Séries numériques - chapitre 1 et 2

Série A | Série B

Exercice 1. (1.5+2.5+2=6 pts)

a) Série A : critère de la racine (Cauchy) :

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{4k}{3k+1}\right)^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{4k}{3k+1}=\frac{4}{3}>1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série divergente

Série B : critère de la racine (Cauchy) :

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{4k}{5k+1}\right)^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{4k}{5k+1}=\frac{4}{5}<1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente

b) Série A : critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{(k+1)^2}{e^{k+1}}}{\frac{k^2}{e^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2\cdot e}=\frac{1}{e}<1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente

Série B : critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{e^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{e^k}{k^2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2\cdot e}{(k+1)^2}=e>1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série divergente

c) Série A : critère d'équivalence :

Soit $u_k=\dfrac{k+1}{k^2-k+1}$ et $v_k=\dfrac{1}{k}$ série de Riemann divergente.

$$L=\lim_{k\to+\infty}\frac{u_k}{v_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^2}=1\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série de terme u_k aussi divergente

Série B : critère d'équivalence :

Soit $u_k=\dfrac{k+2}{k^2+k-1}$ et $v_k=\dfrac{1}{k}$ série de Riemann divergente.

$$L=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+2}{k^2+k-1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{k^2}=1\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série de terme u_k aussi divergente

Exercice 2. (3+3=6 pts)

a) Série A : critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2}{k+1}=0<1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente

Série B : critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{3}{k+1}=0<1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente

b) Série A : critère d'équivalence (ou comparaison) :

Soit $u_k=\dfrac{(k+2)(k+3)}{k^2(k-1)(k+4)}$ et $v_k=\dfrac{1}{k^2}$ série de Riemann convergente.

$$L=\lim_{k\to+\infty}\frac{u_k}{v_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^4}{k^4}=1\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série de terme u_k aussi convergente

Série B : critère d'équivalence (ou comparaison) :

Soit $u_k=\dfrac{(k+3)(k+4)}{k^3(k-2)(k+1)}$ et $v_k=\dfrac{1}{k^3}$ série de Riemann convergente.

$$L=\lim_{k\to+\infty}\frac{u_k}{v_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^5}{k^5}=1\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série de terme u_k aussi convergente

Exercice 3. (3+1=4 pts)

a) critère de Leibniz : soit $u_k = \dfrac{1}{3^k}$

- $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{3^{k+1}} - \dfrac{1}{3^k} = \dfrac{1-3}{3^{k+1}} < 0$
- $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{3^k} = 0$

$\Rightarrow$ série convergente

b) série géométrique de raison 1/3 ou critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{3^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$

la série de terme $|u_k| = \dfrac{1}{3^k}$ converge, donc la série de terme $(-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{3^k}$ est absolument convergente.

critère de Leibniz : soit $u_k = \dfrac{1}{3^k}$

- $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{3^{k+1}} - \dfrac{1}{3^k} = \dfrac{1-3}{3^{k+1}} < 0$
- $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{3^k} = 0$

$\Rightarrow$ série convergente

série géométrique de raison 1/3 ou critère du quotient (d'Alembert) :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{3^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$

la série de terme $|u_k| = \dfrac{1}{3^k}$ converge, donc la série de terme $(-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{3^k}$ est absolument convergente.

Exercice 4. (1+3=4 pts)

a)

$$S_6 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} = \frac{15}{8} = 1.875 \text{ (valeur par défaut)}$$

b) cette série à termes positifs est convergente, car elle admet la série géométrique de raison 2/3 comme majorante convergente :
Estimation de l'erreur commise :

$$R_6 < \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \cong 0.263 < 0.264$$

$\Rightarrow S \in]1.875\,;2.139[$ ou $S = 2.007 \pm 0.132$
