Mathématiques

ANALYSE

3ème année Maturité
niveau standard

GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Avant-propos

Mesdames et messieurs, Je vous signale tout de suite que je vais parler pour ne rien dire. Oh ! je sais, vous pensez « S'il n'a rien à dire, il ferait mieux de se taire ! » Évidemment ! Mais c'est trop facile ! Vous voudriez que je fasse comme tous ceux qui n'ont rien à dire et qui le gardent pour eux ? Eh bien, non ! Mesdames et messieurs, moi, lorsque je n'ai rien à dire, je veux qu'on le sache ! Je veux en faire profiter les autres ! Et si, vous-mêmes, mesdames et messieurs, vous n'avez rien à dire, eh bien, on en parle, on en discute ! Je ne suis pas ennemi du colloque. Mais, me direz-vous, si on parle pour ne rien dire, de quoi allons-nous parler ? Eh bien, de rien ! De rien ! Car rien… ce n'est pas rien ! La preuve ? C'est qu'on peut le soustraire. Par exemple, rien moins rien égale moins que rien ! Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose ! On peut acheter quelque chose avec rien ! En le multipliant ! Une fois rien … c'est rien ! Deux fois rien … ce n'est pas beaucoup ! Mais trois fois rien !… Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose… et pour pas cher ! Maintenant, si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien : rien multiplié par rien égale rien, trois multiplié par trois égale neuf, cela fait donc rien de neuf !

Raymond Devos

Dessin ci-contre de Philippe Geluck

6^{e} édition, La Tour-de-Peilz, juillet 2022

Introduction

Les mathématiques ont longtemps évolué en lien avec d'autres domaines du savoir.

C'est ainsi que beaucoup de concepts mathématiques ont été développés dans le but de résoudre certains problèmes ou d'en simplifier la solution ;

- l'algèbre élémentaire fut créée pour résoudre des problèmes simples de physique ;
- la géométrie trouve son origine dans le besoin de mesurer et de comparer des surfaces ;
- la trigonométrie, introduite par les astronomes, rendait l'homme capable de déterminer les grandeurs et les distances des corps célestes.

On pourrait ainsi multiplier les exemples. Ce constat s'applique un peu moins pour les mathématiques contemporaines, puisque certains concepts sont introduits pour eux-mêmes, sans qu'on y trouve nécessairement des applications pratiques. Mais l'histoire nous a montré que certains de ces concepts ont pu répondre à des demandes postérieures à leur création (par exemples les séries de Fourier qui ont pu être utilisées par Einstein une vingtaine d'années après leur « création »).

Le **calcul différentiel et intégral** trouve son origine dans les travaux faits indépendamment et presque simultanément par Isaac Newton (1642-1727) et Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716). Au cours du XVIIe siècle, alors que l'on peut considérer que la science moderne prend naissance, un grand nombre de problèmes nouveaux se posent. Les mathématiciens de l'époque étaient les physiciens, les astronomes et les savants, qui, eux-mêmes, cherchaient les réponses mathématiques aux problèmes qu'ils se posaient.

Quatre grands problèmes ont préoccupé les savants du XVIIe siècle, ce qui les conduisit à des méthodes que l'on regroupe aujourd'hui sous le terme de calcul différentiel et intégral.

1. La théorie héliocentrique de Copernic et les travaux complémentaires de Kepler et de Galilée sont à l'origine de la révolution scientifique du XVIIe siècle. On cherche alors à étudier le mouvement des planètes, à comprendre leur trajectoire, à connaître les courbes décrites, les vitesses, et les accélérations des corps célestes.
2. Le deuxième grand problème est la détermination de tangentes à diverses courbes. La question présente un intérêt du point de vue géométrique, mais sa signification la plus profonde est que la tangente à une courbe en un point représente la « direction de la courbe » en ce point. Ce concept permettra l'étude de la trajectoire d'un projectile, la connaissance de l'angle selon lequel il touchera la cible, la détermination de la direction d'un rayon lumineux après que le rayon aura frappé la surface d'une lentille, et l'étude du comportement des rayons lumineux . . . .
3. Un troisième problème qui préoccupe les savants de cette époque est la recherche de maximums et de minimums. On veut notamment connaître la trajectoire des boulets

de canon, leur portée maximale, l'angle d'élévation du canon pour avoir cette portée maximale. On s'intéresse également à la distance minimale ou maximale entre une planète et le soleil dans leur mouvement. Quelques problèmes de maximums et de minimums peuvent être résolus par l'algèbre ou la géométrie élémentaire, mais les problèmes les plus importants sont en dehors du contexte de ces disciplines.

4. Le quatrième grand problème concerne les longueurs de courbes, les aires et les volumes de figures limitées par des courbes et des surfaces quelconques. Les mathématiques élémentaires suffisent pour calculer les longueurs, les aires et les volumes de figures limitées par des segments de droites, ou des portions de plans. Mais lors de l'étude des courbes et des surfaces incurvées, la géométrie élémentaire est désarmée.

Ainsi, ces grandes questions sont à l'origine du calcul différentiel et intégral. Ce calcul est très actuel, sinon il n'aurait qu'un intérêt historique ou purement culturel. Il est devenu un outil de base pour aborder tous les secteurs de spécialisation des connaissances modernes. Il utilise l'algèbre, la géométrie, la géométrie analytique et la trigonométrie en plus des deux concepts fondamentaux que sont la dérivée et l'intégrale. Bref, le calcul différentiel et intégral s'est avéré être le filon le plus riche que les mathématiques aient jamais découvert.

Comme pour tous les grands domaines du savoir, cette théorie n'est pas l'oeuvre d'un seul homme. Nous allons en nommer ici quelques-uns sans toutefois détailler leur contribution à cette science. Au XVIIe siècle, Pierre de Fermat, René Descartes, Blaise Pascal, Gilles Personne de Roberval, le R.P. Bonaventura Cavalieri, James Gregory, John Wallis, Isaac Newton et Wilhelm Gottfried Leibniz y ont tous contribué. Newton et Leibniz sont le plus souvent mentionnés comme les créateurs du calcul différentiel et intégral. Sans vouloir déprécier ces deux savants, disons en toute honnêteté (c'est l'expression même de Newton) qu'ils ont basé leurs travaux sur les épaules de géants. Leur grand mérite a été de voir plus clairement que leurs prédécesseurs le contexte général des méthodes qui furent introduites graduellement. Précisons aussi qu'ils ajoutèrent plusieurs théorèmes et processus à cet amas de connaissances.

Le calcul différentiel et intégral n'était pas encore complet. Au XVIIIe siècle, de nouveaux résultats furent apportés par les frères Jacques et Jean Bernoulli, le français Michel Rolle, l'anglais Brook Taylor, l'écossais Colin McLaurin, le suisse Leonhard Euler, Jean Le Rond d'Alembert, le comte Joseph Louis de Lagrange, Gaspard Monge, Adrien Marie Legendre, le baron Joseph Fourier et Pierre-Simon Laplace. L'éclaircissement final du calcul fut donné au XIXe siècle par plusieurs autres mathématiciens dont Bernhard Bolzano, le baron Augustin Cauchy, Joseph Liouville, Émile Picard, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, Carl Gustav Jacobi, le norvégien Niels Henrik Abel et les allemands Bernhard Riemann et Karl Weierstrass.

Chapitre 1

Intégrales

1.1 Primitives et intégrales indéfinies

Soit la fonction F définie par $F(x) = x^2$.

Sa dérivée f vaut $f(x) = F'(x) = 2x$.

Supposons que l'on ne connaisse que la dérivée f de la fonction F. Est-il possible de retrouver la fonction de départ F ?

Cette recherche de la fonction dont on connaît la dérivée est appelée **recherche d'une primitive**.

Primitives

Une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 1.1.

La recherche de primitive apparaît comme l'opération réciproque de la dérivation

$$\begin{aligned} y = f(x) &\xrightarrow{\text{dérivée}} y = f'(x) \\ y = G(x) &\xleftarrow{\text{primitive}} y = g(x) \end{aligned}$$

Exemple 1.1.

En s'appuyant sur la connaissance des règles de dérivation, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 6x^2$

b) $g(x) = x^2 - 5x$

Remarquons que la fonction $f(x) = 2x$ possède une infinité de primitives.

En effet, la dérivée d'une constante étant nulle, on constate que $F_1(x) = x^2+1$ et $F_2(x) = x^2-5$ sont des primitives de f. Toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2 + c$, où c est une constante.

On parle d'intégrale indéfinie de $f(x) = 2x$ et on note $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$.

Intégrale indéfinie d'une fonction continue

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les fonctions G définies par

$$G(x) = F(x) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in I$, représentent toutes les primitives de f sur I.

L'**intégrale indéfinie** de la fonction f se note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et représente l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f.

Remarque 1.2.

a) L'adjectif *indéfinie* se rapporte au fait que $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ représente une *famille* de primitives et non pas une certaine fonction bien précise.

b) Dans $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$, le symbole $\displaystyle\int$ est le **signe d'intégration**, f est la **fonction à intégrer**, et x est la **variable d'intégration**.

c) Dans l'égalité $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$, c est la **constante d'intégration**.

d) Au cas où la variable d'intégration est t nous écrirons $\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + c$.

Exemple 1.2.

En s'appuyant sur la connaissance des règles de dérivation, déterminer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int (4x^3 + 5x)\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x =$

Propriétés de l'intégrale indéfinie

1) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\mathrm{d}x \;+\int g(x)\mathrm{d}x$

Attention : $\displaystyle\int [f(x)\cdot g(x)]\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{FAUX}} \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)$

2) $\displaystyle\int \alpha\cdot f(x)\mathrm{d}x \;=\; \alpha\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$ si α est un nombre réel.

Attention : $\displaystyle\int [f(x)\cdot g(x)]\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{FAUX}} f(x)\cdot\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)$ si f **non constante**.

3) $\displaystyle\int x^m\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}+c$ si $m\neq -1$

Exemple 1.3.

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{2}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int x(x^2-2)\,\mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x =$

Primitives d'une composée

On déduit de la règle de dérivation d'une composée $(F(u))' = F'(u) \cdot u'$ les règles suivantes :

1) $\displaystyle\int f(u(x)) \cdot u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + c$ où F est une primitive de f.

$$\textbf{Moyen mnémotechnique : } \int f(u) \cdot \underbrace{u'\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = F(u) + c$$

2) **Cas particulier :**
$\displaystyle\int u(x)^m \cdot u'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}u(x)^{m+1} + c$ si $m \neq -1$.

$$\textbf{Moyen mnémotechnique : } \int u^m \cdot \underbrace{u'\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \frac{1}{m+1}u^{m+1} + c \qquad \text{si } m \neq -1$$

Attention : $\displaystyle\int u(x)^m\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{FAUX}} \frac{1}{m+1}u(x)^{m+1} + c$ si $u'(x) \neq 1$.

Exemple 1.4.

