c_0 \\
f'(a) &= c_1 \\
f''(a) &= 2\,c_2 \\
&\ldots \\
f^{(n)}(a) &= n!\,c_n
\end{aligned}\right. \qquad \text{c'est-à-dire } \boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$$

Le polynôme

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est appelé le *polynôme de Taylor*[10] *de degré n de la fonction f en a*. On peut démontrer que, pour la fonction f donnée, le polynôme de Taylor est le seul polynôme de degré n qui remplit simultanément les $n+1$ conditions (C).

Exemples

$f(x) = e^x$	$a = 0$	$p_4(x) =$
$f(x) = \sin(x)$	$a = 0$	$p_5(x) =$
$f(x) = \sqrt{x}$	$a = 4$	$p_2(x) =$
$f(x) = x\sin(x)$	$a = \frac{\pi}{2}$	$p_2(x) =$

L'approximation de f par un polynôme p_n n'a d'intérêt que si la différence $R = f - p_n$ devient négligeable.

[10] Brook Taylor (1685–1731), mathématicien anglais, membre de la Royal Society de Londres.

Théorème (formule de Taylor d'ordre n)

Soit f une fonction $n+1$ fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I contenant a.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$ avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ où c est compris entre a et x.
Estimation du reste : $\lvert R_n(x)\rvert \leq \dfrac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t \in I} \left\lvert f^{(n+1)}(t) \right\rvert$

On dit que la fonction f admet un *développement limité d'ordre n au voisinage de a*. La fonction R_n est le *reste d'ordre n* du développement limité.

Remarques

1. En posant $h = x - a$, la formule de Taylor prend la forme

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \bar{R}_n(h)$$

2. Si $a = 0$, on obtient la formule de Maclaurin[11]

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

3. Le théorème de Taylor généralise celui des accroissements finis (cas $n = 1$). Il se démontre par récurrence en utilisant des intégrations par parties.

Exemples

1. Écrire l'approximation d'ordre 2 de la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de $a = 4$. Donner une estimation de l'erreur maximale commise lorsque cette approximation est utilisée dans l'intervalle $I =]3\,;5[$.

2. Établir le développement limité d'ordre n de la fonction f au voisinage de a et évaluer le reste sur l'intervalle de centre a et de rayon $\frac{1}{2}$.
   a) $f(x) = \cos(x) \quad a = 0 \quad n = 5$
   b) $f(x) = \ln(x) \quad a = 1 \quad n = 3$

[11] Colin Maclaurin (1698–1746), mathématicien écossais.

3.4 Développement en série de Taylor et de Maclaurin

Pour de nombreuses fonctions usuelles, on peut remplacer les développements limités par des développements illimités : des séries entières. Pour qu'il soit possible d'écrire une telle série et que la somme de cette série converge vers la fonction f donnée, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes.

1. La fonction f est indéfiniment dérivable dans un voisinage I de a.
2. Pour tout x de I, la série de terme $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ converge.
3. La fonction reste $R_n(x)$, définie au paragraphe 3.3, tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

Si ces conditions sont vérifiées, la formule de Taylor (ou de Maclaurin) se transforme en *série de Taylor*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

ou, si $a = 0$, en *série de Maclaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

La troisième condition est nécessaire pour que la série obtenue converge bien vers $f(x)$ (voir exemple 7 ci-dessous). Sa vérification est en général difficile.

Exemples

1. Soit $f\colon x \mapsto e^x$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$ et $f^{(k)}(0) = 1$.

   La série de Maclaurin de f : $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ converge pour tout réel x (voir page 22, exemple 2) et on peut écrire l'identité

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

   En particulier, pour $x = 1$, on obtient : $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots$

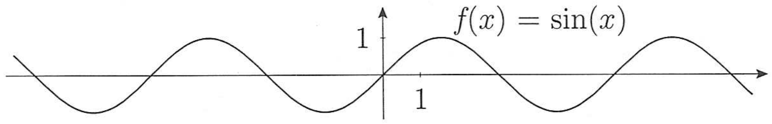
2. On considère la fonction $f\colon x \mapsto \sin(x)$.

