Chapitre 5

Applications de la dérivée

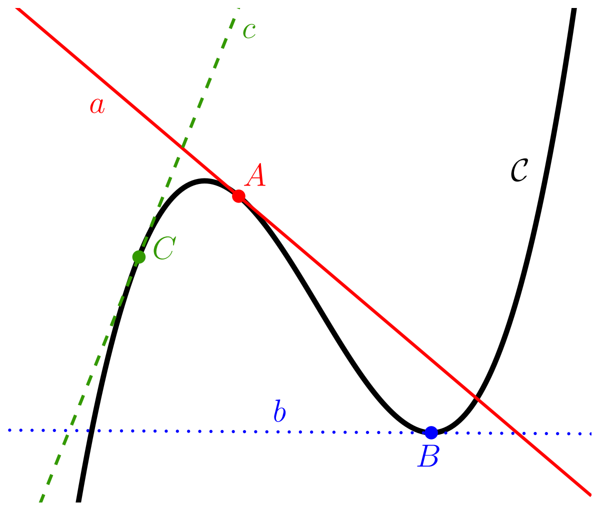
5.1 Tangentes

5.1.1 Tangente à une courbe du plan

Tangente vient du latin *tangere* qui signifie toucher.

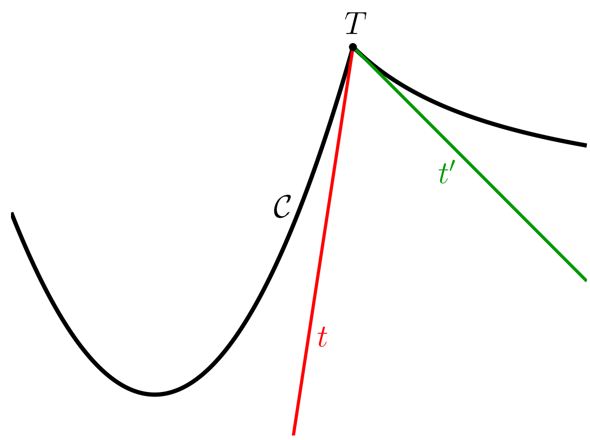
La tangente à une courbe $\mathcal{C}$ du plan en un de ses points est la droite qui *effleure* la courbe en ce point sans la recouper dans le voisinage (à proximité) du point.

Attention ! La tangente dépend du point choisi sur la courbe. En général, la tangente est différente lorsque l'on change de point de tangence.



Remarque 5.1.

La tangente peut ne pas exister en certains points !
Pour la courbe $\mathcal{C}$ représentée ci-contre, la tangente en T n'existe pas.



5.1.2 Tangentes au graphe d'une fonction

Tangente au graphe de f en $T(a;b)$, sans utiliser une formule...

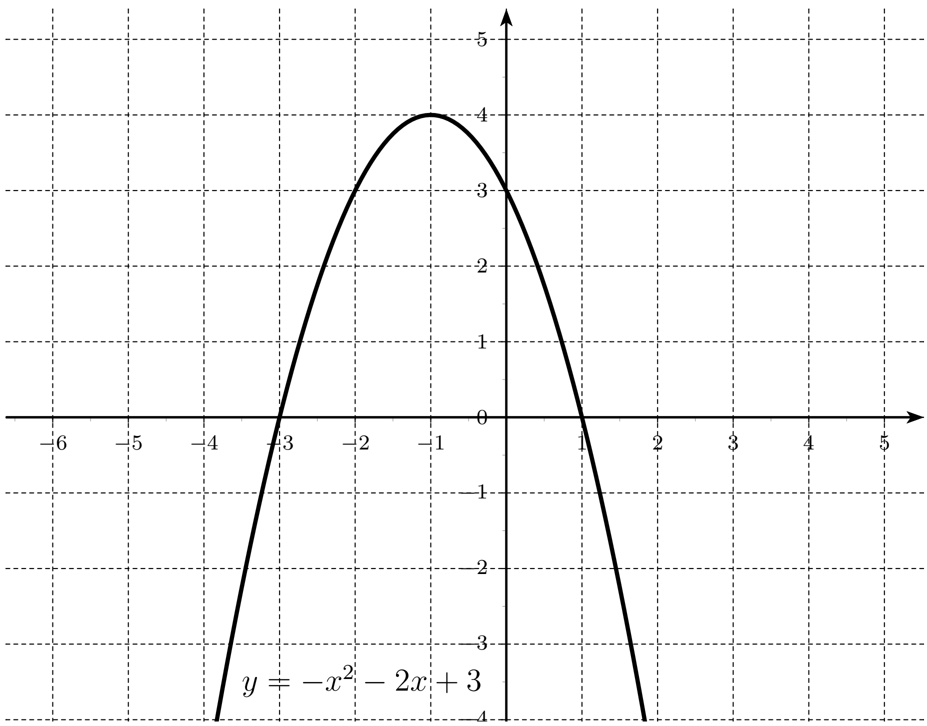
- Lien entre abscisse et ordonnée de T : $b = f(a)$
- La tangente est d'équation (cartésienne) $y = mx + h$
- La tangente est de pente $m = f'(a)$ (valeur numérique de f' en $x = a$)
- La tangente passe par $T(a;b)$ donc $b = m \cdot a + h$

Tangente au graphe de f en $T(a;b)$, en utilisant une formule...

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemple 5.1.

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ dont le graphe est représenté ci-dessous.

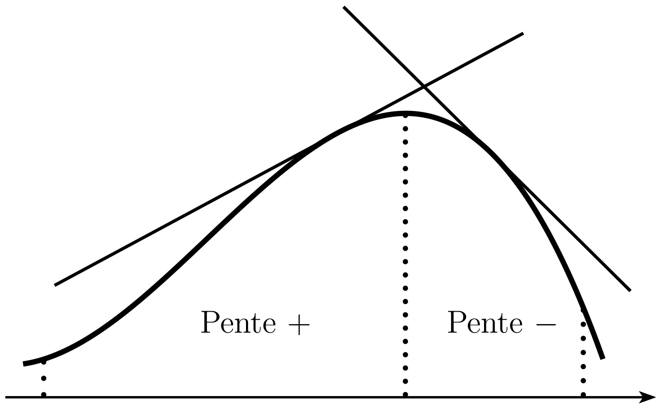


a) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f de pente 2.

5.2 Croissance d'une fonction

- Si une fonction est croissante au voisinage d'un point, la pente de la tangente en ce point est positive.
- Si une fonction est décroissante au voisinage d'un point, la pente de la tangente en ce point est négative.