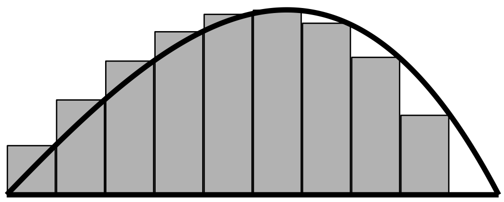
a) $\displaystyle\int x^2(5 - x^3)^7\mathrm{d}x =$

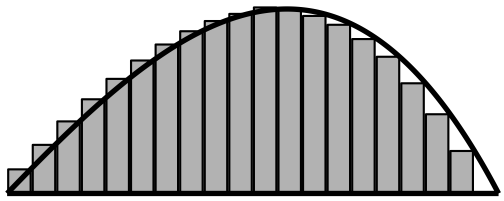
b) $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int \sin(3x)\mathrm{d}x =$

1.2 Intégrales définies

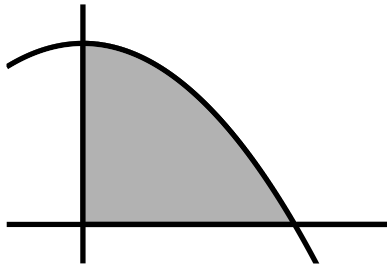
Pour calculer l'aire d'une surface bornée par une courbe, on utilise la limite d'une somme de rectangles juxtaposés.





Exemple 1.5.

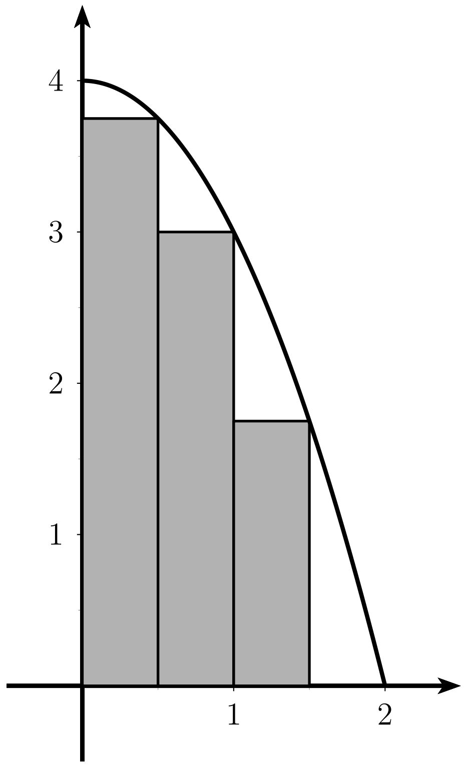
On souhaite calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé dans le premier quadrant et borné par la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ et les axes Ox et Oy.

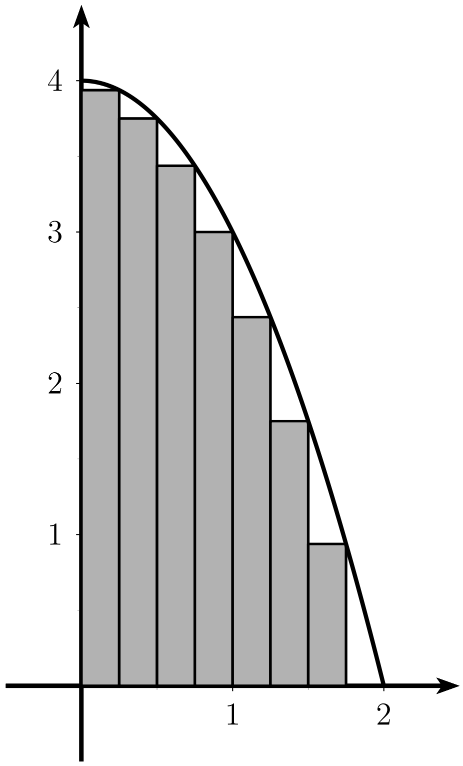


Voici deux manières d'approcher cette aire. Calculer ces approximations.

a) Découpage de $[0; 2]$ en 4 parties égales

b) Découpage de $[0; 2]$ en 8 parties égales





En découpant l'intervalle $[0; 2]$ en n parties égales et en calculant la limite quand n tend vers l'infini de la somme des aires des n rectangles ainsi obtenus, on peut déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$. Il vaut $\dfrac{16}{3} \cong 5.33$ [u^2 (unités au carré)].

1.2.1 Intégrale définie : somme de Riemann

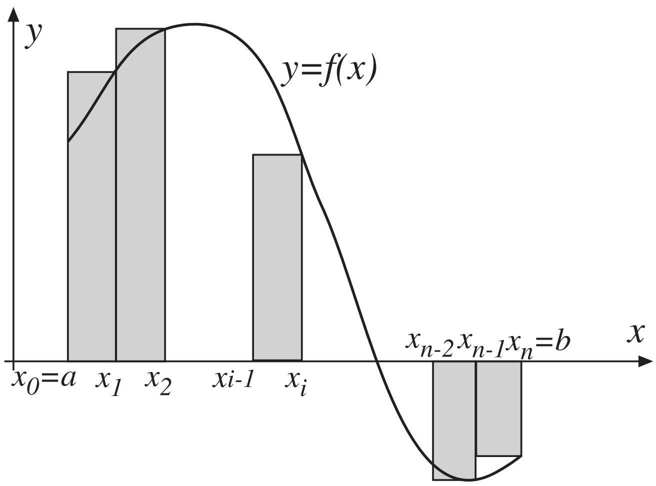
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

D'une manière générale (indépendamment du calcul d'aire), la quantité

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x\right)$$
$$\text{où } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ et } x_i = a + i\cdot\Delta x$$

est appelée **intégrale définie** (ou simplement **intégrale**) de la fonction f de a à b.

Elle est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 1.3.

a) On peut prouver que l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe toujours si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$.

b) a et b sont les **bornes d'intégration**, x est la **variable d'intégration**.

c) $\mathrm{d}x$ est un symbole insécable (on ne peut pas séparer le d du x). Il faut le considérer comme un résidu du «Δx » issu du calcul de limite. $\mathrm{d}x$ indique également que l'on intègre relativement à la variable x.

d) L'intégrale définie ne dépend pas du nom de la variable d'intégration :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

e) Dans la définition $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x\right)$,

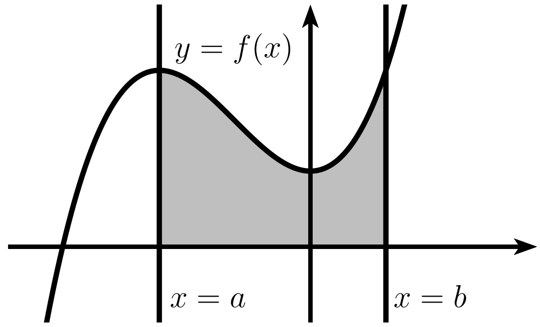
$$f(x_i)\cdot\Delta x = \begin{cases} \text{aire du rectangle grisé si } f(x_i) > 0 \\ -\text{aire du rectangle grisé si } f(x_i) < 0 \end{cases}$$

1.2.2 Interprétation géométrique de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

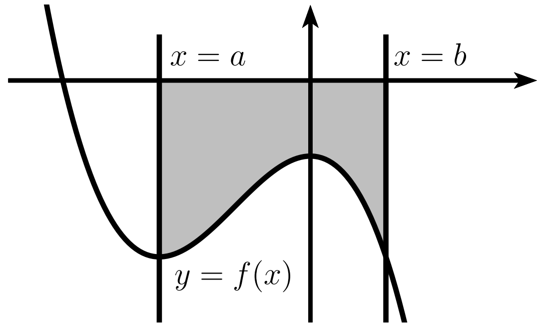
Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

A) *f* positive sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$



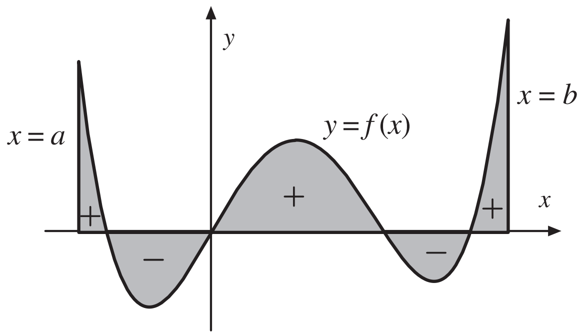
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ **aire géométrique** de $\mathcal{D}$.

B) *f* négative sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ **- aire géométrique** de $\mathcal{D}$.

C) *f* change de signe sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ **somme des aires géométriques** des parties du domaine $\mathcal{D}$, **munies chacune d'un signe**.
Les aires des parties de $\mathcal{D}$ situées au-dessus de l'axe Ox sont comptées positivement, les autres négativement.

On dit que l'intégrale définie fournit l'**aire algébrique** du domaine $\mathcal{D}$.

Exemple 1.6.

Calculer $\int_{-1}^{2}(x-1)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-1}^{a}(x-1)\,\mathrm{d}x$ $(a \geq 1)$ en utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale définie.

1.2.3 Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

1) La fonction $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in [a; b]$$

est la primitive de f sur $[a; b]$ telle que $F(a) = 0$.

2) Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Notation : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

1.2.4 Propriétés de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

a) On généralise au cas où la borne inférieure de l'intégrale est plus grande que la borne supérieure :

Si $a < b$: $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}$, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple 1.7.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\mathrm{d}x =$

1.3 Exercices

1.1

Calculer toutes les primitives des fonctions f définies par les expressions ci-dessous :

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = x^2 - 2x$

d) $f(x) = 4x^3 - 2x^2$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

f) $f(x) = 3x^2 + x + 2$

g) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 3$

h) $f(x) = x^2(2x - 5)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{-5}{\sqrt[3]{x}}$

l) $f(x) = 2\sin(x)$

1.2

Calculer toutes les primitives des fonctions f définies par les expressions ci-dessous :

a) $f(x) = x \cdot (x^2 + 1)^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

c) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

d) $f(x) = \dfrac{2\,x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3}}$

e) $f(x) = \dfrac{7x}{\sqrt[4]{x^2 - 7}}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$

g) $f(x) = \cos(3\,x)$

h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

i) $f(x) = (2\,x^2 - 3)^2$

j) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 5)$

1.3

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \left(x^5 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3 - 3x - 1}{x^3}\right) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{(1 - 2x)^4}\right) \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{6x}}\right) \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int (x + 1)(x^2 + 2x + 1)^3 \, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)\, \mathrm{d}x$

1.4

Calculer toutes les primitives des trois fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x} \cdot (2x - 3)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

c) $f(x) = (2\,x - 5)\,(3\,x + 1)$

1.5

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{5}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-7}{x-2} + c$

b) $\displaystyle\int \frac{6x}{(2-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2-1}{2-x^2} + c$

1.6

Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} (x^3+x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x^2+x}\cdot(2x+1)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{2}^{3} (3x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+7}}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{5x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_{1}^{2} 3x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^3+2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x(1+x^2)^2\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$

q) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,\mathrm{d}x$

1.7

a) Calculer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction F donnée par

$$F(x) = (ax+b)\sqrt{x^2-3}$$

soit une primitive de la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{4x^2+x-6}{\sqrt{x^2-3}}.$$

b) Calculer $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4x^2+x-6}{\sqrt{x^2-3}}\,\mathrm{d}x$.