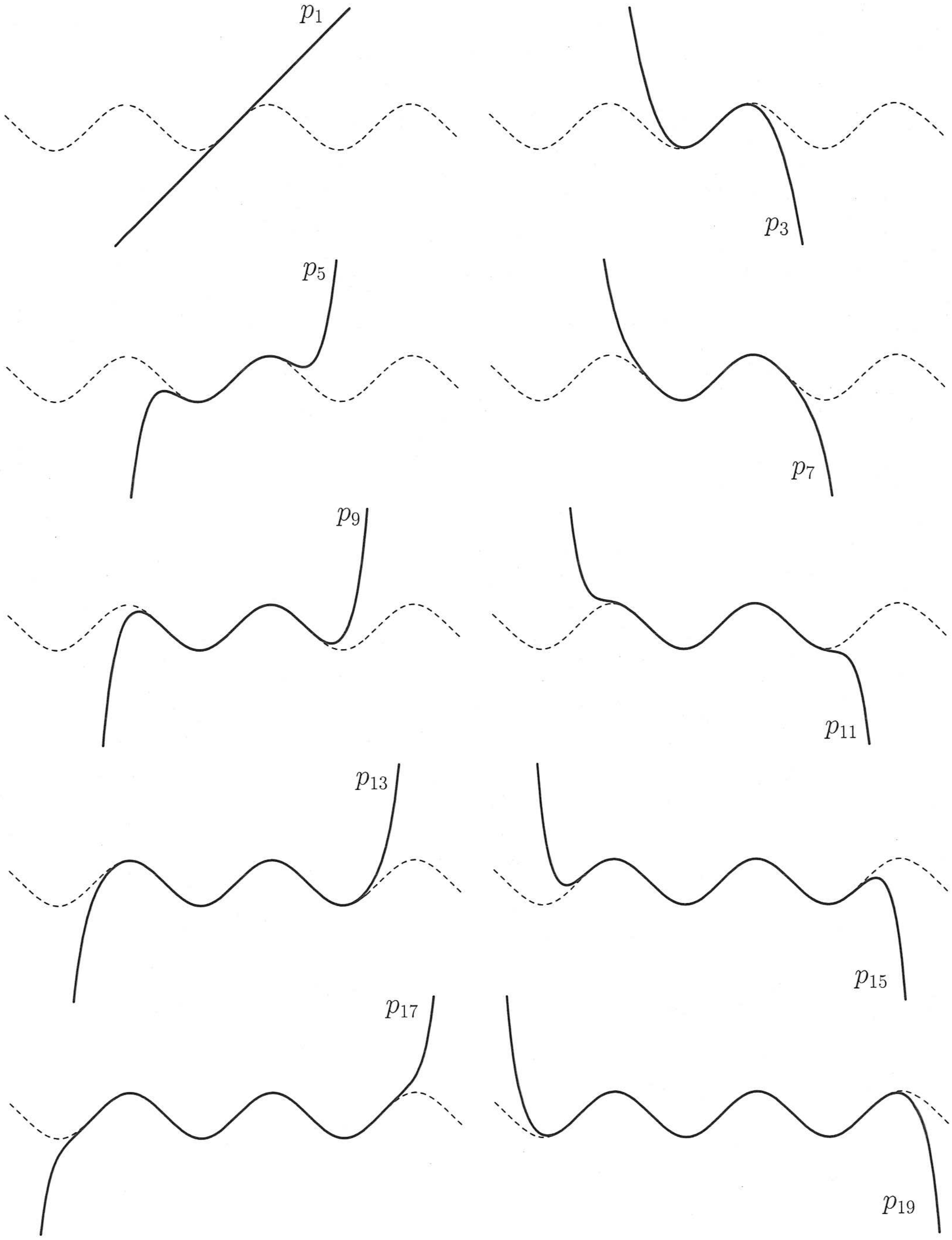
   $$\begin{aligned} f'(x) &= & \qquad f'''(x) &= \\ f''(x) &= & \qquad f''''(x) &= \end{aligned}$$

   d'où $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f''''(0) = 0$, ...
   En général : $f^{(2m)}(0) = 0$ et $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   On peut alors démontrer que, pour tout nombre réel x :

   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Les figures suivantes montrent les approximations de la fonction $f\colon x \mapsto \sin(x)$ par les polynômes de Maclaurin $p_1(x) = x$, $p_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, $p_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, ...





3. Avec $f\colon x \mapsto \cos(x)$, on trouve de manière analogue pour tout nombre réel x

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

4. Montrer que, pour $f\colon x \mapsto \sinh(x)$, on trouve

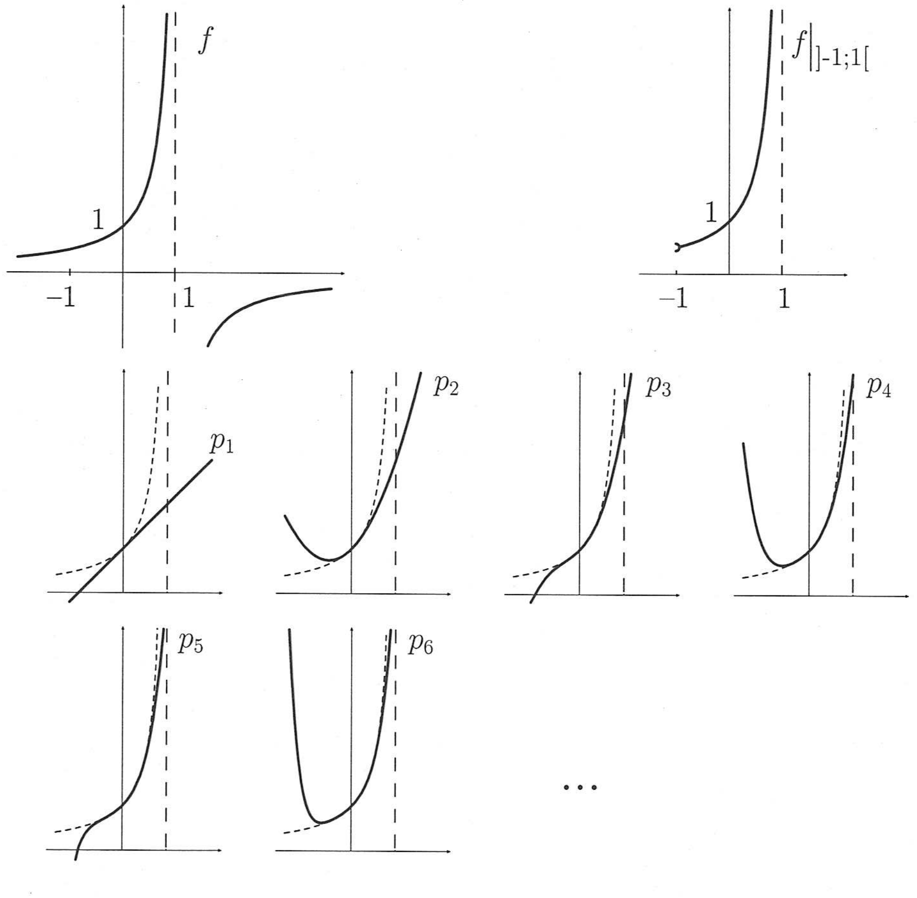
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5. On montre de même avec $f\colon x \mapsto \cosh(x)$ que