Croissance et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$;

a) f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$

b) f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

c) f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Exemple 5.2.

Soit la fonction f donnée par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

Donner l'ensemble de définition et étudier la croissance de la fonction f.

5.3 Extremums et paliers

Liens entre signe de f' et croissance de f :

x		a		b		c		d	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	palier	$\nearrow$

$\{$ minimums de f $\} \cup \{$ maximums de f $\} = \{$ extremums de f $\}$

$\{$ paliers de f $\} = \{$ points à tangente horizontale de $f\} \setminus \{$ extremums de f $\}$

Remarque 5.2.

On étudie quelque fois une fonction sur un intervalle $I = [a; b]$. Il se peut alors qu'un extremum de f se trouve aux extrémités de l'ensemble d'étude I.

Exemple 5.3.

Calculer sur l'intervalle $I = [-5; -2]$ les coordonnées des extremums, ainsi que des extremums absolus de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 6x + 22$

Exemple 5.4.

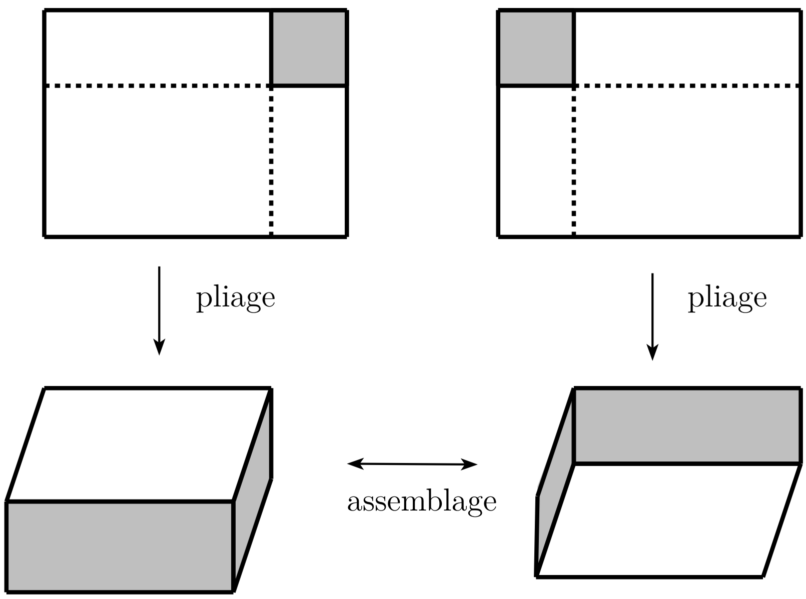
Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

Donner l'ensemble de définition, étudier la croissance et déterminer les coordonnées des extremums éventuels de la fonction f.

5.4 Problèmes d'optimisation

Optimisation du volume d'une boîte

A partir de deux feuilles en carton de dimension 30 cm sur 21 cm, on construit une boîte en forme de parallélépipède rectangle en découpant dans chaque feuille deux carrés de même dimension (voir ci-dessous).



Déterminer les dimensions du carré à découper afin d'obtenir un volume maximal.

Optimisation d'utilisation de matériau

Dans une fabrique de boîtes en carton, on désire limiter la surface de carton utilisée pour la construction de boîtes en forme de **parallélépipède rectangle à base carrée sans couvercle**.

La boite doit avoir un volume de 1000 cm^3.

Calculer les dimensions (au mm près) de la boîte dont la surface de carton est minimale, ainsi que cette surface minimale (au mm^2 près).

Méthode de résolution d'un problème d'optimisation

Pour résoudre un problème d'optimisation, on procède comme suit :

a) Bien lire l'énoncé !

b) Faire un schéma et identifier les variables du problème (x, y, h, r, ...), ainsi que la grandeur Q à optimiser (à maximiser ou à minimiser).

c) Exprimer la grandeur à optimiser Q en fonction des variables du problème.

d) Si Q est fonction de plusieurs variables, déterminer les équations liant ces variables.

e) Exprimer la grandeur à optimiser Q en fonction d'une seule variable : si x est cette variable, il s'agit donc de trouver l'expression algébrique d'une fonction f telle que $Q = f(x)$ en utilisant les équations obtenues au point précédent. Déterminer alors l'ensemble des valeurs admissibles de x.

f) A l'aide de la dérivée f' de la fonction f, étudier la croissance de Q.

g) Trouver l'optimum (le maximum ou le minimum) cherché à l'aide du tableau de croissance de Q et répondre à la question posée.

Remarque 5.3.

Il se peut que le maximum ou le minimum cherché se trouve aux extrémités des valeurs admissibles de x.

5.5 Etude d'une fonction rationnelle

Plan d'étude d'une fonction rationnelle

1) Recherche de $ED(f)$.
2) Signe et zéros de *f*.
3) Recherche des asymptotes éventuelles de *f*.
   Si demandé, position relative entre la courbe et ses asymptotes.
4) Dérivée première de $f, ED(f')$. Signe et zéros de f' ; croissance de f.
5) Graphe de *f*.

Exemple 5.5.

Etudier la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$.

5.6 Exercices

5.1

Calculer la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T.

a) $f(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 5, \quad T(0;\ldots)$

b) $f(x) = x^5 - 3\,x^2 + 1, \quad T(1;\ldots)$

c) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 10, \quad T(4;\ldots)$

d) $f(x) = (3\,x + 2)\,(5\,x - 4), \quad T(1;\ldots)$

e) $f(x) = \dfrac{4\,x + 7}{x + 3}, \quad T(2;\ldots)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}, \quad T(4;\ldots)$

5.2

Donner une équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T.

a) $f(x) = 2\,x^2 - 5, \quad T(2;\ldots)$

b) $f(x) = 6 - x - x^2, \quad T(-2;\ldots)$

c) $f(x) = x^3 + 8, \quad T(-2;\ldots)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad T(3;\ldots)$

5.3

Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a, si :

a) $f(x) = 1 + 2x - x^3, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x}, \quad a = 3$

c) $f(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad a = 4$

5.4

On donne la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

5.5

En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente égale à -3 ?

5.6

Calculer les coordonnées des points de la courbe $y = x^3 - 3\,x$ où les tangentes sont parallèles à l'axe Ox.