1.8

Déterminer la fonction f sachant (f'' est la dérivée de f') que

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$ et $f(5) = 54$

b) $f''(x) = 2x, f'(2) = 8$ et $f(-2) = -8$

c) $f''(x) = (x+1)(x-2), f(1) = 8$ et $f(-1) = -4$

1.9

Démontrer que l'expression du déplacement d'un mobile en fonction du temps t est donnée par l'expression

$$s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

si le mobile a une vitesse initiale v_0, un déplacement initial s_0 et qu'il est soumis à une accélération constante a.

1.10

Un conducteur roule à 72 km/h au moment où il voit un accident qui survient devant lui à une distance de 80 m. S'il freine immédiatement, quelle décélération constante minimale doit-il imprimer à son véhicule pour s'arrêter à temps et éviter le choc ?

1.11

De l'eau s'échappe du fond d'une citerne avec un débit $D(t) = 500 - 4t$ litres par minute. La fuite débute au temps $t = 0$ et la citerne se vide totalement en 50 minutes.

a) Calculer le volume total d'eau qui a fui durant les 10 premières minutes.

b) Calculer la contenance de la citerne.

1.4 Solutions des exercices

1.1

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x + c$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + c$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$

d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$

e) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + c$

f) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

g) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 3x + c$

h) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + c$

i) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + c$

j) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

k) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

l) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\cos(x) + c$

1.2

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\cdot(x^2+1)^3 + c$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} + c$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3} + c$

d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x^2+x+3} + c$

e) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3}\sqrt[4]{(x^2-7)^3} + c$

f) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-2x)^2} + c$

g) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\sin(3x) + c$

h) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+\sin(x)} + c$

i) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x + c$

j) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

1.3

a) $\displaystyle\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{9}x^3 + c$

b) $\displaystyle x + \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$

c) $\displaystyle\frac{1}{2(1-2x)^3} + c$

d) $\displaystyle\frac{1}{3}\sqrt{6x} + c$

e) $\displaystyle\frac{1}{8}(x^2+2x+1)^4 + c$

f) $\displaystyle\frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

1.4

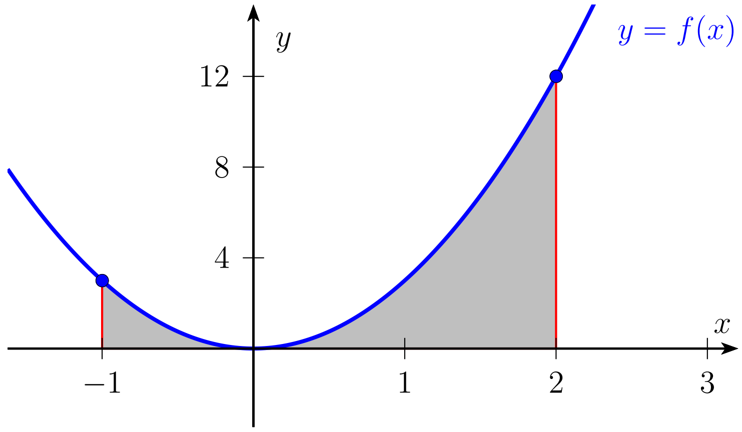
a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^2-3x)^{\frac{1}{3}}}_{u^{\frac{1}{3}}(x)}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{u'(x)} = \frac{3}{4}\cdot(x^2-3x)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(x^2-3x)^4} + c \quad (c\in\mathbb{R})$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} - 2\sqrt{1-x} + c \qquad (c\in\mathbb{R})$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x + c \qquad (c\in\mathbb{R})$

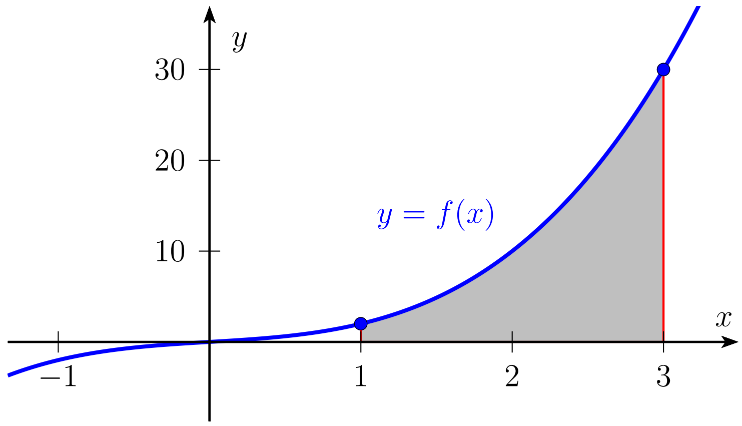
1.6

a)



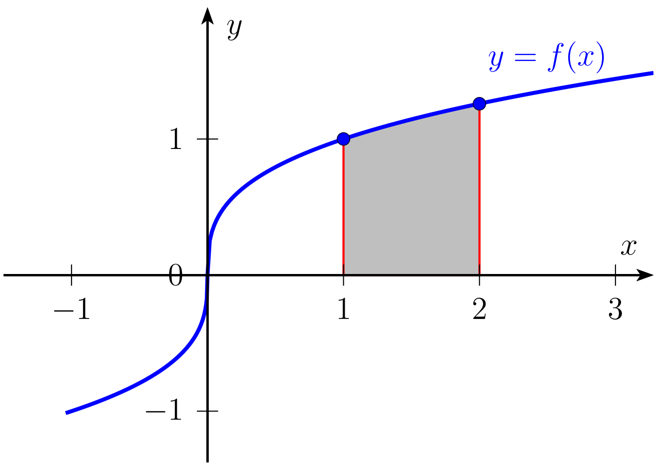
$$\int_{-1}^{2} 3x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{-1}^{2} = 8 + 1 = 9$$

b)



$$\int_{1}^{3} (x^3 + x) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3} = \frac{81}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 24$$

c)



$$\int_{1}^{2} x^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{1}^{2} = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} = \frac{6\sqrt[3]{2} - 3}{4}$$

d) $2(\sqrt{2}-1)$

e) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

f) $3\sqrt{2}-3$

g) 28

h) 0

i) 0

j) $3\sqrt{3}$

k) $\dfrac{5}{2}$

l) $\dfrac{1}{6}$

m) $\dfrac{9}{16}$

n) $-\dfrac{7}{3}$

o) $\sqrt{2}$

p) 0

q) $\dfrac{1}{2}$

1.7

a) $a = 2 \qquad b = 1$

b) $7\sqrt{6}-5$

1.8

a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x + \frac{8}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{37}{6}x + \frac{35}{12}$

1.10

La décélération minimale est de 2.5 m/s^2

1.11

a) 4’800 litres

b) 20’000 litres

Chapitre 2

Applications de l'intégrale

2.1 Calculs d'aire

L'interprétation géométrique de l'intégrale définie permet de calculer l'aire d'un domaine limité par des graphes de fonction.

Domaine limité par le graphe d'une fonction f et l'axe Ox

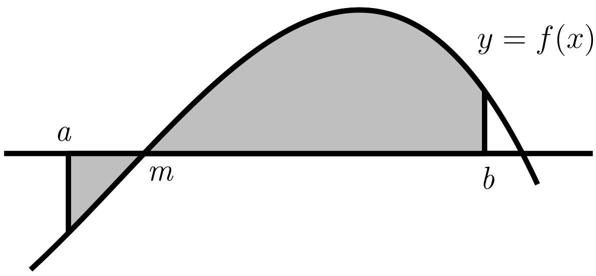
Soit le domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox, ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

On suppose que f change de signe en m dans $[a; b]$.

Si f est négative sur $[a; m]$ et est positive sur $[m; b]$, on calcule l'aire de $\mathcal{D}$ comme suit :

Aire $\mathcal{D} = -\displaystyle\int_a^m f(x)\mathrm{d}x + \int_m^b f(x)\mathrm{d}x =$

$= \left|\displaystyle\int_a^m f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_m^b f(x)\mathrm{d}x\right|$



Exemple 2.1.
Calculer l'aire géométrique du domaine limité par la courbe d'équation $y = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$ et les axes Ox et Oy.

Domaine limité par le graphe de deux fonctions

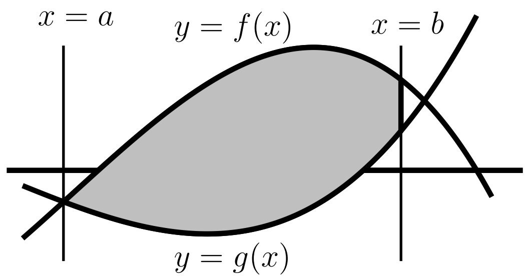
Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$, ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Supposons que les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ n'ont pas d'intersection dans $]a; b[$.

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, on calcule l'aire de $\mathcal{D}$ comme suit :

Aire $\mathcal{D} = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x =$

$$= \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x\right|$$



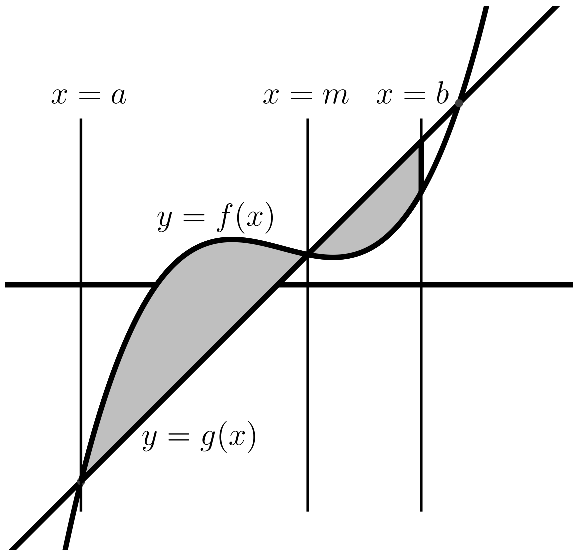
Supposons que les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ ont une intersection dans $]a; b[$ en $x = m$.

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; m]$ et $f(x) \leq g(x)$ sur $[m; b]$, on calcule l'aire de $\mathcal{D}$ par zone comme suit :

Aire $\mathcal{D} =$

$$= \int_a^m (f(x) - g(x))\mathrm{d}x + \int_m^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

$$= \left|\int_a^m (f(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| + \left|\int_m^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x\right|$$



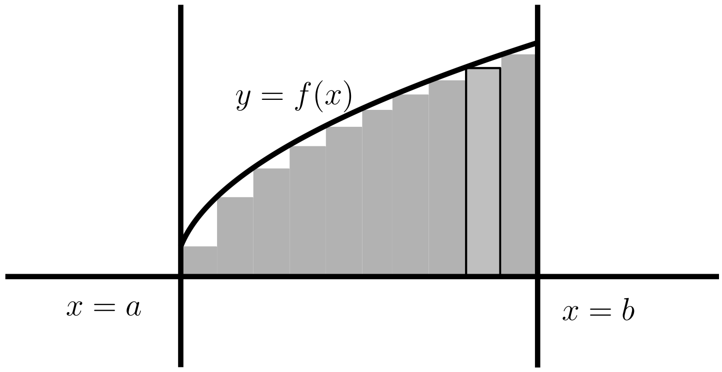
Exemple 2.2.