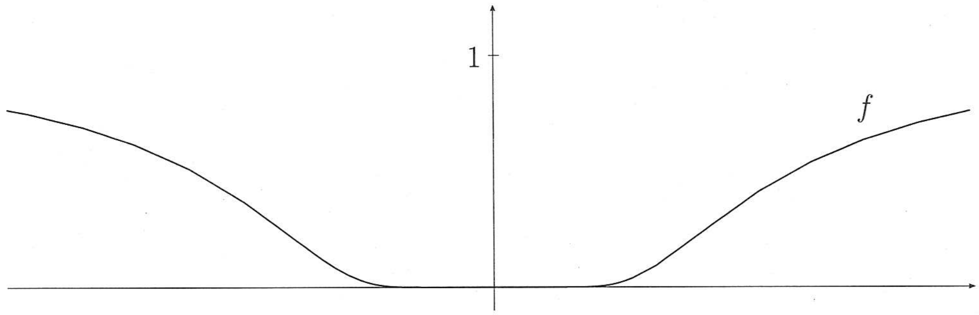
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On vérifie aisément que $\sinh(x) + \cosh(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Par le développement en série de Maclaurin de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, on trouve la série géométrique de raison x qui converge pour tout $x \in \,]-1\,;1[$ vers $f(x)$. On note $f\big|_{]-1\,;\,1[}$ la restriction de f sur cet intervalle.



7. Voici un exemple d'une fonction qu'on ne peut pas développer en série de Taylor. Elle répond aux deux premières conditions énoncées à la page 28, mais non à la troisième. Pour la fonction $f\colon x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, on peut démontrer que $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. La série de terme $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge donc vers 0 et non vers $f(x)$.



Des développements en série de certaines fonctions peuvent être obtenus par substitution, dérivation ou intégration (voir pages 23 et 24).

8. On a $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^k + \ldots$ pour $|x| < 1$

   En remplaçant x par $-x$, on trouve

   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^k x^k + \ldots \text{ pour } |x| < 1$$

   Par dérivation, on trouve alors

   $$-\frac{1}{(1+x)^2} =$$

   donc

   $$\frac{1}{(1+x)^2} =$$

   Par intégration

   $$\ln(1+x) =$$

   Utiliser des techniques analogues permettant d'écrire immédiatement le développement en série des fonctions

   $$\frac{1}{1+x^2} =$$

   $$\arctan(x) =$$

   $$\frac{x}{1+x^2} =$$

3.5 Applications de la formule de Taylor

3.5.1 Approximation du premier ordre

Si f est une fonction dérivable en $x \in \mathbb{R}$, alors on a l'approximation

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + hf'(x) \qquad \text{si } |h| \text{ est petit}}$$

Si la fonction f admet une deuxième dérivée continue sur un intervalle I contenant x et $x+h$, alors l'erreur est égale à $\frac{1}{2}h^2 f''(c)$ avec c compris entre x et $x+h$.

Exemples (voir *Formulaires et tables* de la CRM, page 91)

1. $$\begin{aligned}(x+h)^n &\approx x^n + nhx^{n-1}\\ e^{x+h} &\approx (1+h)e^x\\ \ln(x+h) &\approx \ln(x) + h\frac{1}{x}\end{aligned}$$

2. Soit $f\colon x \mapsto x^n$, avec $n \geq 2$
   $f'(x) = nx^{n-1}$
   $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

   On développe f au voisinage de $a = 1$ pour $|h| < \frac{1}{2}$.
   En posant $I = \left]\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$, on obtient :
   $$(1+h)^n = 1 + n\,h + R_1(h)$$
   avec $|R_1(h)| \leq \dfrac{h^2}{2!}\sup\limits_{x\in I}|f''(x)| = n(n-1)\dfrac{h^2}{2}\sup\limits_{x\in I}\left|x^{n-2}\right|$
   $$\begin{aligned}\text{donc }\ |R_1(h)| &\leq n(n-1)\frac{h^2}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\\ &< n(n-1)2^{n-3}h^2\end{aligned}$$

3.5.2 Calcul de limites

Exemples

1. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots\right) = 1\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right) = 1\end{aligned}$$

3.5.3 Calcul d'intégrales

Exemples

1. Calculer[12] l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

   On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + R_8(x)$

   $$\begin{aligned} \text{donc} \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx &\approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right) dx \\ &\approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} \quad = 0.946\,083 \end{aligned}$$

   La série numérique obtenue est alternée et vérifie les hypothèses du critère de Leibniz (page 15). L'erreur commise sera donc inférieure à $\frac{1}{9\cdot 9!} < 10^{-6}$.