5.7

Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5\,x + 2$$

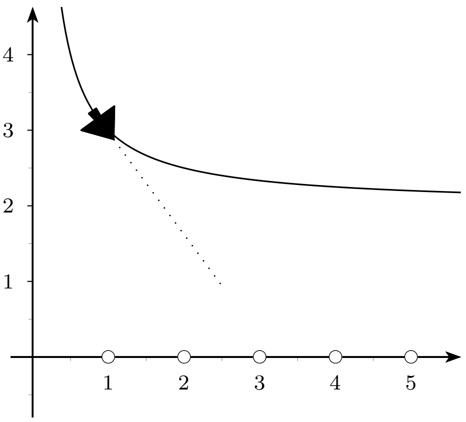
est parallèle à la droite passant par $A(-3; 2)$ et $B(1; 14)$.

5.8

La figure ci-contre montre l'écran d'un jeu vidéo.
On peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation

$$y = \frac{2\,x + 1}{x}$$

et qui tirent des balles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.



a) Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $P(1;3)$?

b) Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $Q\left(\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right)$?

5.9

Déterminer les coefficients a, b, c et d, sachant que la courbe $y = \dfrac{x^2 + a\,x + b}{c\,x^2 + d\,x - 2}$

- admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale ;
- n'admet pas d'asymptote horizontale ;
- passe par le point $P(1;-2)$ et qu'en ce point la pente de la tangente vaut -5.

5.10

Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-il pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

5.11

Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont décroissantes.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 3)(x - 4)}$

d) $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$

5.12

Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont croissantes.

a) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{x}$

c) $f(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

5.13

Calculer les coordonnées de tous les extremums des fonctions f définies par :

a) $f(x) = 4x - 5$

b) $f(x) = 7 - 2x - x^2$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

d) $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

e) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

f) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+8}{x}$

h) $f(x) = (x+2)(2x-3)^2$

i) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x^2+1}$

5.14

Calculer sur l'intervalle I les coordonnées de tous les extremums absolus des fonctions f définies par :

a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 4, \quad I = [1;3]$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}, \quad I = [0;3]$

c) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x, I = [-2;2]$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+8}{x}, \quad I = [-1;3]$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}, \quad I = [1;+\infty[$

f) $f(x) = (x-2)^2(x-3), \quad I = [-2;5]$

5.15

Déterminer les paramètres a et b de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$$

admette en $x_0 = -1$ un extremum d'ordonnée 4.

5.16

Déterminer les paramètres a et b de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+1}$$

admette en $x_0 = 0$ un minimum ou un maximum d'ordonnée 3.

5.17

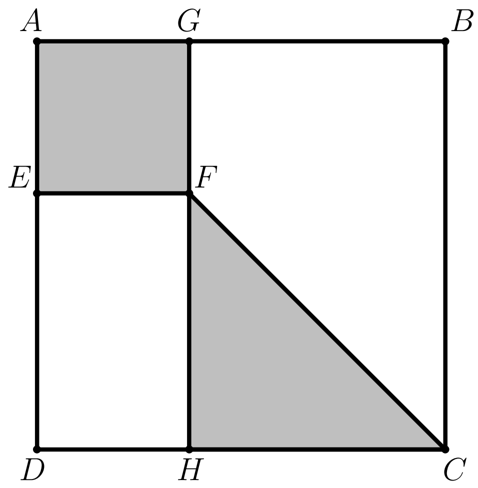
On souhaite construire une boîte en carton en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille cartonnée rectangulaire et en rabattant les bords restants. La feuille mesure 42 cm de long et 32 cm de large. De la taille des carrés découpés dépendra le volume de la boîte. Calculer la dimension de ces carrés pour que la boîte ait un volume maximal. Donner également ce volume maximal.

5.18

Trouver l'aire maximale d'un rectangle dont un côté est porté par l'axe Ox et dont les sommets non situés sur cet axe sont dans les quadrants 1 et 2 et sur la courbe $y = 12 - x^2$.

5.19

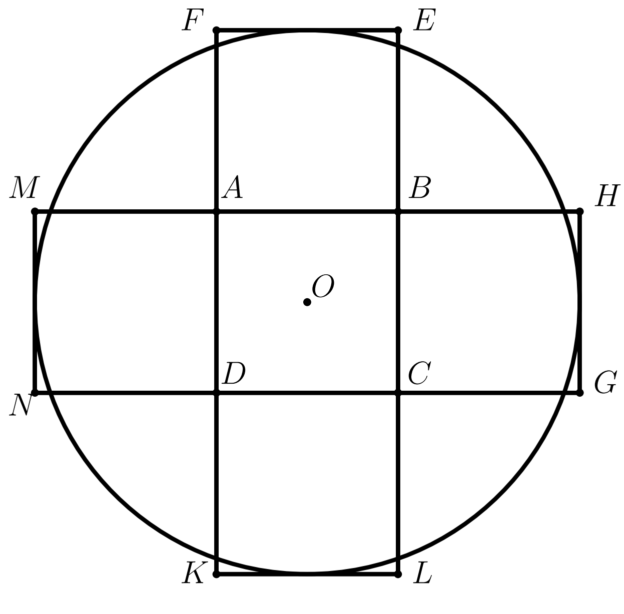
On considère un carré $ABCD$ de 12 cm de côté.
En choisissant un point E sur le côté AD, on construit le carré $AEFG$ et le triangle FHC rectangle en H (voir ci-contre).
Soit S l'aire totale de la surface grisée (composée du carré $AEFG$ et du triangle FHC).



Déterminer les valeurs maximale et minimale de l'aire totale S lorsque E varie sur le segment AD.

5.20

On considère un cercle de centre O de rayon 9 cm.
A l'intérieur de ce cercle, on construit un carré $ABCD$ de centre O ; on construit ensuite les rectangles $ABEF, BCGH, CDKL$ et $DAMN$ de telle sorte que les côtés EF, GH, KL et MN soient tangents au cercle (voir ci-contre).
On obtient ainsi le développement d'une boîte sans couvercle dont $ABCD$ est la base et dont les rectangles $ABEF, BCGH, CDKL$ et $DAMN$ sont les faces latérales.
En faisant varier la longueur du côté du carré $ABCD$ dans le cercle, on obtient différentes boîtes.



1) Calculer le volume de la boîte si la longueur du côté du carré $ABCD$ vaut 8 cm.
2) Déterminer la longueur du côté du carré $ABCD$ qui rend maximal le volume de la boîte ainsi construite et calculer ce volume maximal.