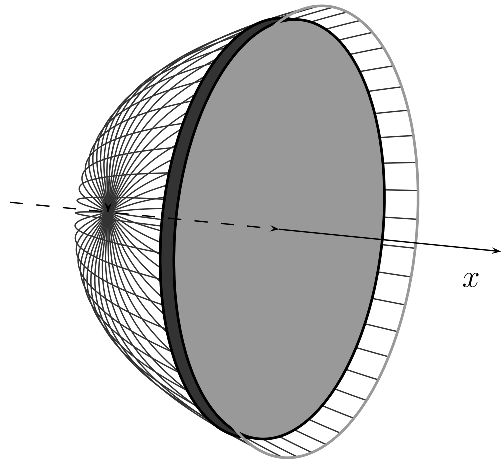
Calculer l'aire géométrique du domaine limité par les courbes d'équations $y = x^3 - 2x^2 + 3$ et $y = 5x - 3$.

2.2 Volume d'un solide de révolution

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $\mathcal{D}$ la surface plane limitée par l'axe Ox, la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$.

On fait « tourner » $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox et on obtient un solide de révolution dont on souhaite calculer le volume.





$$\text{Volume du solide révolution } V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

Exemple 2.3.

Calculer le volume d'une boule de rayon R.

2.3 Exercices

2.1

Calculer l'aire de la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par :

a) La courbe $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$, les verticales $x = 0$, $x = 1$ et l'axe Ox.

b) La courbe $y = f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ et l'axe Ox.

c) La courbe $y = f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ et l'axe Ox.

2.2

On considère la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par la courbe $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, les verticales $x = 1$, $x = 4$ et l'axe Ox.
Pour quelle valeur de a la droite $x = a$ partage $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire ?

2.3

Calculer l'aire de la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par :

a) Les courbes $y = f(x) = x^2 + 5$ et $y = g(x) = 2x^2 + 1$.

b) Les courbes $y = f(x) = x^2 + 1$ et $y = g(x) = x + 3$.

c) Les courbes $y = f(x) = x^2 - x$ et $y = g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

d) Les courbes $y = f(x) = x(6 - 2x^2)$ et $y = g(x) = x(2 - x^2)$.

e) Les courbes $y = f(x) = x^3$ et $y = g(x) = 3x^2 - 2x$.

2.4

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

2.5

La tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ en $T(1; 1)$ forme avec celle-ci et l'axe Ox une surface plane bornée. Calculer son aire.

2.6

On fait tourner le domaine $\mathcal{D}$ décrit au problème 2.1.a) autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.7

On considère la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par la courbe $y = \sqrt{x}$ et les verticales $x = 0$ et $x = 2$. On fait tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.8

On considère la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par la courbe $y = \sqrt{x+1}$ et les verticales $x = 0$ et $x = 3$. On fait tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.9

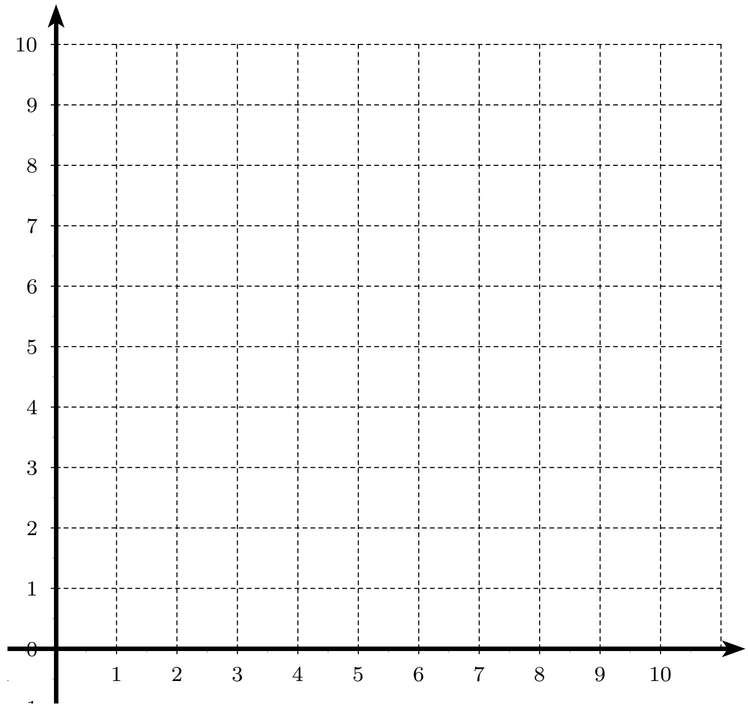
On considère la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par les courbes $y = \dfrac{1}{8}x^3$ et $y = 2x$. On fait tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.10

On considère la surface plane $\mathcal{D}$ bornée par la courbe $y = \sqrt{25 - x^2}$ et la droite $y = 3$. On fait tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.11

a) Esquisser ci-dessous les parties des graphes des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2$ et $g(x) = -x + 10$ situées dans le premier quadrant.



b) Déterminer par calculs les coordonnées du point A d'intersection des deux graphes situé dans le premier quadrant.

On considère domaine $\mathcal{D}_1$ borné fermé limité par le graphe de f, le graphe de g et l'axe Ox, ainsi que le domaine $\mathcal{D}_2$ borné fermé limité par le graphe de f, le graphe de g et l'axe Oy.

c) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$.

d) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$.

e) Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation de $\mathcal{D}_1$ autour de l'axe Ox.

f) Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation de $\mathcal{D}_2$ autour de l'axe Ox.

2.12

Les paraboles d'équations

$$y = 16 - x^2, \qquad y = (x-4)^2, \qquad y = -x^2 + 5x + 1$$

se coupent en

$$A(0;16), \qquad B\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right), \qquad C(3;7), \qquad D(4;0), \qquad E(5;1).$$

a) Faire un dessin.

b) Calculer l'aire du triangle curviligne ABC.

2.13

Calculer la valeur du paramètre réel positif a pour que la courbe d'équation $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ délimite avec l'axe Ox, dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6.

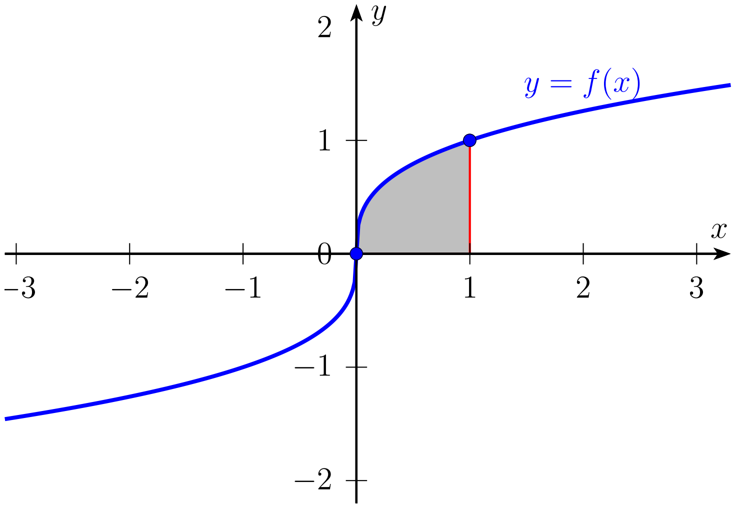
2.14

On considère la surface plane D bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 4 - x^2$. On fait tourner D autour de l'axe Ox. Calculer le volume du solide de révolution obtenu.

2.4 Solutions des exercices

2.1

a)



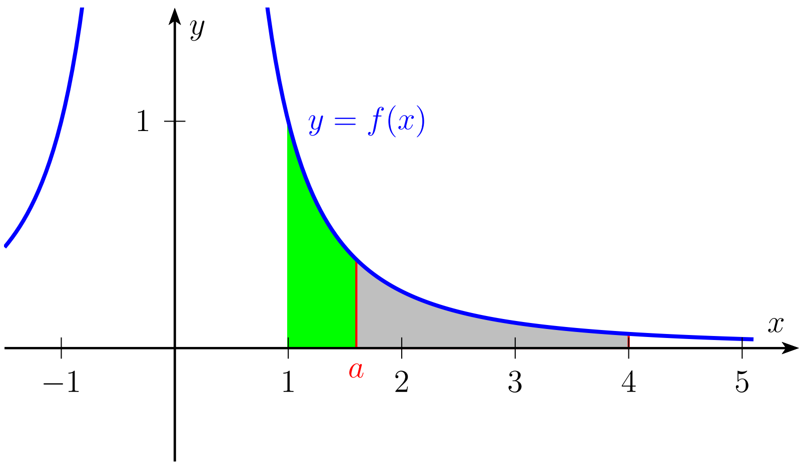
$$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{4}\,u^2$$

b) $\frac{37}{12}\,u^2$

c) $\frac{16}{3}\,u^2$

2.2

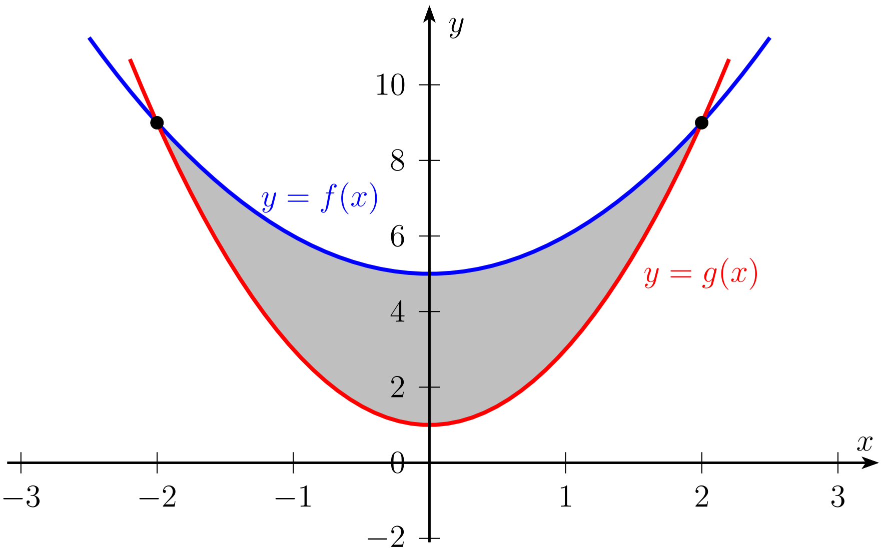
Aire de $D_4 = \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}\,u^2$



$$\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^a = -\frac{1}{a}+1 = \frac{3}{8}\,u^2 \qquad \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{5}{8} \qquad \Rightarrow a = \frac{8}{5}$$