2. Donner une estimation de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

   On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + R_4(x)$

   $$\begin{aligned} \text{donc} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx &\approx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) dx \\ &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{37}{36} \approx 1.028 \end{aligned}$$

   Pour calculer l'erreur, on utilise d'abord le théorème de Taylor.

   $$|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \sup_{x\in\,]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[} |f^{(5)}(x)| = \frac{24}{5!}\,|x|^5 \sup_{x\in\,]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[} \left(\frac{1}{1+x}\right)^5$$

   Ainsi $|R_4(x)| \leq \dfrac{24}{5!}\,2^5\,|x|^5 = \dfrac{32}{5}\,|x|^5$
   L'erreur commise peut alors être majorée comme suit.

   $$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{R_4(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\frac{R_4(x)}{x}\right| dx \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6.4x^4\,dx = \frac{6.4}{5}\,x^5\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq 0.08$$

   La valeur de l'intégrale cherchée s'écrit 1.03 ± 0.09

[12] Pour la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, il n'est pas possible de trouver explicitement une primitive. On ne peut donc pas non plus calculer cette intégrale à l'aide du théorème de Newton-Leibniz.

4 Exercices

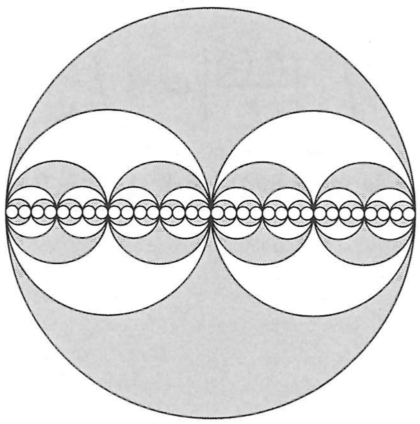
1. Quel est le plus petit entier naturel n tel que la somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ dépasse 100 000 ?

2. Un patient reçoit tous les soirs à 20 heures une dose de d mg d'un médicament. On sait que le corps humain élimine 10 % de cette substance par jour.
   a) Quelle quantité de substance contiendra le corps du patient 1, 2, 3, ..., n jours après le début du traitement (immédiatement avant la prise du médicament) ?
   b) Déterminer la dose journalière d nécessaire pour que le corps du patient contienne, à long terme, 100 mg de cette substance.

3. Donner l'expression du k-ième terme des séries suivantes.
   a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$
   c) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots$ d) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$
   e) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots$ f) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots$
   g) $\frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{7}{10} + \frac{10}{14} + \ldots$ h) $\frac{4}{10} + \frac{9}{17} + \frac{16}{26} + \frac{25}{37} + \frac{36}{50} + \ldots$

4. Trouver la raison et, si elle existe, la somme des séries géométriques suivantes.
   a) $1 + \frac{1}{2} + \ldots$ b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \ldots$ c) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$
   d) $9 + 6 + \ldots$ e) $16 - 12 + \ldots$ f) $\frac{1}{120} - \frac{1}{60} + \ldots$
   g) $1 + x + \ldots$ h) $1 + \frac{1}{x} + \ldots$ i) $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - x^2)^k$

5. On considère la figure suivante où dans chaque cercle sont inscrits deux cercles tangents. Calculer l'aire de la surface grisée si le rayon du grand cercle mesure 1.



6. Trouver une série géométrique de premier terme 1 et de somme 3.

7. Une série géométrique a pour somme 3. Quelles sont les valeurs possibles pour son premier terme ?

8. On considère la suite de terme général $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

   a) Calculer les premiers termes de cette suite et deviner une formule pour s_n.
   b) Démontrer cette formule par récurrence.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

9. Montrer que la série de terme $\dfrac{1}{k(k+2)}$ converge et calculer sa somme.

10. Trouver le terme et la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \ldots$$

11. Étudier la convergence des séries

   a) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots$

   b) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 + \ldots + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + \ldots$

   c) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7} + \ldots + \dfrac{k+1}{2k+1} + \ldots$

   d) $\dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{10}} - \ldots + \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k+1]{10}} + \ldots$

   e) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{2k} + \ldots$

   f) $\dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{31} + \ldots + \dfrac{1}{10k+1} + \ldots$

   g) $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} + \ldots$

12. Utiliser les critères de comparaison pour étudier la convergence des séries données par leur terme général.

a) $\dfrac{k+1}{k^3}$	b) $\dfrac{k^2+1}{k^3+1}$	c) $\dfrac{1}{k^3-1}$	d) $\dfrac{k-2}{k^3}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$	f) $\dfrac{k+2}{k(k+1)}$	g) $\dfrac{1}{3k+1}$	h) $\dfrac{k^4+5}{k^5}$
i) $\dfrac{\ln(k)}{k}$	j) $\dfrac{\ln(k)}{k^2}$	k) $\dfrac{\ln(k)}{k^3}$	l) $\dfrac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$
m) $\dfrac{k+1}{k\sqrt{3k-2}}$	n) $\dfrac{k}{\mathrm{e}^k}$	o) $\dfrac{k!}{10^k}$	p) $\dfrac{1}{3^k-1}$

13. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de Cauchy.

a) $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k+\ldots$

b) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}+\ldots$

c) $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{k^3}+\ldots$

14. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}+\ldots$

b) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}+\ldots$

15. Étudier la convergence des séries à termes positifs

a) $\frac{1}{k!}$ b) $\frac{1}{(k+1)^2-1}$ c) $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

d) $\frac{k^2}{2k^2+1}$ e) $\frac{k}{k^2+1}$ f) $\frac{2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}$

g) $\left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$ h) $\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$ i) $\frac{k^3}{\mathrm{e}^k}$

j) $\frac{2^{k-1}}{k^k}$ k) $\frac{k!}{2^k+1}$ l) $\frac{2^{k-1}}{k!}$

m) $\frac{1}{\ln(k)}$ n) $\frac{1}{k\ln(k)}$ o) $\frac{1}{k\ln^2(k)}$

p) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ q) $\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ r) $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

s) $\ln\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)$ t) $\frac{k!}{k^k}$ u) $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}}$

v) $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ w) $\frac{1}{k^2-k}$ x) $\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{4\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k)}$

