Corrigé de l'examen d'OSPM 2017, partie mathématique.

Problème 1 (5 + 4 + 3 =12 points)

a) $p(t) = 0$ est une solution triviale de l'ED $p'(t) = k \cdot p(t)$.

Si $p(t) \neq 0$, on a :

$p'(t) = k \cdot p(t) \iff \dfrac{p'(t)}{p(t)} = k \overset{\int dt}{\iff} \ln|p(t)| = k \cdot t + a, \quad a \in \mathbb{R} \iff$

$|p(t)| = e^{k \cdot t + a} = e^a \cdot e^{k \cdot t} = c \cdot e^{k \cdot t}, \quad c \in \mathbb{R}_+^* \iff p(t) = e^{k \cdot t + a} = c \cdot e^{k \cdot t}, \quad c \in \mathbb{R}$

Avec $p(0) = 6$, il vient $p(0) = c \cdot e^{k \cdot 0} = c = 6$.

Avec $p(5) = 6.9$, il vient $p(5) = 6 \cdot e^{k \cdot 5} = 6.9 \iff k = \dfrac{1}{5} \cdot \ln\left(\dfrac{6.9}{6}\right) = \dfrac{1}{5} \cdot \ln\left(\dfrac{23}{20}\right)$.

Ainsi, $p(t) = 6 \cdot \left(\dfrac{23}{20}\right)^{\frac{t}{5}} \simeq 6 \cdot e^{0.02795238847502\, t}$

b) $p'(t) = 0.03 \cdot p(t) + 0.01$ a pour solution particulière $p(t) = -\dfrac{1}{3}$

La solution SSMA est $p(t) = a \cdot e^{-0.03\, t}$

Ainsi, la solution générale est $p(t) = -\dfrac{1}{3} + a \cdot e^{-0.03\, t}, \ a \in \mathbb{R}$.

Avec la condition initiale $p(0) = 6$, il vient $6 = -\dfrac{1}{3} + a$ d'où $a = 6 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{19}{3}$

c) On veut $p(t) = 6 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow p'(t) = k \cdot p(t) + m = 0 \Rightarrow p(t) = -\dfrac{m}{k} = 6$.

Ainsi la population se maintient à 6 milles habitants si $m = -6\, k$.

Problème 2 (3+3+1+4+2= 13 points)

a) Modèle linéaire : $N = 25.1T + 518$ avec un coefficient de détermination de $r^2 = 0,963$. D'un point de vue mathématique le modèle linéaire est excellent car son coefficient de détermination est supérieur à 0,9, mais dans le contexte il semble très mauvais pour une extrapolation de résultats pour des années supérieures à l'an 2000.

b) Modèle logistique : $N = \dfrac{1998.8}{1 + 154.79e^{-0,829T}}$ avec un coefficient de détermination de $r^2 = 0.997$. Cela signifie que $99,7\%$ de la variance de N peut-être expliquée par T et $0,3\%$ par d'autres facteurs.

c) La population va se stabiliser à 2000 habitants

d) $N = \dfrac{2000}{1 + a \cdot e^{bT}} \Leftrightarrow N + N \cdot a \cdot e^{bT} = 2000 \Leftrightarrow a \cdot e^{bT} = \dfrac{2000 - N}{N} \Leftrightarrow \ln\left(a \cdot e^{bT}\right) = \ln\left(\dfrac{2000 - N}{N}\right)$

$\Leftrightarrow \ln(a) + bT = \ln\left(\dfrac{2000 - N}{N}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2000 - N}{N}\right) = bT - \ln(a) \Leftrightarrow Y = mX + h.$

Avec $Y = \ln\left(\dfrac{2000 - N}{N}\right)$, $X = T$, $a = e^{-h}$ et $b = m$

e) Il vaudra 1, car le modèle sera le polynôme de Lagrange des 5 points donnés. Pourtant en observant le comportement d'un tel polynôme pour des années après l'an 2000 (il tend vers l'infini), on constate facilement que le modèle n'est pas meilleur.

Problème 3 (2+5+3=10 points)

a) $x^2 \cdot \cos(x^2) = x^2 - \dfrac{x^6}{2!} + \dfrac{x^{10}}{4!} - \dfrac{x^{14}}{6!} + \ldots + (-1)^k \, \dfrac{x^{4k+2}}{(2k)!} + \ldots \; = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{x^{4k+2}}{(2k)!}.$

b) $$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{x^{4k+2}}{(2k)!} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(-1)^k \, \frac{x^{4k+3}}{(2k)! \cdot (4k+3)} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)! \cdot (4k+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3}$$

Il s'agit d'une série alternée de terme $u_k = \dfrac{1}{(2k)! \cdot (4k+3)} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4k+3}$

La série converge selon les critères de Leibnitz. En effet,

1) $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} u_k \;=\; \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{(2k)! \cdot (4k+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} \;=\; 0$

2) $$u_{k+1} = \frac{1}{(2(k+1))! \cdot (4(k+1)+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4(k+1)+3} = \frac{1}{(2k+2)! \cdot (4k+7)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+7} <$$

$$\frac{1}{(2k)! \cdot (4k+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} = u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

c) $R(n) < u_{n+1}$ Pour $n = 1$, l'approximation $I \approx \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ donne un reste inférieure à 10^{-5} car

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{0! \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24} = 0.041\bar{6} > 0.00001 \\
u_1 &= \frac{1}{(2)! \cdot (4+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4+3} = \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 2^7} \simeq 0.000558 > 0.00001 \\
u_2 &= \frac{1}{(4)! \cdot (8+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8+3} = \frac{1}{24 \cdot 11 \cdot 2^{11}} \simeq 0.00000185 < 0.00001
\end{aligned}$$

Problème 4 (7+1 = 8 points)

a)
```
from math import *

def x2Cosx2(x=0) : # 1pt
    return x**2*cos(x**2)

n=int(input("nombre de subdivisions de I : "))
A=0
delta = 1/2/n
print("delta = ",delta)
for i in range(n) :
    A+=x2Cosx2(i*delta)*delta

print("Avec ",n," subdivisions, l’intégrale est estimée à ",A)
```

b)

n	Estimation de I
100	0.040507
1000	0.041050
10000	0.041104
20000	0.041108

On constate qu’il faut subdiviser l’intervalle d’intégration en 2’000 pour obtenir le même niveau de précision que celui du développement limité à deux termes de la série de McLaurin.

Barème

Total : 43 points

Calcul de la note pour n points : $\frac{n}{43} \cdot 5 + 1$ arrondi au millième.