Problème 1 (4 points)

Résolvons l'équation différentielle à variables séparables

$$y^2 \cdot y' = x^2$$

sous la condition $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \int y^2 \cdot y'\,dy &= \int x^2\,dx \\ \frac{1}{3}\,y^3 &= \frac{1}{3}\,x^3 + c \\ y^3 &= x^3 + k \\ y &= \sqrt[3]{x^3 + k} \end{aligned}$$

Comme $y(0) = 1$, on a $1 = \sqrt[3]{0 + k}$. Donc $k = 1$.

Finalement $y = \sqrt[3]{x^3 + k}$.

Problème 2 (8 points)

Résolvons l'équation différentielle à variables séparables $(e^x + 1) \cdot y' = y - y \cdot e^x$.

$$\begin{aligned} (e^x + 1) \cdot y' &= y - y \cdot e^x \\ (e^x + 1) \cdot y' &= y(1 - e^x) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \\ \ln|y| &= \int \frac{1 - e^x}{1 + e^x}\,dx = \int \frac{1 + e^x - 2\,e^x}{1 + e^x}\,dx = \int \left(1 + \frac{-2\,e^x}{1 + e^x}\right)dx \\ \ln|y| &= x - 2\int \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx \end{aligned}$$

Posons $t = e^x$. Alors $dt = e^x\,dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx &= \int \frac{1}{1 + t}\,dt \\ &= \ln|1 + t| \\ &= \ln|1 + e^x| = \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ln|y| &= x - 2\,\ln(1 + e^x) + c \\ y &= e^{x - 2\,\ln(1 + e^x) + c} = e^x \cdot e^{-2\,\ln(1 + e^x)} \cdot e^c \\ &= k \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^{\ln(1 + e^x)^2}} = k \cdot e^x \cdot \frac{1}{(1 + e^x)^2} = k \cdot \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \end{aligned}$$

Finalement $y = k \cdot \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

Problème 3 (11 points)

Résolvons le système non amorti décrit par le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 3\,\cos(c \cdot x) \qquad u(0) = 0 \qquad u'(0) = 0$$

avec $u(x)$ si $c \neq 1$.
Résolvons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$u'' + u = 3\,\cos(c \cdot x)$$

— Eq. caractéristique $r^2 + 1 = 0$ qui admet comme solution $r = \pm i$.
La solution de l'équation sans second membre :

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

— Cas général. Comme $c \neq 1$, nous pouvons choisir

$$p(x) = p\,\cos(c\,x) + q\,\sin(c\,x)$$

comme solution particulière. Alors :

$$\begin{aligned} p'(x) &= -p\,c\,\sin(c\,x) + q\,c\,\cos(c\,x) \\ &= c\,(-p\,\sin(c\,x) + q\,\cos(c\,x)) \\ p''(x) &= \\ &= c\,(-p\,c\,\cos(c\,x) - q\,c\,\sin(c\,x)) \\ &= c^2\,(-p\,\cos(c\,x) - q\,\sin(c\,x)) \end{aligned}$$

En substituant, on obtient

$$c^2\,(-p\,\cos(c\,x) - q\,\sin(c\,x)) + p\,\cos(c\,x) + q\,\sin(c\,x) = 3\,\cos(c\,x)$$

et

$$(p - p\,c^2)\cos(c\,x) + (q - q\,c^2)\sin(c\,x) = 3\,\cos(c\,x)$$

On obtient le système : $\begin{cases} p - p\,c^2 &= 3 \\ q - q\,c^2 &= 0 \end{cases}$

Et ainsi $\begin{cases} p(1 - c^2) &= 3 \\ q(1 - c^2) &= 0 \end{cases}$

Ce qui permet de trouver $p = \dfrac{3}{1 - c^2}$ et $q = 0$.
La solution de l'équation différentielle :

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{3}{1 - c^2}\,\cos(c\,x)$$

— Déterminons c_1 et c_2.
Comme $u(0) = 0$, on a $c_1 + \dfrac{3}{1-c^2} = 0$. Donc $c_1 = -\dfrac{3}{1-c^2}$.
Comme $u'(0) = 0$, on a $c_2 \cos(X) = 0$. Donc $c_2 = 0$.

Finalement, la solution de cette équation différentielle est

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{1-c^2}\cos(x) + \frac{3}{1-c^2}\cos(c\,x) \\ &= \frac{3}{1-c^2}\left(\cos(c\,x) - \cos(x)\right) \\ &= \frac{3}{c^2-1}\left(\cos(x) - \cos(c\,x)\right) \end{aligned}$$

Problème 4 (7 points)

F	E	A	B	C	G	D
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	∞	∞	4_{F}	∞	$\mathbf{2_F}$	2_{F}
—	∞	9_{G}	4_{F}	8_{G}	—	$\mathbf{2_F}$
—	∞	9_{G}	$\mathbf{4_F}$	7_{D}	—	—
—	10_{B}	9_{G}	—	$\mathbf{7_D}$	—	—
—	$\mathbf{8_C}$	9_{G}	—	—	—	—

Le chemin le plus court est F-D-C-E, de longueur 8.

Problème 5 (10 points)

Le chiffre `3256985401435`.

La clé publique `(20361616521269, 17)`.

On casse le nombre `n = 20361616521269`

```
def facteur(n):
    for i in range(3, int(n**(1/2)), 2):
        if n % i == 0:
            print(i)
            break

facteur(20361616521269)
```

Ce programme donne : `29629`.

Ce qui permet de trouver `20361616521269 = 29629 687219161`.

A partir de `e = 17`, de la factorisation de `n` et de l'algorithme d'Euclide, on trouve `d = 5988508609553`.

Finalement, on casse le message grâce à l'exponentiation modulaire :
`m = pow(3256985401435, d, n)` qui donne `m = 12345678910`.

Le code complet :

```
n = 20361616521269
p = 29629
q = 20361616521269//29629
e = 17
i = 2
while i < n**(1/2):
    if n % i == 0:
        print(i)
        break
    i += 1

d = 1

phi = 20360929272480

def eucl_etend_K(m, n):
    a = 0
    a_ = 1
    b = 1
    b_ = 0
    c = m
    d = n
    q = c // d
    r = c % d
    while r:
        t = a_
        a_ = a
        a = t - q * a
        t = b_
        b_ = b
        b = t - q * b
        c = d
        d = r
        q = c // d
        r = c % d
    return (a, b, d)
```

```
d = eucl_etend_K(e, phi)[0]%phi
print(d)

m = pow(3256985401435, d, n)
print(m)
```

Récapitulation

Exercice 1 — 4 points
Exercice 2 — 8 points
Exercice 3 — 11 points
Exercice 4 — 7 points
Exercice 5 — 10 points

Barème : $\dfrac{\text{Nombre de points}}{40} \cdot 5 + 1$