16. Étudier la convergence des séries alternées suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument convergentes ou semi-convergentes.

a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\ldots$

b) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}+\ldots$

c) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}+\ldots$

d) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\frac{4}{19}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}k}{6k-5}+\ldots$

e) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}+\ldots$

f) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}-\frac{3}{8}+\ldots+(-1)^k\frac{k}{2^k}+\ldots$

g) $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^k\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^k+\ldots$

17. a) Estimer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{k!}+\ldots$$

par la somme des quatre (cinq) premiers termes.

b) Estimer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\ldots$$

par la somme de ses n premiers termes.

c) Estimer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots$$

par la somme de ses n premiers termes. En particulier, estimer la précision de l'approximation pour $n=10$.

18. Étudier la convergence de la série de terme $u_k=\frac{\ln(k)}{k^2}$ et déterminer un encadrement de sa somme.

19. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les séries suivantes convergent.

a) x^k b) $\dfrac{k!}{x^k}$ c) $\dfrac{1}{(2k-1)x^k}$

d) $\dfrac{1}{k^x}$ e) $(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k^x}$ f) $(-1)^k\dfrac{1}{k^{\ln(x)}}$

g) $2^k \sin\left(\dfrac{x}{3^k}\right)$ h) $\dfrac{\sin(kx)}{(2k-1)^2}$ i) $\dfrac{\cos(kx)}{e^{kx}}$

j) $\dfrac{\sqrt{k}}{(x-2)^k}$ k) $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\,3^k(x-5)^k}$ l) $(-1)^{k+1}e^{-k\sin(x)}$

20. Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières suivantes données par leur terme général et étudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence.

a) x^k b) $\dfrac{x^k}{k}$ c) k^3x^k

d) $\dfrac{x^k}{k\,2^k}$ e) $\dfrac{x^k}{k^k}$ f) $\dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$

g) $(-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$ h) $k!\,x^k$ i) $\dfrac{x^k}{k!}$

j) $(-1)^k(2k+1)^2x^k$ k) $\left(\dfrac{k}{2k+1}\right)^{2k-1}\cdot x^k$ l) $\dfrac{(k+1)^5}{2k+1}x^{2k}$

m) $\dfrac{(x-2)^k}{(2k-1)2^k}$ n) $\dfrac{k}{k+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^k$ o) $k^3(x+1)^{3k}$

p) $\dfrac{(x-3)^k}{\sqrt{k}}$ q) $\dfrac{1}{k\,5^k}(x+2)^k$

21. Établir le développement limité d'ordre n au voisinage de a des fonctions suivantes et estimer le reste d'ordre n dans l'intervalle $[a-\frac{1}{2}\,;a+\frac{1}{2}]$.

a) $x \mapsto \cos(x)$ $n=5$ $a=0$

b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$ $n=5$ $a=0$

c) $x \mapsto x^2+3x-5$ $n=3$ $a=0$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $n=4$ $a=-2$

e) $x \mapsto \sqrt{x}$ $n=3$ $a=9$

f) $x \mapsto \sin(x)$ $n=5$ $a=\dfrac{\pi}{2}$

g) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ $n=3$ $a=0$

h) $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ $n=2$ $a=0$

22. Établir le développement en série des fonctions suivantes au voisinage de $a = 0$ et déterminer le rayon de convergence de ces séries.

a) $x \mapsto (1+x)^2$ b) $x \mapsto \sqrt{x+1}$ c) $x \mapsto \tan(x)$

d) $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ e) $x \mapsto \ln(1-x)$ f) $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(x)$

23. En utilisant des développements en série déjà établis, déterminer les séries de Maclaurin des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ b) $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x}$ c) $x \mapsto \sinh(2x)$

d) $x \mapsto \arctan(x)$ e) $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ f) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

g) $x \mapsto \cos^2(x)$ h) $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ i) $x \mapsto \sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2})$

24. Développer les fonctions suivantes au voisinage de a et déterminer le domaine de convergence de ces séries.

a) $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \qquad (a = 2)$

b) $x \mapsto \sqrt{x} \qquad (a = 4)$

c) $x \mapsto \cos(x) \qquad (a = \dfrac{\pi}{2})$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x} \qquad (a = 1)$

e) $x \mapsto \ln(x) \qquad (a = 1)$

25. Écrire le développement en série de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de a. En déduire la formule du binôme de Newton en posant $x = a + b$.

26. Quelle est l'erreur commise si on prend approximativement

$$\mathrm{e} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

27. Estimer l'erreur commise en posant $x = 1$ dans l'approximation

$$\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

28. Combien faut-il prendre de termes dans la série $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots$ pour calculer $\ln(2)$ à 10^{-3} près (c'est-à-dire avec une erreur inférieure à 10^{-3}) ?

29. Calculer $\sqrt[3]{7}$ à 10^{-2} près en développant la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{8+x}$ en série entière de x.

30. Expliquer l'origine de la formule approchée $\sqrt{a^2+x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ avec $a > 0$. Calculer $\sqrt{23}$ à l'aide de cette formule, en posant $a = 5$, et évaluer l'erreur commise.

31. Calculer $\sqrt[4]{19}$ à 10^{-3} près.

32. Pour quelles valeurs de x l'erreur commise par l'approximation $\sin(x) \approx x$ est-elle inférieure à 10^{-6} ?

33. Pour quelles valeurs de x l'erreur commise par la formule $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ est-elle inférieure à 0.0001 ?