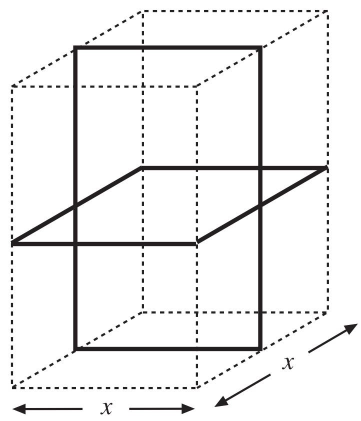
5.21

Un homme atteint d'une grave maladie accepte de prendre x grammes d'un médicament expérimental. La probabilité de guérison est donnée par

$$P(x) = \frac{3\sqrt{x}}{4(x+1)}$$

Quelle quantité de ce médicament assure à cet homme la plus grande probabilité de guérison ?

5.22



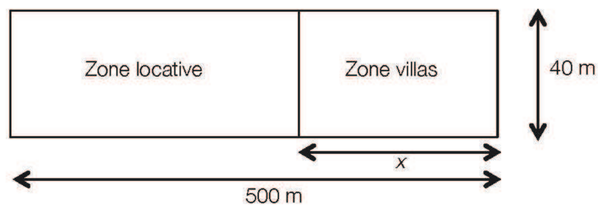
On propose d'envoyer un colis dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle à **base carrée**.
Son emballage est maintenu, comme le montre la figure ci-contre, à l'aide d'une ficelle de 126 cm de longueur.

1) Un colis de côté de base $x = 15$ cm est emballé de la sorte. Calculer le volume du colis.
2) Calculer les dimensions du colis de volume maximum qui peut être emballé de la sorte.

5.23

Une commune a vendu à un promoteur un terrain à bâtir de 20'000 m^2 pour 4 millions de francs.

Le promoteur peut partager le terrain en deux zones rectangulaires : une zone villas qui lui rapportera 500 francs par m^2 et une zone locative qui lui rapportera 200 francs par m^2.



La commune voulant privilégier la zone locative, elle impose au promoteur une taxe sur la zone villas. Cette taxe, en francs, est donnée par la fonction $t(a) = \frac{1}{40}a^2$ où a représente l'aire en m^2 de la zone villas.

a) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il ne construit que des villas.
b) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il ne construit que des locatifs.
c) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il coupe le terrain par le milieu.
d) Montrer que le gain ou la perte du promoteur (en francs) est donné par :

$$f(x) = -40x^2 + 12'000x$$

où x (en m) représente la longueur de la zone villas (cf. croquis).
e) Déterminer la longueur x (en m) de la zone villas pour que le gain du promoteur soit maximal et déterminer ce gain maximal.

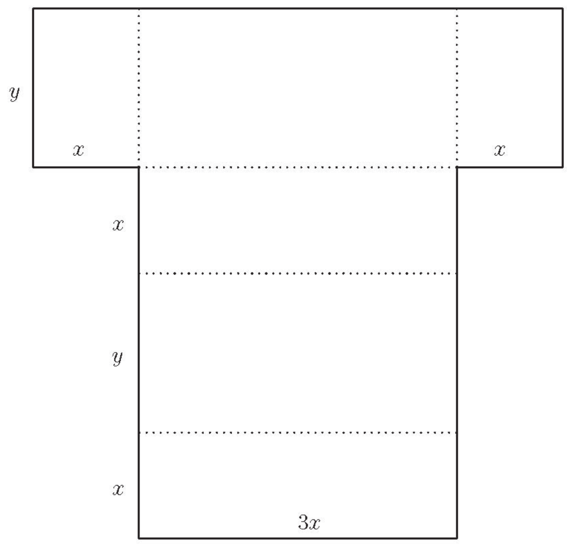
(Problème de bac, Burier, juin 2014)

5.24

Le directeur du pénitencier veut clôturer un champ rectangulaire adjacent à la bâtisse du pénitencier. Pour installer une clôture de sécurité, il doit payer 30 fr le mètre de clôture. Le directeur a obtenu un budget de 64 200 fr pour ce projet. Calculer les dimensions du champ d'aire maximale qu'il peut construire avec cette somme.

5.25

On fabrique une boîte en forme de parallélépipède rectangle de volume 2304 cm^3. On découpe alors dans une feuille de carton le développement de la boîte comme donné dans la figure ci-contre.



a) Montrer que l'aire totale de carton nécessaire à la fabrication de la boîte est donnée par

$$A(x) = \frac{6(x^3 + 1024)}{x}$$

b) Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire de carton nécessaire à sa fabrication ? Justifier par une étude de croissance.

(Problème de bac, Burier, juin 2015)

5.26

a) Gérard a une petite entreprise où il fabrique des sacs à main en cuir. En considérant ses frais fixes et ses frais variables, il a calculé que la fonction f donnée par

$$f(x) = 6\,300 + 10x + \frac{x^2}{28}$$

représente le coût total de fabrication de x sacs à main. Combien Gérard doit-il fabriquer de sacs à main s'il veut obtenir un coût de production unitaire minimal ?

b) Gérard décide de vendre la totalité des sacs à main qu'il fabrique au prix de 70 fr la pièce. Combien doit-il en fabriquer pour obtenir un profit maximal ?

5.27

On veut construire un restaurant de spécialités italiennes. On sait que si l'on aménage 120 places, on obtiendra un profit mensuel de 48 fr par place. De plus, pour chaque place au-delà de 120, le profit mensuel par place diminue de 25 centimes. Combien de places doit-on aménager si l'on veut obtenir un profit mensuel maximal ?

5.28

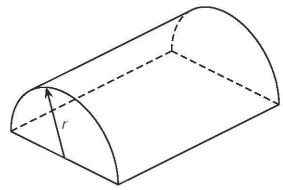
Un fabricant de produits alimentaires veut mettre sur le marché un jus de pomme vitaminé. Il envisage de le mettre dans des boîtes de conserves cylindriques de 1000 cm^3. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour qu'il utilise le moins de métal possible ?

5.29

Une feuille de papier doit contenir 60 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celles de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille pour laquelle il faudra le moins de papier possible.

5.30

On souhaite construire une serre de 3 750 m^3 de volume. On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon r (en mètres) dont le prix est de 35 francs par m^2 et un toit rectangulaire dont le prix est de 15 francs par m^2, que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.



a) Montrer que le coût total de cette serre en fonction du rayon r des parois est donné par

$$C(r) = \frac{35\pi r^3 + 112500}{r}$$

b) Déterminer les dimensions de la serre de coût minimal et déterminer ce coût.

