canton de vaud
LIBERTÉ ET PATRIE

Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

gymnase BURIER

EXAMEN ECRIT DE L'ECOLE DE MATURITE

JUIN 2016

EPREUVE DE MATHEMATIQUES OSPM

Nom : ____________________ Prénom : __________________Classe : ________

Durée de l'épreuve :	2 heures 40 minutes
Consignes :	Aucune
Matériel autorisé :	Formulaire officiel non annoté
	Formulaire CRM non annoté
	Calculatrices autorisées :
	• Texas Instruments : tous les modèles TI30
	• Casio : fx-85 ES, fx-85 ES PLUS
	Calculatrice TI-Nspire en mode examen

Problème 1 (10 points)

Le CHIFFRE DE CESAR à clef 10 est modifié de la manière suivante :

- si, dans le message à coder, la lettre occupe un rang **impair**, elle est décalée vers la DROITE de 10 positions (`a` est donc codée par `K`, `b` par `L`, ... , `y` par `I` et `z` par `J`).
- si, dans le message à coder, la lettre occupe un rang **pair**, elle est décalée vers la GAUCHE de 10 positions (`a` est donc codée par `Q`, `b` par `R`, ... , `y` par `O` et `z` par `P`).

Créer un programme **monprenom** qui permet de crypter à l'aide de cette méthode (avec la clef 10). On admet que le texte à crypter est toujours entré en minuscule, alors que le texte crypté doit être retourné en majuscule.
Par exemple, le programme retournera le texte crypté `KRLQIU` si le texte à crypter est `abbaye` (voir ci-contre).

Remarque : le nom du programme est votre prénom. Si vous vous appelez Jules, le programme sera sauvé sous `jules`.
Codes des caractères de la TI-Nspire :

Problème 2 (10 points)

Avec le système RSA, la lettre `a` est codée avec le nombre 1, la lettre `b` avec le nombre 2 et ainsi de suite jusqu'à la lettre `z` qui est codée avec le nombre 26.
Des messages sont cryptés avec la clé publique $(n = 2159, e = 263)$.

a) On souhaite envoyer le message "help". Quel est le message crypté qui sera envoyé ?

b) Quelle est la clef privée utilisée pour décrypter ?

c) On reçoit le message 1252-358-1392-1274-997-552. Décrypter ce message.

Problème 3 (10 points)

Si un corps de masse m se trouve à une distance h (en kilomètres) au-dessus de la surface de la Terre, la force F provoquée par la gravitation terrestre sur ce corps est donnée par

$$F = G \cdot \frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad (1)$$

où :

- G est la constante de gravitation
- M est la masse de la Terre
- R est le rayon de la Terre

a) Démontrer que la force F donnée sous (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$F = \frac{GMm}{R^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{h}{R})^2} \qquad (2)$$

b) Donner le polynôme $P_2(x)$ formé des trois premiers termes du développement de Mac Laurin de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

En déduire une approximation polynomiale $\widetilde{F}$ de F.

c) Un satellite de masse m se trouve à une distance h (en kilomètres) au-dessus de la surface de la Terre.

i) Démontrer que l'erreur $\Delta F = F - \widetilde{F}$ commise lors de l'approximation de F par $\widetilde{F}$ est telle que

$$|\,\Delta F\,| \leq \frac{4GMmh^3}{R^5}$$

ii) On pose $h = 500$ km.
Quelle est l'erreur relative maximale commise, en % de F, si l'on calcule la force en utilisant $\widetilde{F}$ au lieu d'utiliser F donnée sous (1) ?
Remarque : répondre à la question ii) en utilisant $R = 6370$ kilomètres.

Problème 4 (17 points)

On cherche à prédire les dépenses des ménages suisses en fonction de leur revenu. L'Office Fédéral de la Statistique fournit les résultats suivants (en francs suisses) pour les différentes régions de Suisse pendant la période 2009-2011 :

Région	**Revenu**	**Dépenses**
Région lémanique	6630	5450
Espace Mittelland	6210	5130
Suisse Nord-Ouest	6790	5350
Zurich	7460	5970
Suisse orientale	6500	5100
Suisse centrale	7290	5590
Tessin	6130	5020

Soit x le revenu et y les dépenses.

a) **Modèle simplifié**

On suppose que le taux de variation des dépenses y en fonction du revenu x est constant. Soit α cette constante.

i) Déterminer une équation différentielle satisfaite par y et prouver que les dépenses s'expriment en fonction du revenu par $y = \alpha x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

ii) En utilisant le module statistique de la TI-Nspire, déterminer à l'aide d'un ajustement linéaire les paramètres α et c du modèle $y = \alpha x + c$.

iii) A l'aide du modèle simplifié, estimer le **revenu** (arrondi à 10 francs près) d'un ménage suisse dont les dépenses s'élèvent à 6220 francs.

b) **Modèle log-log**

Dans le modèle log-log, on suppose que la courbe $y = f(x)$ des dépenses en fonction du revenu satisfait la propriété suivante : en tout point M de cette courbe, l'ordonnée à l'origine de la tangente en M est un multiple constant de la deuxième coordonnée de M. Soit β cette constante.

i) Déterminer une équation différentielle satisfaite par y et prouver, sans utiliser la commande `deSolve` de la TI-Nspire, que $\ln(y) = (1-\beta)\ln(x) + d$, où $d \in \mathbb{R}$.

ii) En utilisant le module statistique de la TI-Nspire, déterminer à l'aide d'un ajustement linéaire les paramètres β et d du modèle $\ln(y) = (1-\beta)\ln(x) + d$.

iii) A l'aide du modèle log-log, estimer le **revenu** (arrondi à 10 francs près) d'un ménage suisse dont les dépenses s'élèvent à 6220 francs.