34. Calculer les intégrales suivantes à 10^{-4} près.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(x^2)\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{x^3}{1+x^5}\,dx$ i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x}e^{-x}\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^2)\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\,dx$ l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$ n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+4x^5}\,dx$

35. Utiliser un développement en série pour calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\cdot\ln(x)}{x^2-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$

36. Soit la fonction réelle f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$.

a) Étudier et représenter graphiquement la fonction f.

b) Démontrer que la série de terme général $u_k = f(k)$ converge.

c) À l'aide du critère de l'intégrale, déterminer le nombre de termes qu'il faut considérer pour calculer la somme de la série de terme u_k avec une précision de 0.01.

37. On considère la série de terme $u_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ pour $k \geq 1$.

a) Montrer que cette série est une série à termes positifs.

b) Utiliser un développement limité pour montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \approx \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$ lorsque k est grand. En déduire que la série de terme u_k converge.

c) Soit S la somme de cette série. Montrer que S est la limite de l'expression $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \ln(1+n)$ lorsque n tend vers l'infini.

d) Estimer la valeur de S en prenant les vingt premiers termes. Le nombre S est appelé *constante d'Euler*[13] ; il est habituellement noté γ.

38. Résoudre dans l'intervalle $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en utilisant

a) $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ b) $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$

et comparer avec la valeur exacte.

39. Calculer la solution strictement positive de l'équation $\sin(x) = \frac{3}{4}x$ en approchant la fonction sinus par un polynôme de Maclaurin

a) de degré 3 b) de degré 5.

40. Écrire un programme permettant de calculer[14] à 10^{-5} près le cosinus d'un angle (donné en radians) en utilisant le développement en série de cette fonction en 0. *Indication. Par les symétries (parité et périodicité) de la fonction cosinus, le calcul de* $\cos(x)$ *peut être ramené au calcul du cosinus d'un angle du premier quadrant : la convergence de la série sera d'autant plus rapide !*

41. En théorie de la relativité, la masse m d'une particule qui se déplace à vitesse v est donnée par

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

où m_0 est la masse au repos et c la vitesse de la lumière.

a) Écrire les trois premiers termes du développement de m en $\frac{v}{c}$.

b) Montrer que, dans le cas où $v = (1 - \frac{1}{n})c$ avec n grand (la vitesse v est proche de la vitesse de la lumière), on a approximativement

$$m \approx m_0\sqrt{\frac{n}{2}}$$

[13]Leonhard Euler (1707–1783), mathématicien suisse.

[14]De nombreuses applications des séries de Taylor à des calculs de fonctions ou d'intégrales sont proposées dans l'ouvrage *Méthodes Numériques*, CRM N° 21.

42. Trouver une solution approximative de chacune des équations différentielles suivantes par un développement en série de la fonction inconnue (calculer les premiers termes de la série).

a) $y' = xy + 1$ avec $y(0) = 0$

b) $(x-1)y' - y + x^3 = 0$ avec $y(0) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2$ avec $y(0) = 1$

d) $y' = y + x$ avec $y(2) = 4$

43. On considère l'équation différentielle linéaire $(1-x)y' + y = 1 + x$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

a) Poser sous forme d'une série entière $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ la solution de cette équation. Déterminer les coefficients a_n et le rayon de convergence de cette série.

b) Trouver la solution (exacte) en intégrant l'équation différentielle. Calculer ensuite y'' et montrer comment ce résultat permet de retrouver la série entière obtenue à la question a).

44. a) On considère l'intégrale elliptique[15] définie par

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}} \quad \text{avec } 0 < k < 1$$

Calculer les quatre premiers termes du développement en série de Maclaurin de E en k.

b) La période T du pendule de longueur l est donnée par la formule

$$T = 4\sqrt{\tfrac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \sin^2(t)}}$$

où α_0 est l'amplitude. Utiliser le résultat de l'exercice a) pour déterminer les trois premiers termes du développement en série de T en α_0.

[15] Cette intégrale s'apparente à celle du calcul du périmètre d'une ellipse. La fonction à intégrer n'admet pas de primitive élémentaire.

Annexe : Le symbole de sommation Σ

Pour abréger l'écriture de sommes, on utilise souvent le symbole de sommation Σ (sigma).

Exemples

1. $1+2+3+4+5+6=\sum_{k=1}^{6} k$
2. $1^2+2^2+3^2+4^2=\sum_{k=1}^{4} k^2$
3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

Pour une suite réelle $(u_k), k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n}$$

Le symbole Σ indique qu'il faut additionner tous les termes obtenus en posant successivement $k=1$, $k=2$, ..., $k=n$.