(Problème de bac, Burier, juin 2012)

5.31

Deux points A et B de la rive d'un lac sont distants de 12 km. Entre ces deux points, la rive est une ligne droite de direction Est-Ouest. Deux villes C et D sont respectivement situées à 9 km au nord du point A et à 15 km au nord du point B. On souhaite installer une station de pompage sur le bord du lac, entre les points A et B, station qui fournira l'eau aux deux villes. Où devra-t-on l'installer si l'on veut que la somme des distances de la station aux deux villes soit minimale ?

5.32

Un fabricant doit construire une caisse à **base carrée** de 16 m^3 de volume. Pour des raisons de solidité et d'étanchéité, le matériau employé pour la base coûte 6 francs le m^2, alors que celui utilisé pour les parois latérales et le couvercle en coûte que 2 francs le m^2.

1) Calculer le prix de revient de la caisse si la base est un carré de 2.5 mètres de côté (on considérera comme négligeable l'épaisseur des parois, de la base et du couvercle).
2) Quelles sont les dimensions à donner à la caisse pour que le coût des matériaux soit minimal et quel est ce coût minimal ?

5.33

Trouver une équation d'une droite qui passe par le point $A(1;3)$ et qui détermine un triangle d'aire minimale dans le premier quadrant.

5.34

Etudier les fonctions f.

a) $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = (x-2)^2(x-3)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x\cdot(x-3)^2}{(x-2)^2}$

5.35

L'étude de la fonction f donnée ci-dessous a été partiellement réalisée. Compléter le tableau du signe de f, le tableau du signe de f' et le tableau de croissance de f. Esquisser ensuite le graphe de f avec ses asymptotes.

a) $f(x) = \dfrac{(x-5)^2}{2x}$

1) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

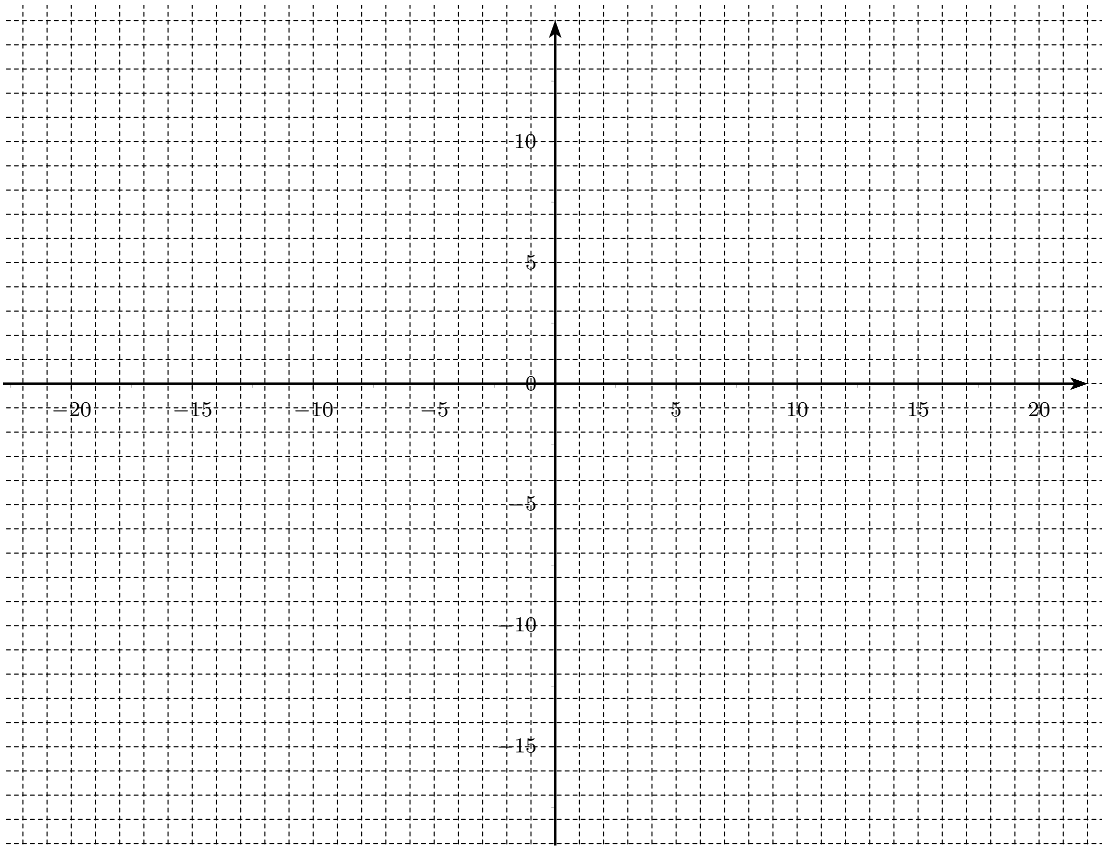
2) signe de f :

x		0		5	
$f(x)$					

3) asymptotes : AV en $x = 0$ et AO en $y = \dfrac{1}{2}x - 5$

4) croissance de f : $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+5)}{2x^2}$

x		-5		0		5	
$f'(x)$							
$f(x)$							



b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^2(x+4)}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$

2) signe de f :