2.3

a)

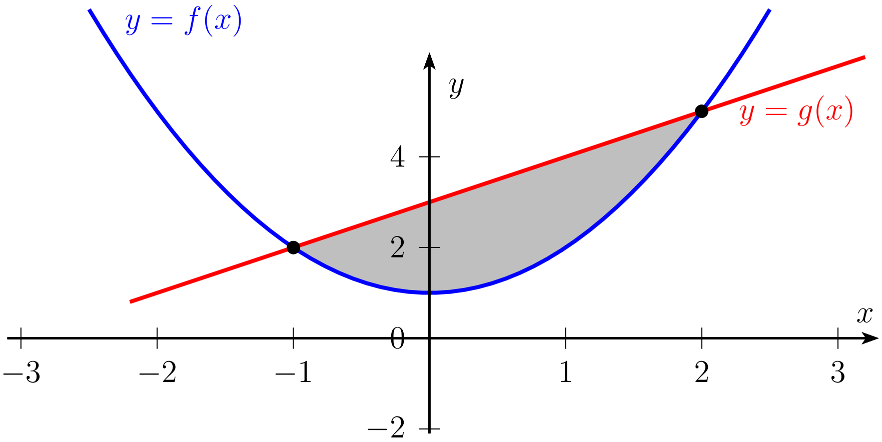


points d'intersection : $x^2 + 5 = 2x^2 + 1 \qquad \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow S = \{-2; 2\}$

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = (-\frac{8}{3} + 8) - (\frac{8}{3} - 8) = \frac{32}{3}$$

$\Rightarrow A = \dfrac{32}{3}\ u^2$

b)



points d'intersection : $x^2 + 1 = x + 3 \qquad \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow S = \{-1; 2\}$

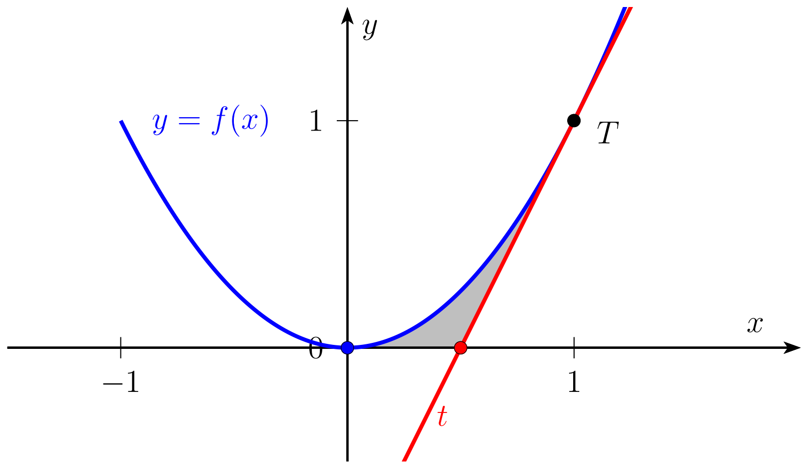
$$\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) = \dfrac{9}{2} \quad \Rightarrow A = \dfrac{9}{2}\ u^2$

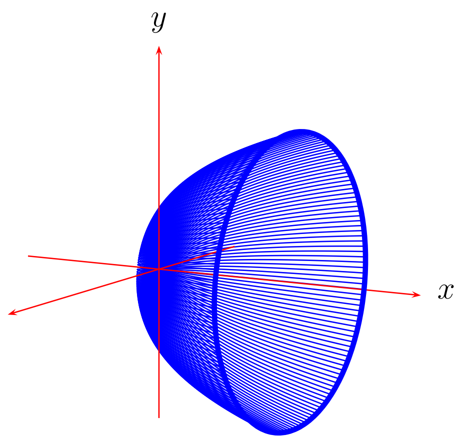
c) $\dfrac{71}{6}\ u^2$ d) $8\ u^2$ e) $\dfrac{1}{2}\ u^2$

2.4
$\frac{4}{3}$ [u^2]

2.5 $A = \frac{1}{12}\ u^2$



2.6
$V = \frac{3\pi}{5}\ u^3$

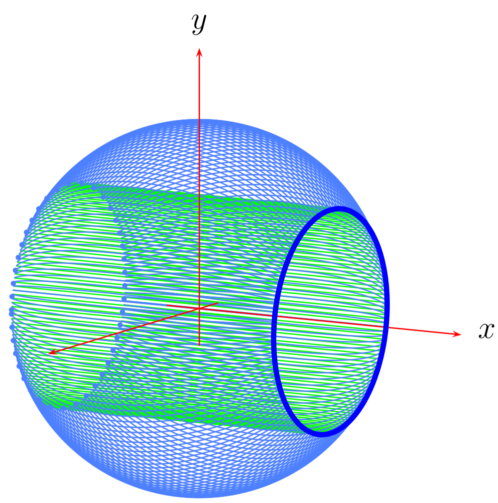


2.7 $V = 2\pi\ u^3$

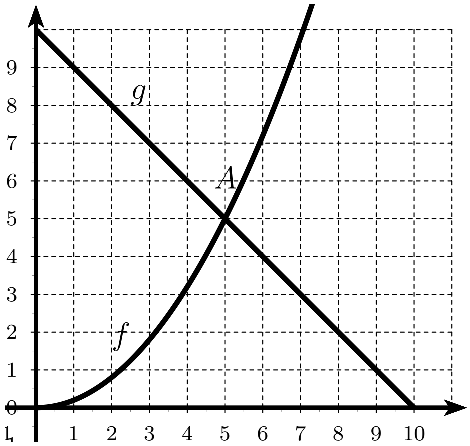
2.8 $V = \frac{15\pi}{2}\ u^3$

2.9 $V = \frac{2048\pi}{21}\ u^3$

2.10 $V = \frac{256\pi}{3}\ u^3$



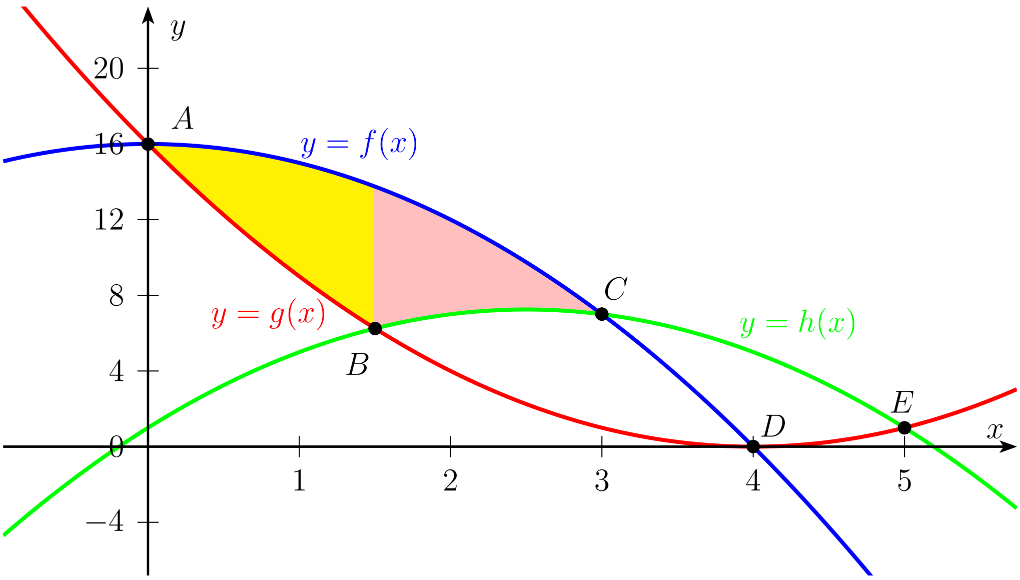
2.11

a) 

b) $A(5;5)$ c) $\frac{125}{6}$ [u^2] d) $\frac{175}{6}$ [u^2] e) $\frac{200\pi}{3}$ [u^3] f) $\frac{800\pi}{3}$ [u^3]

2.12

a)



b) aire du triangle curviligne $ABC = \frac{99}{8}\ u^2$

2.13 $a = 2\sqrt{2}$

2.14 $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}\ u^3$

Chapitre 3

Fonctions exponentielle et logarithme

3.1 Primitive de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Nous avons calculé au chapitre 1 les primitives de la fonction puissance $f(x) = x^m$ pour autant que $m \neq -1$:

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c \quad \text{si} \quad m \neq -1$$

Exemple 3.1.

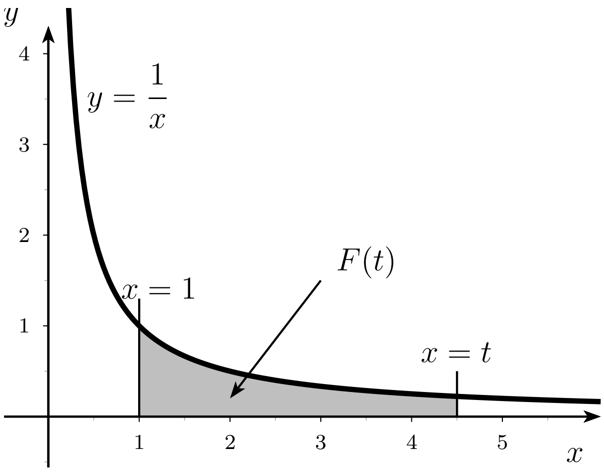
Calculer :

a) $\displaystyle\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x =$

A l'aide du théorème fondamental du calcul intégral (voir théorème § 1.2.3), on construit une primitive F de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}_+^*$$



Remarque 3.1.

- Si $t > 1$, $F(t)$ est égal à l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et les droites verticales $x = 1$ et $x = t$ (domaine grisé ci-dessus).
- Si $0 < t < 1$, $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$
  Donc si $0 < t < 1$, $F(t)$ est égal à moins l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Propriétés de la primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) La fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ vérifie les propriétés suivantes :

a) F est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ telle que $F(1) = 0$.

b) $F(t) = \ln(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^*$.

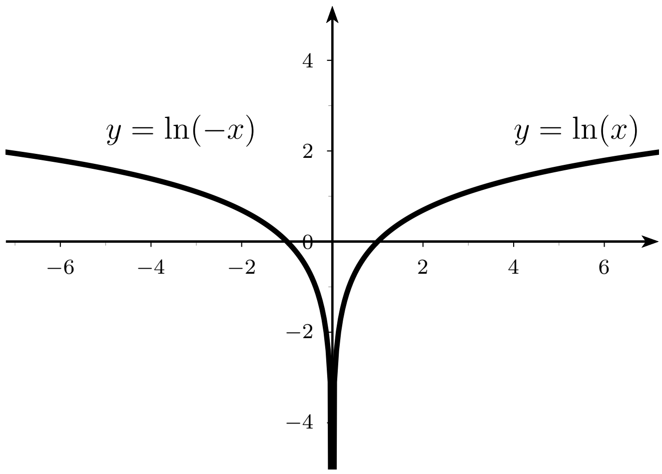
La fonction logarithme naturel (de base e) est donc une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

2) Pour obtenir une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, il faut considérer la fonction

$$\ln(\,|x|\,) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $(\ln(\,|x|\,))' = \frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(\,|x|\,) + c$



Exemple 3.2.

a) $\int \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x =$

b) $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$

3.2 Intégrale et logarithme naturel

- $F(x) = \ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $F(x) = \ln(|\,x\,|)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Intégrale d'une fonction puissance

$$\int x^m \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}x^{m+1} + c & \text{si } m \neq -1 \\ \displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|\,x\,|) + c & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

$$\int u^m \cdot u' \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}u^{m+1} + c & \text{si } m \neq -1 \\ \displaystyle\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x = \ln(|\,u\,|) + c & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

Exemple 3.3.
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{4x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x =$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-4x+2}{x^2}\,\mathrm{d}x =$

3.3 Primitive d'une fraction rationnelle

Nous allons déterminer la primitive d'une fraction rationnelle dans certains cas.