Règles de calcul

$\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n}v_k$	$\sum_{k=1}^{n}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}u_k$

Exemples

1. Calculer la somme des n premiers nombres impairs.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k\;-\;n=2\,\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

2. a) Écrire à l'aide du symbole de sommation la somme

$$s_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)$$

   b) Calculer cette somme sachant que $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Somme d'une série

Pour désigner la somme d'une série convergente de terme u_k, on utilise l'écriture

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots}$$

Réponses aux exercices

1. $n = 16$

2. a) Après 1 jour : $\frac{9}{10}d$

   2 jours : $\frac{9}{10}\left(d + \frac{9}{10}d\right) = d\left(\frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2\right)$

   3 jours : $\frac{9}{10}d\left(d + d\left(\frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2\right)\right) = d\left(\frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2 + (\frac{9}{10})^3\right)$

   n jours : $d\left(\frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2 + (\frac{9}{10})^3 + ... + (\frac{9}{10})^n\right) = 9(1 - 0.9^n)d$

   b) $d \approx 11.1$ mg

3. Pour $k \geq 1$

   a) $\dfrac{1}{2k-1}$ b) $\dfrac{1}{2k}$ c) $\dfrac{k}{2^{k-1}}$ d) $\dfrac{1}{k^2}$

   e) $\dfrac{k+2}{(k+1)^2}$ f) $\dfrac{2k}{3k+2}$ g) $\dfrac{3k-2}{4k-2}$ h) $\dfrac{(k+1)^2}{(k+2)^2+1}$

4. a) $r = \dfrac{1}{2}$ $S = 2$ b) $r = -\dfrac{1}{2}$ $S = \dfrac{2}{15}$

   c) $r = \dfrac{1}{2}$ $S = 2\sqrt{2}$ d) $r = \dfrac{2}{3}$ $S = 27$

   e) $r = -\dfrac{3}{4}$ $S = \dfrac{64}{7}$ f) $r = -2$ la série diverge

   g) $r = x$ $S = \dfrac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$ h) $r = \dfrac{1}{x}$ $S = \dfrac{x}{x-1}$ si $|x| > 1$

   i) $r = 1 - x^2$ $S = \dfrac{1}{x^2}$ si $|x| < \sqrt{2}$ et $x \neq 0$

5. $\dfrac{2\pi}{3}$

6. Série de raison $r = \dfrac{2}{3}$

7. Le premier terme appartient à l'intervalle $]0\,;6[$.

8. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dots$ $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \dfrac{1}{2}$

9. Somme $= \dfrac{3}{4}$

   Indications : $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$ et $s_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

10. $u_k = \dfrac{2}{k(k+1)}$; $s_n = 2\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ et $s = 2$

11. La série b) converge, les autres divergent.

12. Les séries a), c), d), j), k), n) et p) convergent, les autres divergent.

13. Les séries a) et b) convergent. Pour la série c), le critère de Cauchy ne permet pas de conclure ; cette série converge.

14. Les deux séries convergent.

15. Les séries a), b), c), f), h), i), j), l), o), q), s), t), u), w) et x) convergent, les autres divergent.

16. Les séries c), f) et g) convergent absolument ; les séries a), b) et e) sont semi-convergentes ; la série d) diverge.

17. a) $s_4 = 0.6250$ (valeur par défaut) avec une erreur inférieure à 0.009
$s_5 = 0.6333$ (valeur par excès) avec une erreur inférieure à 0.0014

b) L'erreur est inférieure à $\dfrac{1}{2^n}$ (majoration par une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

c) L'erreur est inférieure à $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}$
Pour $n = 10$, on trouve $s_{10} \approx 1.55$ (valeur par défaut) avec une erreur inférieure à 0.1.

18. Le critère de l'intégrale (intégration par parties de la fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$) permet de démontrer la convergence. On trouve ensuite $s_{10} \approx 0.6185$ (valeur par défaut) et pour l'erreur R_{10} : $\int_{11}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_{10} \leq f(11) + \int_{11}^{+\infty} f(x)\,dx$, c'est-à-dire $0.3088 \leq R_{10} \leq 0.3288$. La somme S de la série peut donc être encadrée par $0.927 \leq S \leq 0.948$.

19.

a) $]-1\,;1[$	b) $\emptyset$	c) $\mathbb{R}\backslash]-1\,;1]$
d) $]1\,;+\infty[$	e) $]0\,;+\infty[$	f) $]1\,;+\infty[$
g) $\mathbb{R}$	h) $\mathbb{R}$	i) $]0\,;+\infty[$
j) $\mathbb{R}\setminus[1\,;3]$	k) $\mathbb{R}\setminus\left[\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{16}{3}\right[$	l) converge si $\sin(x) > 0$

20.

a) $]-1\,;1[$	b) $[-1\,;1[$	c) $]-1\,;1[$
d) $[-2\,;2[$	e) $\mathbb{R}$	f) $]-1\,;1]$
g) $]-1\,;1]$	h) $\{0\}$	i) $\mathbb{R}$
j) $]-1\,;1[$	k) $]-4\,;4[$	l) $]-1\,;1[$
m) $[0\,;4[$	n) $]-2\,;2[$	o) $]-2\,;0[$
p) $[2\,;4[$	q) $[-7\,;3[$	

21. a) $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, $|R_5(x)| \leq \dfrac{x^6}{6!}$

b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$, $|R_5(x)| \leq \dfrac{\sqrt{e}}{6!}x^6$

c) $-5 + 3x + x^2$, $|R_3(x)| = 0$

d) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2 - \frac{1}{16}(x+2)^3 - \frac{1}{32}(x+2)^4$, $|R_4(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^6 |x+2|^5$

e) $3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3$, $|R_3(x)| \leq 2.2 \cdot 10^{-5}\,(x-9)^4$

f) $1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$, $|R_5(x)| \leq \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6$

g) $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$, $|R_3(x)| \leq 1.1 \cdot x^4$

h) $x - \dfrac{1}{2}x^2$, $|R_2(x)| \leq \frac{2}{3}|x|^3$

22. a) $1+2x+x^2$ $\qquad r=+\infty$

b) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$ $\qquad r=1$

c) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$ $\qquad r=\frac{\pi}{2}$

d) $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{2\cdot 5}{3!\cdot 3^3}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{4!\cdot 3^4}x^4+\ldots$ $\qquad r=1$

e) $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots$ $\qquad r=1$

f) $1-x+\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{4!}x^4+\frac{4}{5!}x^5-\frac{8}{7!}x^7+\frac{16}{8!}x^8-\frac{16}{9!}x^9+\frac{32}{11!}x^{11}-\ldots$ $\qquad r=+\infty$

