Séries entières - chapitre 3

Série A

Exercice 1. (5 pts)

Terme général de la série :

$$\frac{1}{k^2}\,x^k$$

• Rayon de convergence r :

$$r = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente si $|x| < 1$

• $x = 1 \Rightarrow$ la série de Riemann $\frac{1}{k^2}$ converge

• $x = -1 \Rightarrow$ la série $-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ converge par le critère de Leibniz

$\Rightarrow$ Domaine de convergence de la série est :

$$[\,-1\,;\,1\,]$$

Série B

Terme général de la série :

$$\frac{1}{k^3}\,x^k$$

• Rayon de convergence r :

$$r = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{(k+1)^3}}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^3}{k^3} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ série convergente si $|x| < 1$

• $x = 1 \Rightarrow$ la série de Riemann $\frac{1}{k^3}$ converge

• $x = -1 \Rightarrow$ la série $-1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$ converge par le critère de Leibniz

$\Rightarrow$ Domaine de convergence de la série est :

$$[\,-1\,;\,1\,]$$

Exercice 2. (4+2=6 pts)

a) Développement limité d'ordre 3 au voisinage de $a = 1$ de $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$:

- $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f(1) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -3$
- $f''(x) = \dfrac{12}{x^5} \Rightarrow f''(1) = 12$
- $f^{(3)}(x) = -\dfrac{60}{x^6} \Rightarrow f^{(3)}(1) = -60$

$\Rightarrow p_3(x) = 1 - \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 - \frac{60}{3!}(x-1)^3 =$

$= 1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3$

b) Estimation du reste d'ordre 3 dans l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right]$:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{360}{x^7} \Rightarrow f^{(4)}(\frac{1}{2}) = 46'080$

$\Rightarrow |R_3(x)| \leq \dfrac{|x-1|^4}{4!} \sup\limits_{t \in I} |f^{(4)}(t)| = 1920(x-1)^4$

Développement limité d'ordre 3 au voisinage de $a = 1$ de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f(1) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'(1) = -2$
- $f''(x) = \dfrac{6}{x^4} \Rightarrow f''(1) = 6$
- $f^{(3)}(x) = -\dfrac{24}{x^5} \Rightarrow f^{(3)}(1) = -24$

$\Rightarrow p_3(x) = 1 - \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 - \frac{24}{3!}(x-1)^3 =$

$= 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3$

Estimation du reste d'ordre 3 dans l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right]$:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{120}{x^6} \Rightarrow f^{(4)}(\frac{1}{2}) = 7'680$

$\Rightarrow |R_3(x)| \leq \dfrac{|x-1|^4}{4!} \sup\limits_{t \in I} |f^{(4)}(t)| = 320(x-1)^4$

Exercice 3. (4 pts)

- $g(x) = \sqrt[3]{8+x} \Rightarrow g(0) = 2$
- $g'(x) = [(8+x)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow g'(0) = \dfrac{1}{12}$
- $g''(x) = [\frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}}]' = -\frac{2}{9}(8+x)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow g''(0) = -\dfrac{1}{144}$
- $g^{(3)}(x) = [-\frac{2}{9}(8+x)^{-\frac{5}{3}}]' = \frac{10}{27}(8+x)^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow g^{(3)}(0) = \dfrac{5}{3456}$
- $\ldots$

$$\Rightarrow g(x) = 2 + \frac{1}{12\cdot 1!}\cdot x - \frac{1}{144\cdot 2!}\cdot x^2 + \frac{5}{3456\cdot 3!}\cdot x^3 + \ldots$$

Exercice 4. (3+2=5 pts)

a) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

par substitution :

$$\Rightarrow \cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{9\,x^2}{2!} + \frac{81\,x^4}{4!} - \frac{729\,x^6}{6!} + \ldots$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{9\,x^2}{2!} - \frac{81\,x^4}{4!} + \ldots}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{9}{2} - \frac{81\,x^2}{4!} + \ldots\right) = \frac{9}{2}$$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

par substitution :

$$\cos(5x) = 1 - \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \frac{(5x)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{25\,x^2}{2!} + \frac{625\,x^4}{4!} - \frac{15'625\,x^6}{6!} + \ldots$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(5x)}{x^2} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{25\,x^2}{2!} - \frac{625\,x^4}{4!} + \ldots}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{25}{2} - \frac{625\,x^2}{4!} + \ldots\right) = \frac{25}{2}$$