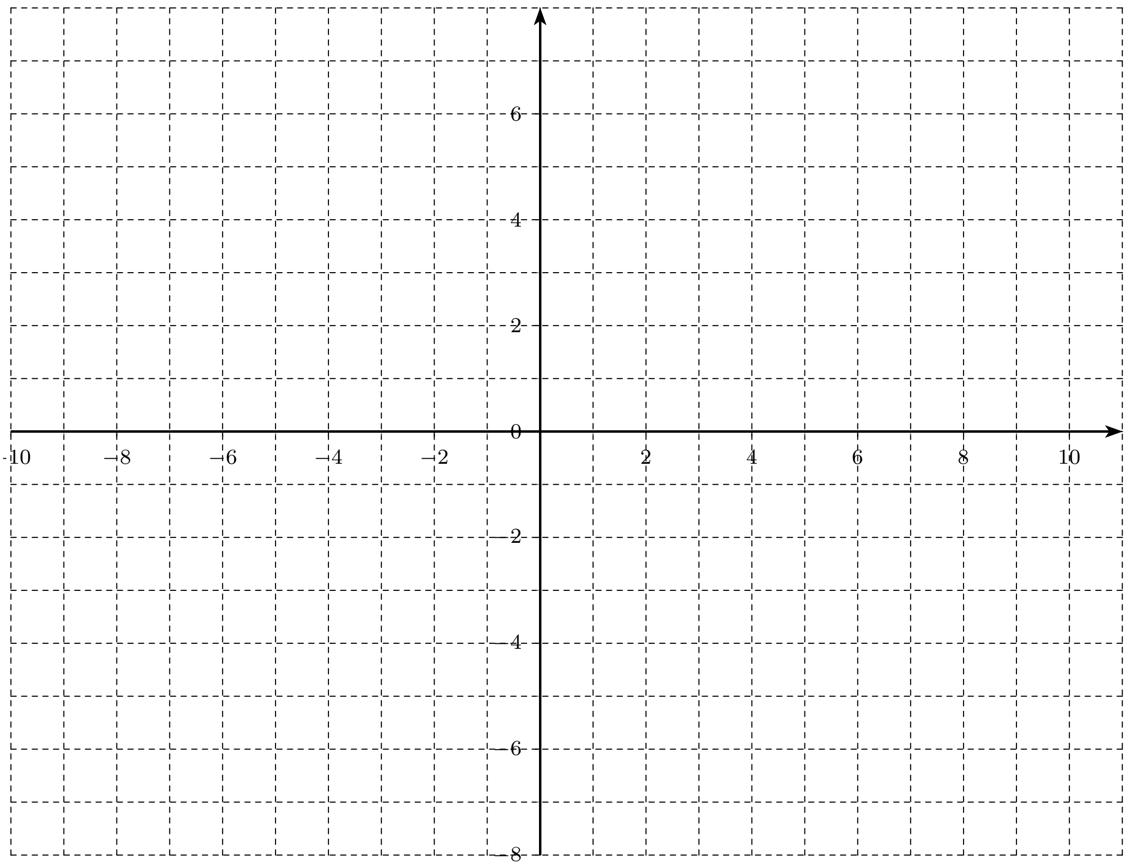
x		-4		0		3	
$f(x)$							

3) asymptotes : AV en $x = -4$ et en $x = 3$ et AH en $y = 0$

4) croissance de f :

$$f'(x) = \frac{-x(x^2+3x+24)}{(x-3)^3(x+4)^2}$$

x		-4		0		3	
$f'(x)$							
$f(x)$							



5.7 Réponses

5.1

a) -6 b) -1 c) $33/4$ d) 28 e) $1/5$ f) -1

5.2

a) $y = 8\,x - 13$
b) $y = 3\,x + 10$
c) $y = 12\,x + 24$
d) $y = -\dfrac{2}{27}\,x + \dfrac{1}{3}$

5.3

a) $y = -x + 3$ b) $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ c) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

5.4

a) La dérivée de la fonction s'écrit $f'(x) = -2x + 1$.
b) Les pentes cherchées sont $f'(-1) = 3$, $f'(0) = 1$, $f'(2) = -3$.

5.5

$P\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.

5.6

$A(-1; 2)$ et $B(1; -2)$

5.7

$-\dfrac{4}{3}$, 2.

5.8

a) en P : oui ;
b) en Q : non.

5.9

$a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$.

5.10

$a = -2$, $b = -6$.

5.11

a) $]-\infty;-2]\cup[0;1]$

b) $[0;2\,[\cup]2;+\infty[$

c) $\mathbb{R}-\{-3;4\}$

d) $[-6;-3\sqrt{2}\,]\cup[3\sqrt{2};6]$

5.12

a) $[-5;3]$

b) $]-\infty;-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2};+\infty[$

c) $[-1;\frac{7}{4}]\cup[3;+\infty[$

d) $[-4;4]$

5.13

a) Aucun

b) max en $M(-1;8)$

c) min en $N(1;-2)$ et max en $M(-2;25)$

d) Aucun

e) min en $N(\dfrac{1}{2};0)$

f) min en $N(2;-37)$ et max en $M(-3;88)$

g) min en $N(2;9)$ et max en $M(-2;-7)$

h) min en $N(\frac{3}{2};0)$ et max en $M(\frac{-5}{6};\frac{686}{27})$

i) min en $N(0;-1)$

5.14

a) min en $N(1;9)$ et max en $M(3;65)$

b) Aucun

c) min en $N(1;-11)$ et max en $M(2;32)$

d) Aucun

e) max en $M(4;\frac{1}{8})$

f) min en $N(-2;-80)$ et max en $M(5;18)$

5.15

$a=0$ et $b=-3$

5.16

$a=-15$ et $b=3$

5.17

6 cm et la boîte est de volume 3600 cm^3

5.18

32 [u^2]

5.19

Aire maximale : 144 cm^2 ; aire minimale : 48 cm^2

5.20

1) 320 cm^3
2) côté du carré $ABCD$: 12 cm
3) volume maximal de 432 cm^3

5.21

1 gramme

5.22

1) 4050 cm^3
2) $14 \times 14 \times 21$ cm pour un volume maximal de 4116 cm^3

5.23

a) Perte de 4 millions de francs.
b) Opération neutre (ni perte ni gain).
c) Gain de 500'000 francs.
d) -
e) Le gain est maximal (900'000 francs) pour $x = 150$ m.

5.24

Les côtés mesurent 535 m sur 1070 m.

5.25

b) 8 cm x 12 cm x 24 cm

5.26

a) 420 sacs à main
b) 840 sacs à main

5.27

156 places

5.28

5.42 cm pour le rayon et 10.83 cm pour la hauteur du cylindre

5.29

Les côtés mesurent 12 cm et 20 cm

5.30

b) rayon : environ 8 mètres, longueur : environ 37.3 mètres, coût : environ 21100 francs

5.31

A 4.5 km du point A

5.32

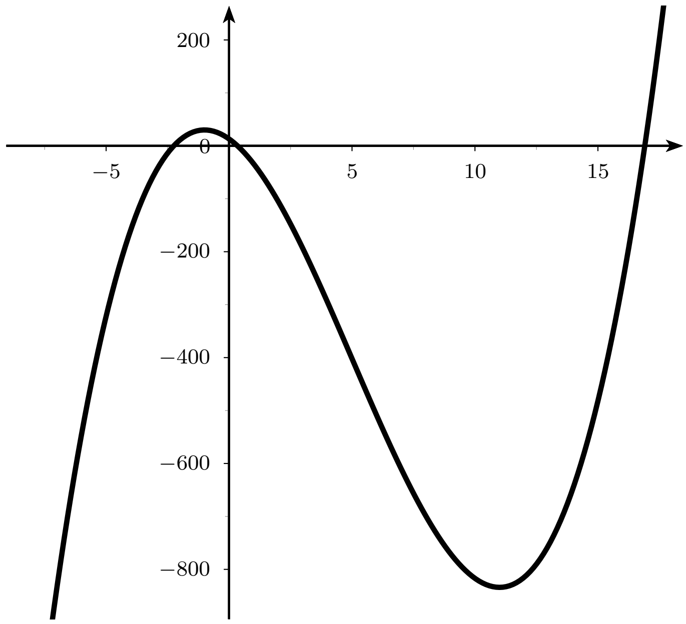
1) 101,2 francs ; 2) base : 2 m sur 2 m ; hauteur : 4 m ; coût minimal : 96 francs.