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{s(x)}$ une fraction rationnelle (quotient de polynômes).

Etape 1 : division euclidienne éventuelle

Si $\deg(p(x)) \geq \deg(s(x))$, on effectue d'abord une **division euclidienne** :

Si $q(x)$ et $r(x)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division de $p(x)$ par $s(x)$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)} \text{ avec } \deg(r(x)) < \ \deg(s(x))$$

Etape 2 : recherche des primitives

La recherche d'une primitive pour $f(x) = q(x) + \dfrac{r(x)}{s(x)}$ se fait via la recherche d'une primitive pour $q(x)$ (qui est un polynôme) et d'une primitive pour le quotient $\dfrac{r(x)}{s(x)}$.

Exemple 3.4.
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x-4}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x =$

3.4 Etude de la fonction logarithme naturel

Propriétés algébriques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+^*$

1) $\ln(1) = 0$
2) $\ln(e) = 1$
3) $\ln(e^x) = x$
4) $e^{\ln(u)} = u$
5) $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
6) $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
7) $\ln(u^x) = x \cdot \ln(u)$
8) $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$

Ensemble de définition

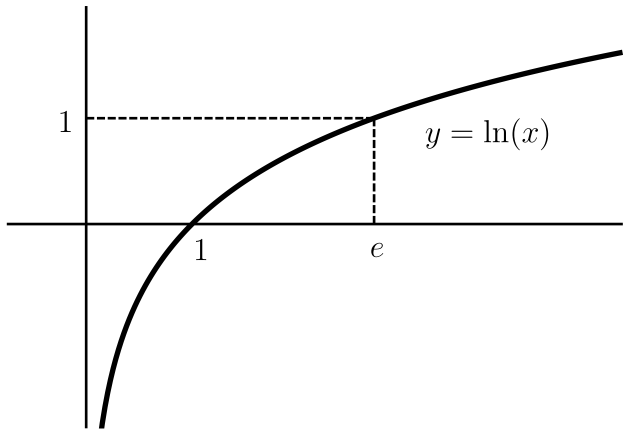
Attention : La fonction $\ln(x)$ n'est définie que si $x > 0$.

$ED = \mathbb{R}_+^*$

Signe

$\ln(x) = 0 \iff x = 1$

x		0		1	
$\ln(x)$	//////	‖	$-$	0	$+$



Limites

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$ ou « $\ln(0_+) = -\infty$ »

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ou « $\ln(+\infty) = +\infty$ »

Asymptote

Asymptote verticale d'équation $x = 0$

Dérivée

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln(u))' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple 3.5.

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \ln(3-x)$: ED, signe, asymptotes (AV et AH), croissance.

3.5 Etude de la fonction exponentielle de base e

La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est la réciproque de la fonction logarithme naturel :

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^* : \quad y = e^x \iff x = \ln(y)$$

Propriétés algébriques

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$

1) $\ln(e^x) = x$
2) $e^{\ln(u)} = u$
3) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
4) $(e^x)^y = e^{xy}$

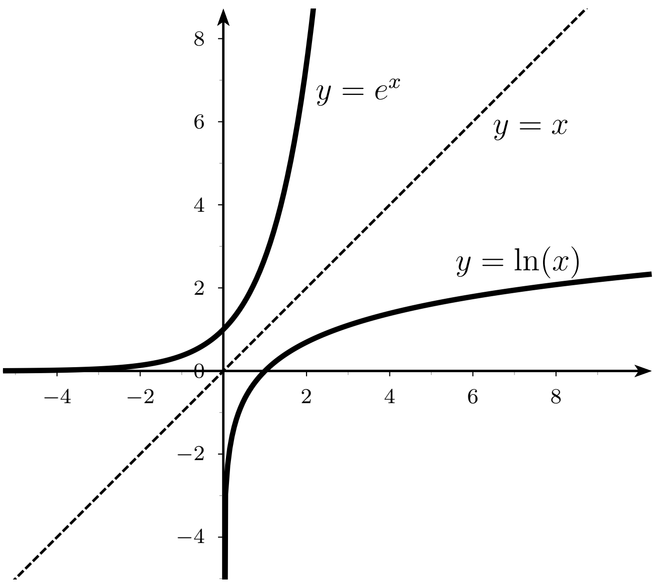
Ensemble de définition

$ED = \mathbb{R}$

Signe

Aucun zéro : $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x			
e^x	$+$	$+$	$+$



Limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ou « $e^{-\infty} = 0$ »

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ou « $e^{+\infty} = +\infty$ »

Asymptote

Asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$

Dérivée

$(e^x)' = e^x$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

Remarque 3.2.

La fonction exponentielle de base e étant la réciproque de la fonction logarithme naturel, leurs graphes sont symétriques relativement à la droite d'équation $y = x$, bissectrice des quadrants I et III (voir les représentations graphiques ci-dessus)

Exemple 3.6.

Etudier la fonction f définie par $f(x) = 1 - e^{2-x}$: ED, signe, asymptotes (AV et AH), croissance.

3.6 Intégrale et exponentielle

- $F(x) = e^x$ est une primitive de $f(x) = e^x$

On a donc

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int e^u \cdot u' \, \mathrm{d}x = e^u + c$$

Exemple 3.7.

Calculer les primitives suivantes.

a) $\int e^{2x-1} \, \mathrm{d}x =$

b) $\int x \cdot e^{2x^2+1} \, \mathrm{d}x =$

c) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x =$

3.7 Règle de l'Hospital (Bernoulli-l'Hospital)

La règle de l'Hospital est utile pour le calcul de limites en cas de forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Règle de l'Hospital

Soit $a \in \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert avec $a \in I \subset \mathbb{R}$.

Soit f et g deux fonctions définies dans I et satisfaisant les conditions suivantes :
1) f et g sont dérivables dans $I - \{a\}$.
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
3) g' ne s'annule pas dans $I - \{a\}$.
4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque 3.3.

La règle de L'Hospital reste valable si $a = \pm\infty$. On peut également l'utiliser dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », donc si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Exemple 3.8.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} =$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} =$

3.8 Etude d'une fonction comportant un logarithme

Exemple 3.9.

Etudier complètement la fonction $f(x) = \ln(\frac{x}{x-2})$: ED, signe, asymptotes, croissance, graphe.

3.9 Etude d'une fonction comportant une exponentielle

Exemple 3.10.

Etudier complètement la fonction $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

3.10 Exercices

3.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{3x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

3.2

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{3-2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+x-1}{2x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2-10}\,\mathrm{d}x$

3.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3+26x}{2x^2+9}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3-11x^2+7x+2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

3.4

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x^2+4x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{4x-2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

3.5

Calculer les dérivées des fonctions f suivantes. Donner $ED(f)$ et $ED(f')$.

a) $f(x) = \ln\left(x^2-1\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

c) $f(x) = \ln\left(x^3-3x^2\right)$

d) $f(x) = \ln\left[(4-x^2)^3\right]$

e) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$

f) $f(x) = x\cdot\ln(x)$

3.6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - x$. Etudier la variation de f, puis démontrer que l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3.7

Donner une équation de la tangente à la courbe $y = \ln(x^2 - 3)$ au point $T(2; \ldots)$.

3.8

Donner une équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ au point $T(1; \ldots)$.

3.9

Calculer les dérivées des fonctions f suivantes. Donner $ED(f)$ et $ED(f')$.

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

e) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

3.10

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} \, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{3x^2-1} \, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot e^{(x^3)} \, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \left(e^{(x^2)} - 1\right) \, dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 (x + e^{5x}) \, dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x \, dx$

3.11

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - 2x}{3x^3 - 6x^2 - 9x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x + 1}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{e^x - 3}{e^x - e^3}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$

3.12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}e^{-2x}$

a) Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de f.

b) Déterminer les coordonnées des trous de continuité éventuels, ainsi que des asymptotes verticales et horizontales éventuelles de f.

3.13

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$

a) Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de g.

b) Déterminer les coordonnées des trous de continuité éventuels, ainsi que des asymptotes verticales et horizontales éventuelles de g.

3.14

La capacité pulmonaire d'une personne en fonction de son âge est donnée par la fonction C définie par

$$C(t) = \frac{110 \cdot [\ln(t) - 2]}{t} \qquad (t \text{ exprimé en années et } t \in [10; 90])$$

Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

3.15

La fonction $C(t) = 0,1 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{3}}$ (t exprimé en heures) représente l'évolution du taux d'alcool dans le sang au cours du temps. Calculer le niveau maximal d'alcool dans le sang et l'instant auquel ce maximum est atteint.

3.16

Le service de santé publique constate qu'un virus se propage parmi la population. La fonction $P(t)$ ci-dessous exprime le nombre de personnes atteintes en fonction du temps t :

$$P(t) = 80 + 40t^2 \cdot e^{-0.4t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis la découverte de l'épidémie.

a) Quel est le nombre de personnes atteintes lors de la découverte de l'épidémie ?

b) Combien de personnes seront atteintes au bout de 8 jours ?

c) Quel sera le nombre maximal de personnes atteintes ?

3.17

Dans une fabrique on suppose que lors du $n^{\text{ème}}$ jour de production d'un nouvel article, le nombre $f(n)$ d'articles produits est donné par la formule $f(n) = 3 + 20 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot n})$.

a) Calculer le nombre d'articles produits le premier jour de production.

b) Quel est le nombre d'objets produits le cinquième, le neuvième, le vingt-quatrième et le trentième jour ?

c) A quel moment 19 objets seront-ils produits ?

d) Plus les jours passent, et plus le personnel de la fabrique stabilise la production journalière... A combien d'articles par jour ?

3.18

On considère la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^x$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = a$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$, ainsi que la surface plane D' bornée par la courbe $y = f(x) = e^x$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = 4$. Pour quelle valeur de a l'aire de D' est-elle trois fois plus grande que l'aire de D ?

3.19

a) Calculer l'aire de la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^{2x}$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \ln(3)$.

b) Calculer l'aire de la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = 2\tan(x)$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.

3.20

On considère la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^{2x}$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \ln(2)$. Calculer le volume du solide obtenu par révolution de D autour de l'axe Ox.