23. a) $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\ldots$

b) $x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots$

c) $2x+\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5+\frac{2^7}{7!}x^7+\ldots$

d) $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots$

e) $1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^3}{3!}x^3+\ldots$

f) $2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7+\ldots$

g) $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots$

h) $1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\ldots$

i) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\,2!}x^2-\frac{1}{2^3\,3!}x^3+\frac{1}{2^4\,4!}x^4+\frac{1}{2^5\,5!}x^5-\frac{1}{2^6\,6!}x^6-\frac{1}{2^7\,7!}x^7+\ldots$

24. a) $11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$ $\qquad \mathbb{R}$

b) $2+\frac{1}{4}(x-4)-2\,\frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{1}{4^2}(x-4)^2+2\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{1}{4^3}(x-4)^3+\ldots$ $\qquad [3\,;5]$

c) $-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots$ $\qquad \mathbb{R}$

d) $1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5+\ldots$ $\qquad]0\,;2[$

e) $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$ $\qquad]0\,;2]$

25. $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n$ avec $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

26. $|R_4(x)|\leq\frac{|x|^5}{5!}\sup_{t\in[0\,;\,1]}\left|e^t\right|=\frac{e}{5!}<0.025$

27. $\frac{1}{7}<0.15$

28. 1000 termes

29. $\sqrt[3]{7} \approx 2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{288} \approx 1.91$ (erreur inférieure à 0.007)

30. Il s'agit du polynôme de Taylor d'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \sqrt{a^2 + x}$ (en zéro).
On pose $a = 5$ et $x = -2$: $\sqrt{23} \approx 5 - \frac{2}{10} = 4.8$ (erreur inférieure à 0.005)

31. $\sqrt[4]{19} = \sqrt[4]{16+3} \approx 2 + \frac{3}{32} - \frac{27}{4096} \approx 2.087$ (erreur inférieure à 0.001)

32. $|x| < 0.018$ (reste d'ordre 2)

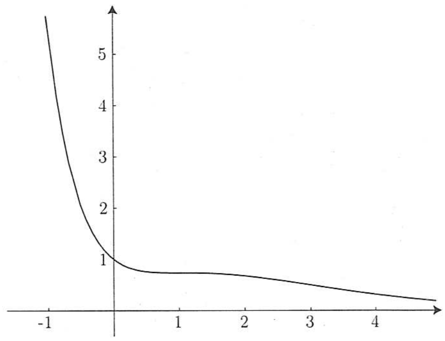
33. $|x| < 0.23$ (reste d'ordre 3)

34.

a)	0.4931	b)	0.7468	c)	0.6076
d)	0.6205	e)	0.2505	f)	0.0264
g)	0.0413	h)	0.0004	i)	0.4030
j)	0.0389	k)	0.7635	l)	1.0307
m)	0.8356	n)	0.3029		

35. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

36. a) $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{e^x}$
et $f''(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{e^x}$



b) Utiliser le critère de l'intégrale avec $\int f(x)\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x} + C$ ou le critère de d'Alembert.

c) $R_n \le \int_n^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{n^2+2n+3}{e^n} \le 0.01$ lorsque $n \ge 10$

37. b) Utiliser le critère d'équivalence.
d) $\gamma \approx 0.553$

38. a) $x = 1$ b) $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx 1.0493$
valeur exacte $x = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ erreur a) 4.5% b) 0.2%

39. a) $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.2247$ b) $x = \sqrt{10 - \sqrt{70}} \approx 1.2780$

40.
```
signe := 1
If x<0    Then x := -x
If x>2*Pi Then x := x-Int(x/(2*Pi))*2*Pi
If x>Pi   Then x := x-Pi ; signe := -1
If x>Pi/2 Then x := Pi-x ; signe := -signe
k := 0 ; f := 1 ; t := 1 ; co := 1
Do
   Let k := k+2 ; f := f*(k-1)*k ; t := -t*x*x ; co := co+t/f
Until t/f<0.000005
```

41. a) $m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} m_0 \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$
b) $m = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} \approx \frac{m_0}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$

42. a) $y(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}\,x^5 + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}\,x^7 + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\,x^9 + \ldots$

b) $y(x) = 1 - x + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{3}{20}\,x^5 + \frac{1}{10}\,x^6 + \ldots$

c) $y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}\,x^3 + \frac{7}{6}\,x^4 + \ldots$

d) $y(x) = 4 + 6(x-2) + \frac{7}{2}\,(x-2)^2 + \frac{7}{6}\,(x-2)^3 + \frac{7}{24}\,(x-2)^4 + \ldots$

43. a) $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$; rayon de convergence $r = 1$

b) Solution exacte $y(x) = (1-x)\ln(1-x) + 2x$

$y''(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ et on intègre terme à terme

$y(x) = a + bx + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}\,x^n + \ldots$

44. a) $E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\,k^2 + \frac{9}{64}\,k^4 + \frac{25}{256}\,k^6 + \ldots\right)$

b) $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,E\left(\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\,\alpha_0^2 + \frac{11}{3072}\,\alpha_0^4 + \ldots\right)$