5.33

$3x + y - 6 = 0$

5.34

a) $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$



$ED(f) = \mathbb{R}$

Asymptote : aucune

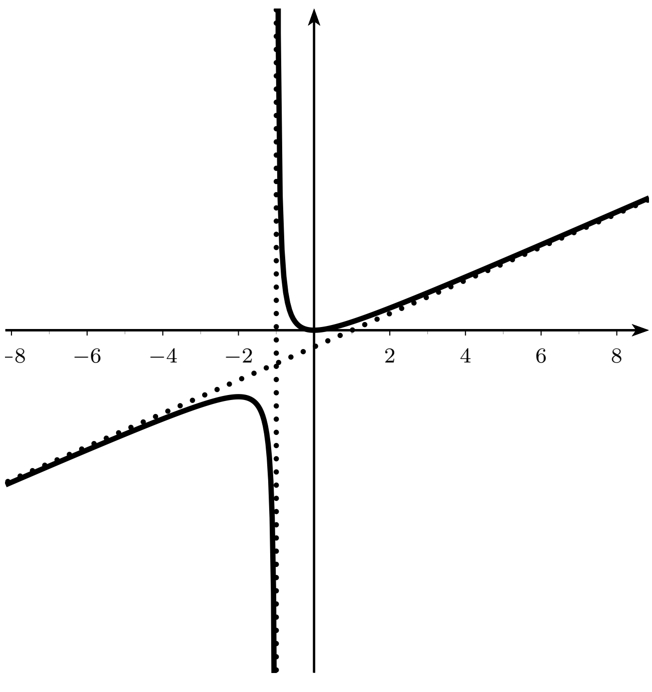
$f'(x) = 3(x+1)(x-11)$

$ED(f) = ED(f')$

Max : $M(-1; 30)$

Min : $N(11; -834)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$



$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Asymptotes : $x = -1, y = x - 1$

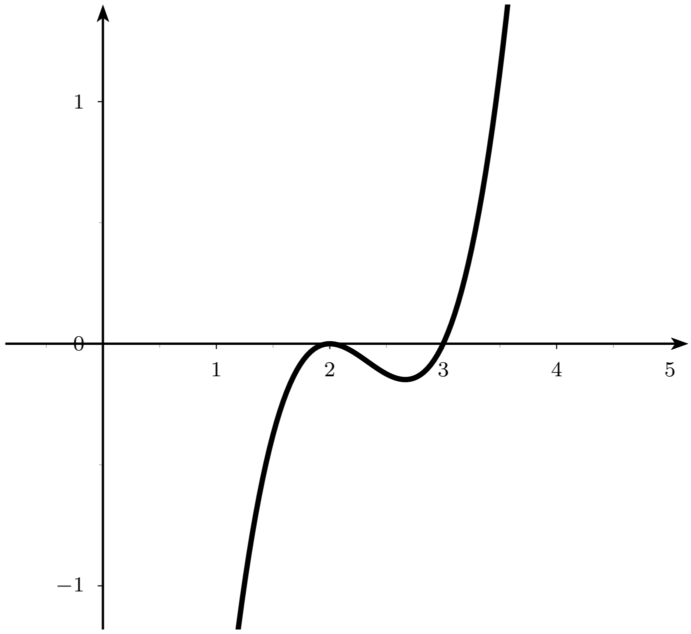
$f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$ED(f) = ED(f')$

Max : $M(-2; -4)$

Min : $N(0, 0)$

c) $f(x) = (x-2)^2(x-3)$



$ED(f) = \mathbb{R}$

Asymptote : aucune

$f'(x) = (x-2)(3x-8)$

$ED(f) = ED(f')$

Max : $M(2;0)$

Min : $N(\frac{8}{3};-\frac{4}{27})$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

$ED(f) = \mathbb{R}$

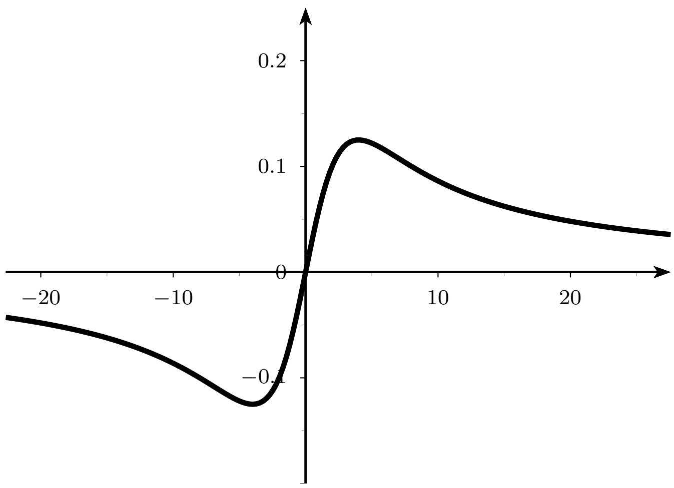
Asymptote : $y = 0$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+16}{(x^2+16)^2}$

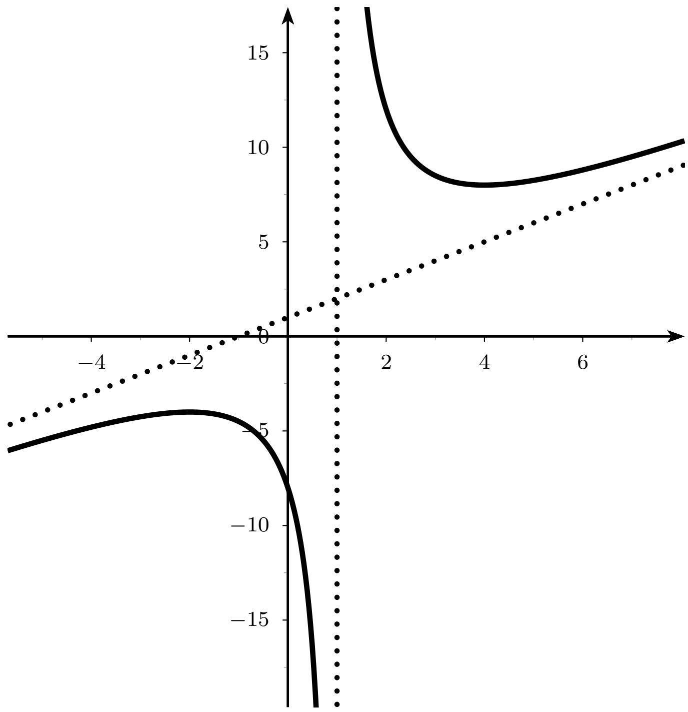
$ED(f) = ED(f')$

Max : $M(4;\frac{1}{8})$

Min : $N(-4;-\frac{1}{8})$



e) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1}$



$ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asymptotes : $x = 1, y = x + 1$