3.21

Le tremblement de terre à Assam (nord-est de l'Inde) en 1952 fut d'une intensité de $R = 8,7$ sur l'échelle de Richter, l'une des plus élevées jamais enregistrées (un tremblement de terre de magnitude 8.9 a eu lieu au large du Japon en mars 2011). Les séismologues ont calculé que si le tremblement de terre le plus important d'une année donnée était d'une intensité R, l'énergie E (en Joules), libérée par tous les tremblements de terre de la même année, pouvait être estimée à l'aide de la formule $E = 9,13 \cdot 10^{12} \cdot \displaystyle\int_0^R e^{1,25x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer cette énergie pour l'année 1952.

b) Comme il faut un million de Joules pour amener à ébullition 3 litres d'eau, combien de litres d'eau pourrait-on chauffer avec cette énergie ?

3.22

Une formule empirique permet d'estimer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en centimètres) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6$, alors $h(x)$ est de la forme $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222 \cdot \ln(x)$.

a) Quelle sera la taille probable et quel sera le taux de croissance d'un enfant de 2 ans ?

b) A quel moment le taux de croissance est-il le plus élevé ?

3.23

Le modèle de Jenss est un autre modèle permettant d'évaluer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en centimètres) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6$, alors $h(x)$ est de la forme $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$.

a) Quelle sera la taille probable et quel sera le taux de croissance d'un enfant de 1 an ?

b) A quel moment le taux de croissance est-il le plus élevé ? Le plus faible ?

3.24

Etudier les fonctions f définies par :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x-2}\right)$

3.25

Etudier les fonctions f suivantes :

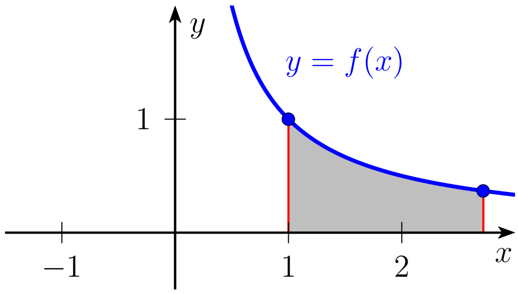
a) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x}$

3.11 Solutions des exercices

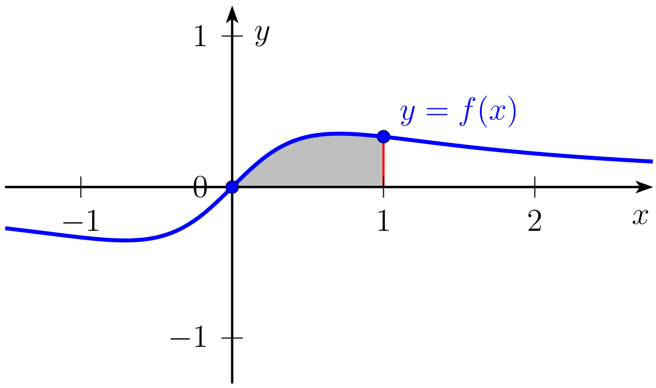
3.1

a)



$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^e = 1 - 0 = 1$$

b)



$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\ln|2x^2+1|\Big|_0^1 = \frac{\ln(3)}{4} \cong 0,275$$

c) $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0,405$

d) $\frac{\ln(6)}{2} \cong 0,896$

3.2

a) $\frac{1}{2}\ln(|x^2+3|)+c$

b) $-\ln(|3-2x|)+c$

c) $\sqrt{2x+1}+c$

d) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\ln(2)$

e) $-2\ln(4) = -4\ln(2)$

f) $-\ln(10)$.

3.3

a) $2\ln(11) - 4\ln(3) + 1 \cong 1.401$

b) $\frac{3\ln(3)}{2} - \frac{25}{6} \cong -2.52$

3.4

a) $\frac{1}{2}\ln(3)$

b) $\frac{1}{3}\ln^3(x) + c$

c) $\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4})$

d) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\ln(|4x-2|) + c$

e) $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(|x^2 - x|) + c$

f) $4 - 3\ln(3)$

3.5

a) $ED(f) =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$; $ED(f') =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

b) $ED(f) =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$; $ED(f') =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

c) $ED(f) =]3; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{3x-6}{x^2-3x}$; $ED(f') =]3; +\infty[$

d) $ED(f) =]-2; 2[$; $f'(x) = \dfrac{6x}{x^2-4}$; $ED(f') =]-2; 2[$

e) $ED(f) =]-\infty; 1[$; $f'(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$; $ED(f') =]-\infty; 1[$

f) $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x) + 1$; $ED(f') = \mathbb{R}_+^*$

3.6

Maximum global en : $(1; -1)$ $\quad \Rightarrow f(x)$ n'a pas de zéro

3.7

$f(x) = \ln(x^2 - 3) \quad \Rightarrow \quad T(2; 0)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-3} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4$

$(t) : y - 0 = 4(x-2) \quad \Rightarrow \quad (t) : \ y = 4x - 8$

3.8

$(t) : \ y = x - 1$

3.9

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$ $\quad ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = (2x+1)e^{2x}$ $\quad ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ $\quad ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}$

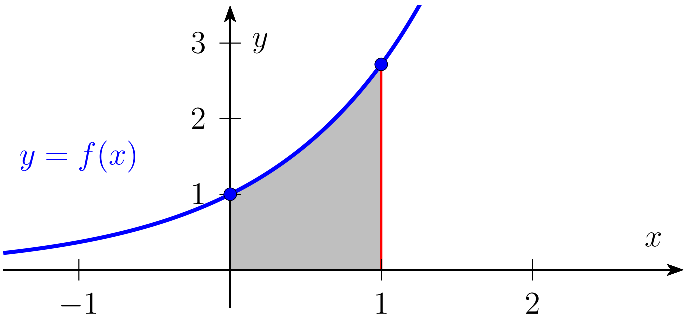
d) $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ $\quad ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}$

e) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}_+$; $ED(f') = \mathbb{R}_+^*$

f) $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ $\quad ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}$

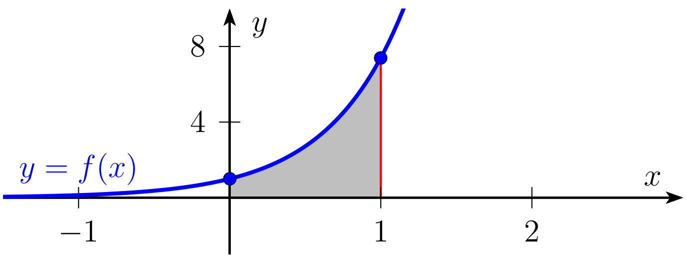
3.10

a)



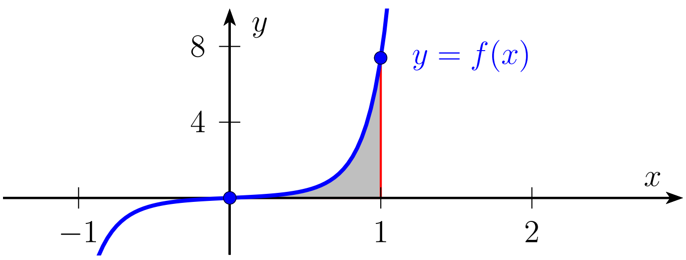
$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \cong 1,718$$

b)



$$\frac{1}{2}\int_0^1 2 \cdot e^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2} \cong 3,195$$

c)



$$\frac{1}{6}\int_0^1 6x \cdot e^{3x^2-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot e^{3x^2-1} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{6e} \cong 1,17$$

d) $\dfrac{e-1}{3} \cong 0,573$

e) $\dfrac{e-2}{2} \cong 0,359$

f) $e - \sqrt{e} \cong 1,07$

g) $\dfrac{2e^5 + 3}{10} \cong 29,983$

h) $\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right) \cong 0,62$

i) $\dfrac{(e-1)^5}{5} \cong 2,996$

3.11

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{2x^3-2x}{3x^3-6x^2-9x}$ $\quad\left(\text{forme indéterminée : } \dfrac{0}{0}\right)$

Règle de l'Hospital : $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{2x^3-2x}{3x^3-6x^2-9x} = \lim_{x\to-1} \frac{6x^2-2}{9x^2-12x-9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2}$ $\quad\left(\text{forme indéterminée : } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Règle de l'Hospital : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

c) $-\infty$

d) $+\infty$

e) 0

f) $\pm\infty$

g) -1

h) 0

3.12

a) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

x		0		1	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

b) aucun trou ; AV : $x = 0$; AH : $y = 0$ en $+\infty$.

3.13

a) $ED(g) =]0;1[\cup]1;+\infty[$

x		0		1	
$g(x)$		$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$

b) Trou de coordonnées $(1; \frac{1}{2})$; AV : $x = 0$; AH : $y = 0$ en $+\infty$.

3.14

La capacité pulmonaire est maximale lorsque $t = e^3 \cong 20$ ans

3.15

Taux d'alcool maximal lorsque $t = 3$ heures et ce taux vaut $C(3) = 0,3 \cdot e^{-1} \cong 0,11$

3.16

a) 80 personnes

b) 184 personnes

c) 215 personnes

3.17

a) 5 objets
b) 11/ 15 / 21/ 22
c) Il faut 17 jours
d) 23 objets par jour

3.18

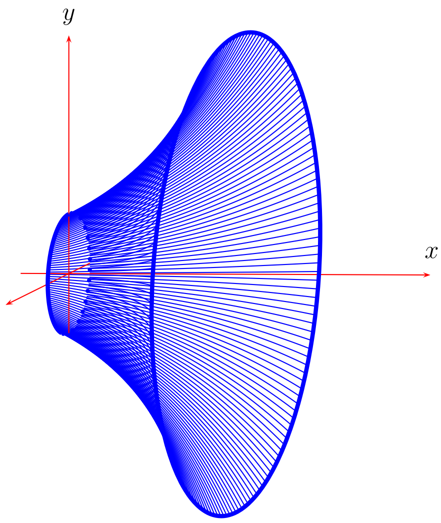
$a = \ln\left(\frac{e^4+2}{3}\right) = \ln(e^4+2) - \ln(3) \cong 2,94$

3.19

a) 4 u^2
b) $\ln(2)$ u^2

3.20

$\frac{15\pi}{4}$ u^3



3.21

a) $E = 3,85927 \cdot 10^{17}$ Joules

b) $1,15778 \cdot 10^{12}$ litres d'eau (cela correspond au volume d'eau du lac de Bienne)

3.22

a) $86,83$ cm et $9,715$ cm/an
b) 3 mois

3.23

a) $75,77$ cm et $15,98$ cm/an
b) 3 mois / 6 ans

3.24

a) $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x\right)$

$ED(f) : x(x-2) > 0 \quad \Rightarrow ED(f) =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

zéros de f : $x^2 - 2x = 1 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad$ zéros de f : $x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$

x		$1-\sqrt{2}$		0		2		$1+\sqrt{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$		//////		$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty$

AV : $x = 0$ (à droite de la courbe) et $x = 2$ (à gauche de la courbe)

