canton de vaud
LIBERTÉ ET PATRIE

Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

gymnase BURIER

EXAMEN ECRIT DE L'ECOLE DE MATURITE

JUIN 2017

EPREUVE DE MATHEMATIQUES OSPM

Nom : ____________________ Prénom : __________________ Classe : _________

Durée de l'épreuve :	2 heures 40 minutes
Consignes :	Les rubriques marquées d'une étoile ⋆ doivent être rédigées en détail, comme si elles avaient été résolues avec une calculette ordinaire, sans faire appel à un programme ou un logiciel effectuant du calcul symbolique. Le programme de l'exercice 4 doit être enregistré sur le bureau de votre ordinateur dans un fichier nommé « nomprenom.py ».
Matériel autorisé :	Formulaire officiel non annoté Formulaire CRM non annoté Calculatrices autorisées : • Texas Instruments : tous les modèles TI30 • Casio : fx-85 ES, fx-85 ES PLUS Ordinateur fourni

Problème 1 (12 points)

L'évolution de la population d'une petite ville est décrite par la fonction p, donnant le nombre de **milliers** d'habitants en fonction du temps t mesuré en années.

a) ⋆ Par l'effet d'un taux d'accroissement endogène [1], la population croît selon la loi

$$p'(t) = k \cdot p(t).$$

Déterminer $p(t)$ pour une population de 6 mille habitants au temps $t = 0$ (c'est à dire telle que $p(0) = 6$) et de 6.9 milliers d'habitants 5 ans plus tard.

b) ⋆ Si en plus du taux d'accroissement endogène, on inclut les facteurs de croissance exogènes [2] , la population croît selon la loi

$$p'(t) = l \cdot p(t) + m.$$

Déterminer $p(t)$ pour une population de 6 mille habitants au temps $t = 0$, sachant que $l = 0.03$ et $m = 0.01$.

c) ⋆ Dans le cas présenté sous b) où l'on tient compte des facteurs endogènes et exogènes, existe-t-il des valeurs pour l et m telles que l'effectif de la population reste constante, en se maintenant à 6 mille habitants, c'est à dire tels que $p(t) = 6, \forall t \in \mathbb{R}_+$? Justifier la réponse.

1. endogène : dont la cause est interne
2. exogène : dont la cause est externe

Problème 2 (13 points)

Le tableau ci-dessous montre l'évolution de la population d'une île, dont la capacité d'accueil est par définition limitée.

Année	1920	1940	1960	1980	2000
Nombre d'habitants	120	250	1000	1630	1940

On associe ces données à la série statistique double $(T; N)$ où T est le nombre d'années écoulées depuis l'année 1900 et N le nombre d'habitants.

a) Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de ces données.
Le modèle linéaire est-il approprié d'un point de vue mathématique ?
Est-il approprié dans le contexte donné ?
Justifier les réponses.

b) Déterminer l'équation de l'ajustement logistique à valeur maximum de ces données. Donner la valeur du coefficient de détermination et l'interpréter.

c) Selon ce modèle comment va évoluer la population de l'île sur le très long terme ?

d) ⋆ Montrer par calculs qu'un ajustement logistique à valeur maximum

$$N = \frac{2000}{1 + a \cdot e^{bT}}$$

peut être obtenu à partir d'un ajustement linéaire $Y = mX + h$ et exprimer X, Y, a et b en fonction de N, T, m et h.

e) ⋆ Pourquoi le coefficient de détermination d'un ajustement polynomial de degré 4 de ces données est-il égal à 1 ? Peut-on en conclure que cet ajustement de degré 4 est le plus approprié pour décrire la relation entre T et N ? Justifier la réponse.

Problème 3 (10 points)

On veut évaluer **l'intégrale**

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

a) ⋆ En utilisant le développement de MacLaurin

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \ ,$$

déterminer le développement en série entière de $x^2 \cdot \cos(x^2)$.

b) ⋆ A l'aide du développement obtenu au point précédent, exprimer **l'intégrale** I comme une série alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$.

Préciser la valeur du terme u_k et montrer que la série alternée converge.

c) ⋆ On note $I' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ l'estimation de I.

Calculer la valeur minimale de n de sorte que l'erreur commise lors de l'estimation soit inférieure à 10^{-5}.

Problème 4 (8 points)

a) Ecrire un programme Python permettant d'estimer **l'intégrale**

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

à l'aide d'une somme de Riemann.

Le programme doit demander à l'utilisateur le nombre de subdivisions désirées sur l'intervalle d'intégration $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
Il doit contenir une fonction qui renvoie la valeur $f(x) = x^2 \cdot \cos(x^2)$ pour x passé en paramètre.
A la fin, l'estimation obtenue doit être affichée.

b) Tester le programme Python avec 100, 1000, 10000, 20000 subdivisions.

Le programme doit être enregistré sur le bureau de votre ordinateur dans un fichier nommé « nomprenom.py ».