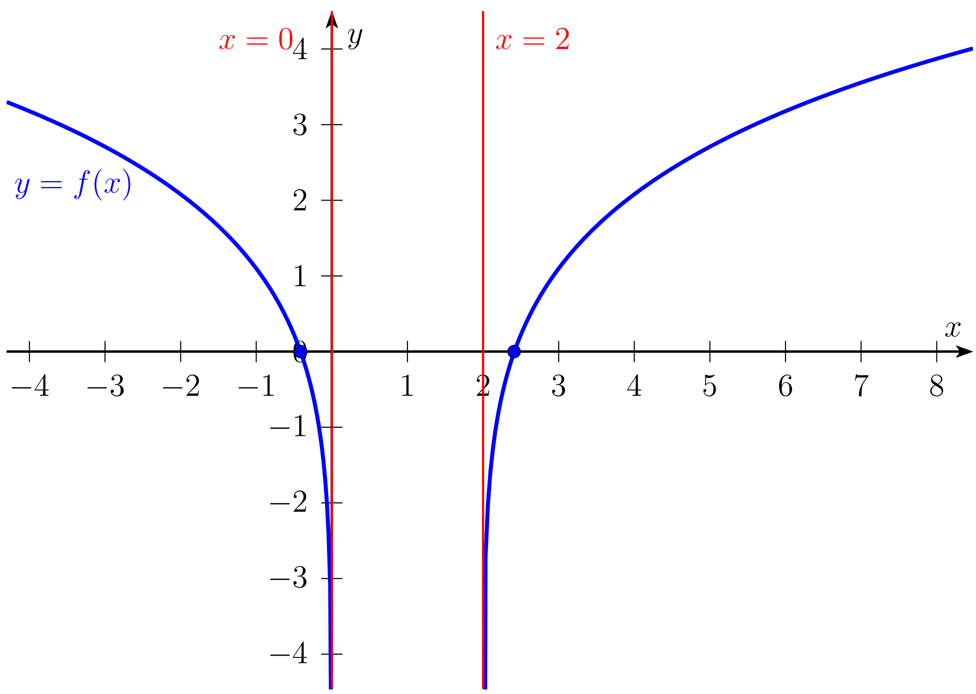
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2 - 2x\right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ pas d'AH

$f'(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

zéros de f' : aucun car $x = 1 \notin ED(f)$

x		0		2	
$f'(x)$	$-$		//////		$+$
$f(x)$	$\searrow$		//////		$\nearrow$

$\Rightarrow \quad$ pas d'extremum



b) $ED(f) =]2; +\infty[$

x		2		3	
$f(x)$	(hatched)		$-$	0	$+$

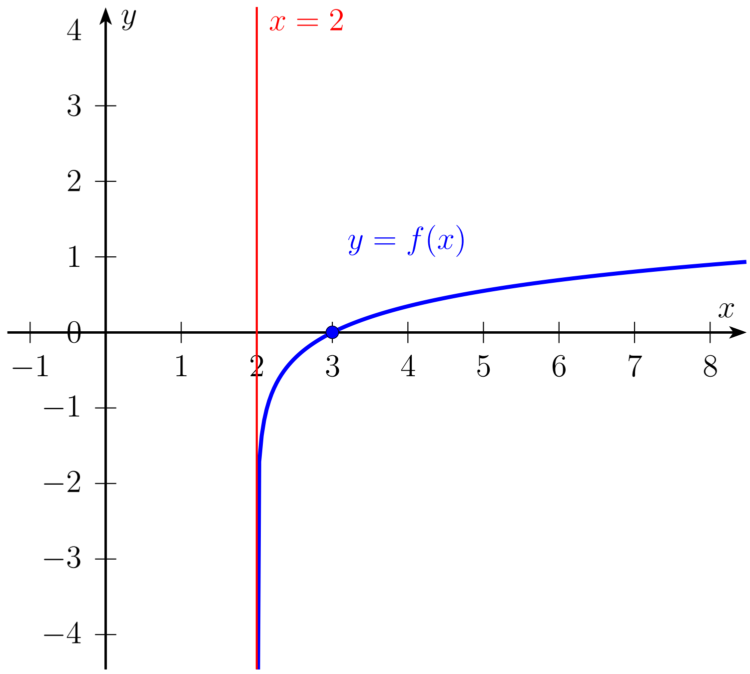
asymptote verticale en $x = 2$ (à gauche de la courbe)

pas d'AH

$f'(x) = \dfrac{1}{2(x-2)} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

x		2	
$f'(x)$	(hatched)		$+$
$f(x)$	(hatched)		$\nearrow$

$\Rightarrow$ pas d'extremum



3.25

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

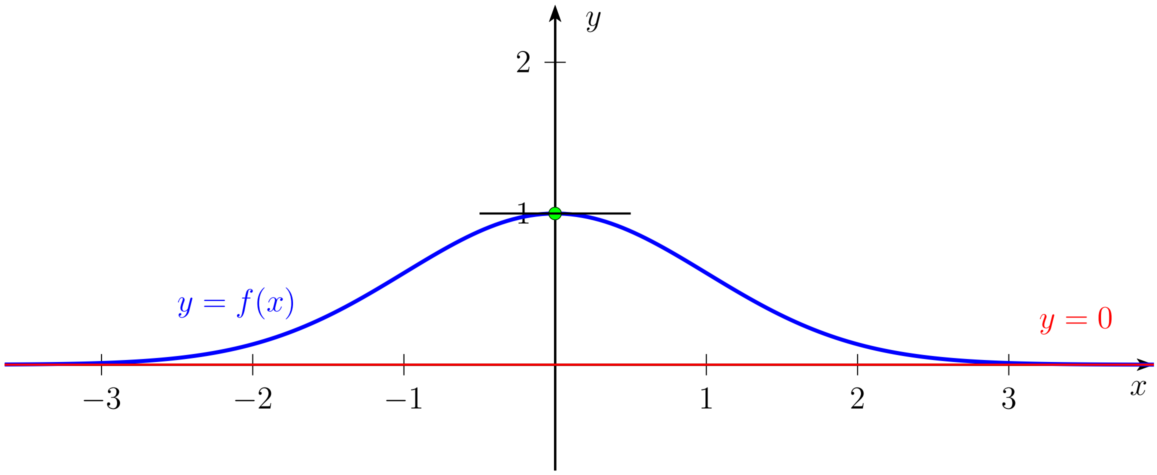
x	
$f(x)$	$+$

AH : $y = 0$

$f'(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

maximum : $(0;1)$



b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow \quad ED(f) = \mathbb{R}^*$

zéro de f : $2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

x		0		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = +\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = -\infty \quad \Rightarrow \text{AV} : x = 0$

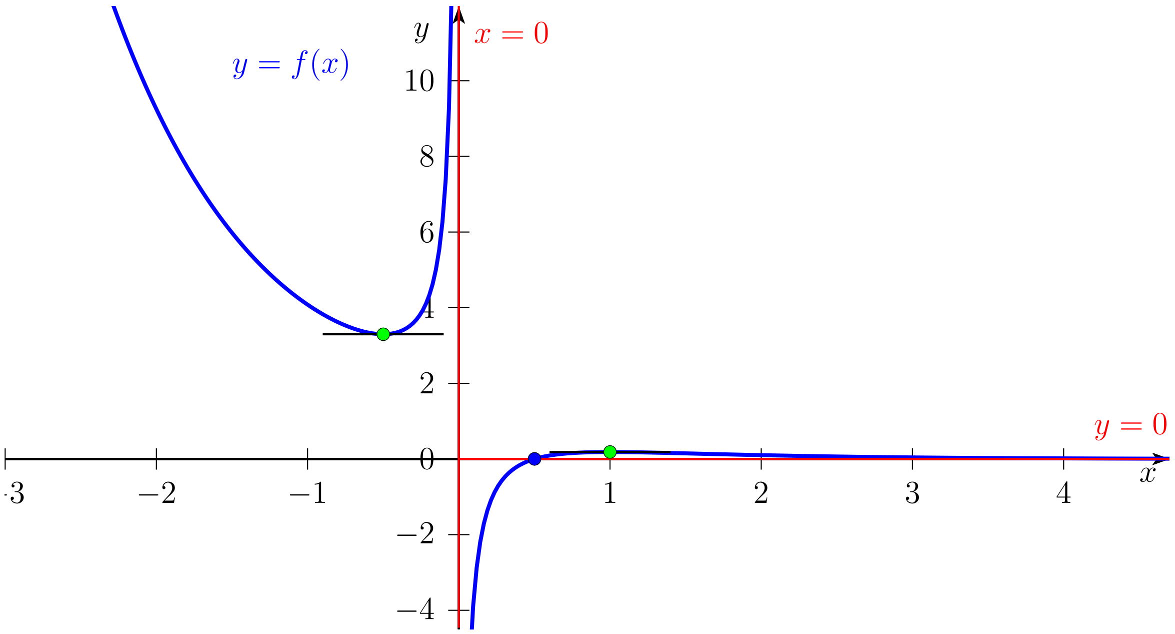
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \text{AH} : y = 0 \ (x \to +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{2}{4x^2} \cdot e^{-x} - \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = \left(\dfrac{-2x^2 + x + 1}{2x^2}\right) \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

zéros de f' : $2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1$

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↘	||	↗	max	↘

minimum : $\left(-\frac{1}{2}; 2\sqrt{e}\right)$ et maximum : $\left(1; \frac{1}{2e}\right)$



Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions LEP, 1998.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 25 *: Fundamentum de mathématique : Analyse*, Editions du Tricorne, 1997.

[3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2005.

[4] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P loisirs et Pédagogie, 1980.

[5] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P loisirs et Pédagogie, 1980.

[6] G. Ouellet, *: Calcul 1 (calcul différentiel)*, Editions Le Griffon d'Argile, 1999.

[7] Deborah Hughes-Hallet et Andrew M Gleason, Traduction française de Michel Beaudin *: Fonctions d'une variable*, Editions Mc Graw-Hill, 1999.

[8] E. W. Swokowski *: Analyse*, Editions De Boeck, 2000.

[9] Robert A. Adams, Traduction de Christophe Soland *: Analyse*, Gymnase du Bugnon, 1988.

[10] Stewart James, *: Analyse, concepts et contextes, volume 1, fonctions d'une variable*, Editions de Boeck, 3ème édition, 2006.

[11] G. Ouellet, *: Calcul 2 (calcul différentiel),* Editions Le Griffon d'Argile, 2000.

[12] Francis Calame, *: Analyse, cours et exercices* CESSEV, 1995.

[13] Luc Amyotte, *: Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.

[14] André Waser, *: Analyse 3*, Gymnase de Burier, 2015.

[15] Luc Amyotte, *: Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.

[16] Hubert Bovet, Mireille Cherix *: Géométrie, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998.

[17] Hubert Bovet, *: Analyse, cours et exercices*, Editions Polymath, 1999.

[18] Monographie de la commission romande de mathématique 26 *: Fundamentum de mathématique : Probabilités*, Editions du Tricorne, 2005.