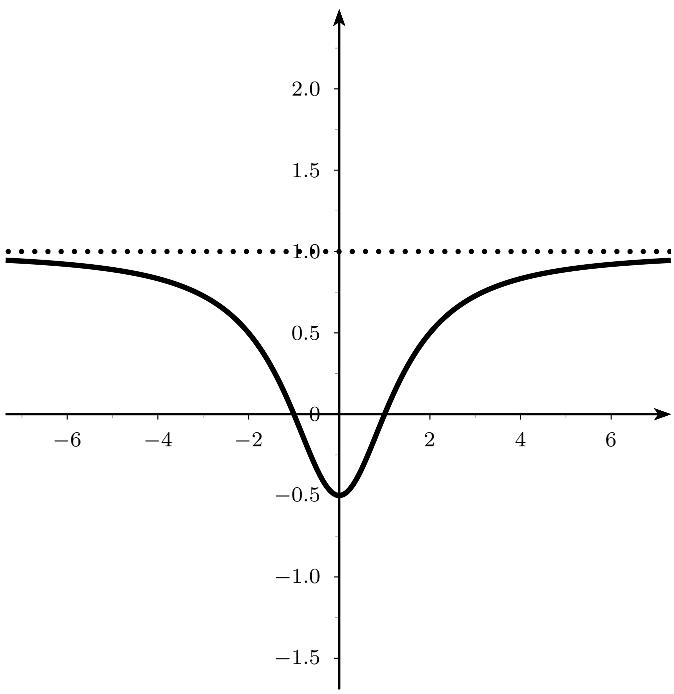
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$

$ED(f) = ED(f')$

Max : $M(-2; -4)$

Min : $N(4; 8)$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$



$ED(f) = \mathbb{R}$

Asymptote : $y = 1$

$f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$

$ED(f) = ED(f')$

Max : aucun

Min : $N(0; -\frac{1}{2})$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

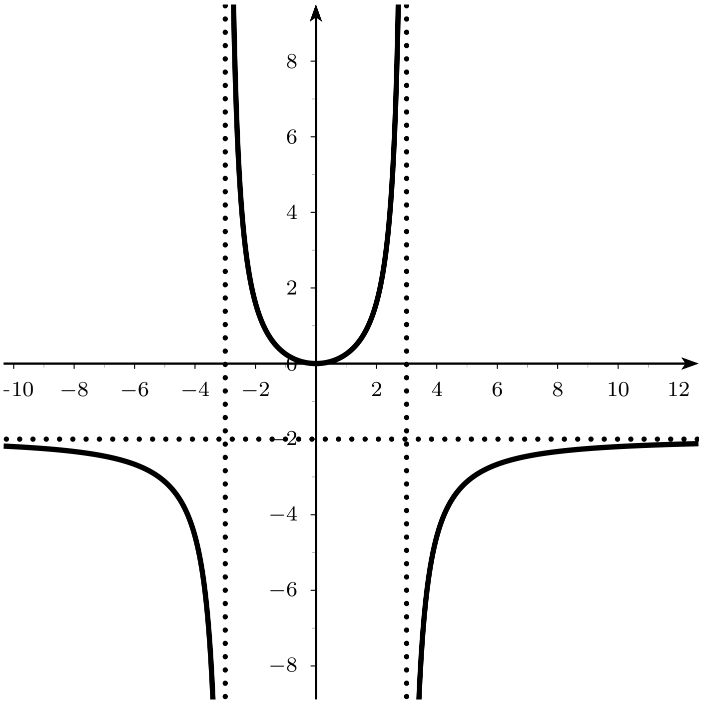
Asymptotes :
$x = -3, x = 3, y = -2$

$f'(x) = \dfrac{36x}{(9-x^2)^2}$

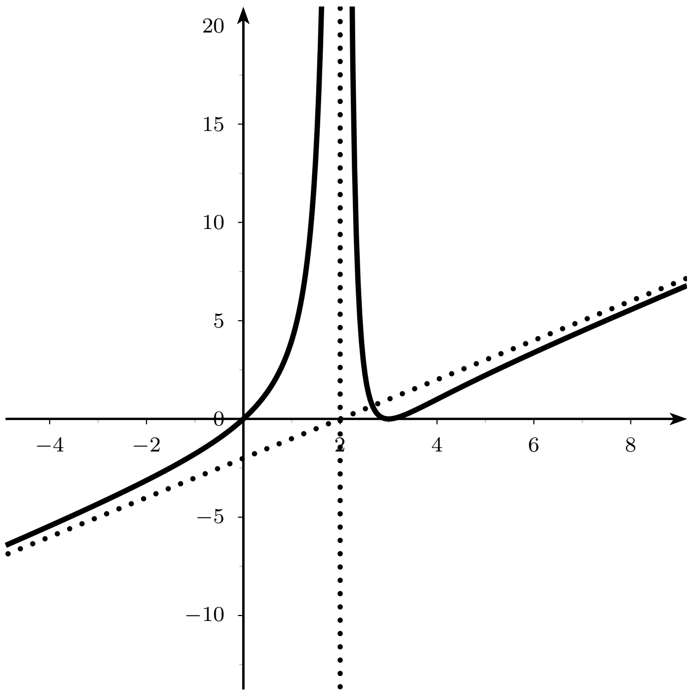
$ED(f) = ED(f')$

Max : aucun

Min : $N(0; 0)$



h) $f(x) = \dfrac{x \cdot (x-3)^2}{(x-2)^2}$



$ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Asymptotes : $x = 2, y = x - 2$

$f'(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 15x - 18}{(x-2)^3}$

$ED(f) = ED(f')$

Max : aucun

Min : $N(3; 0)$

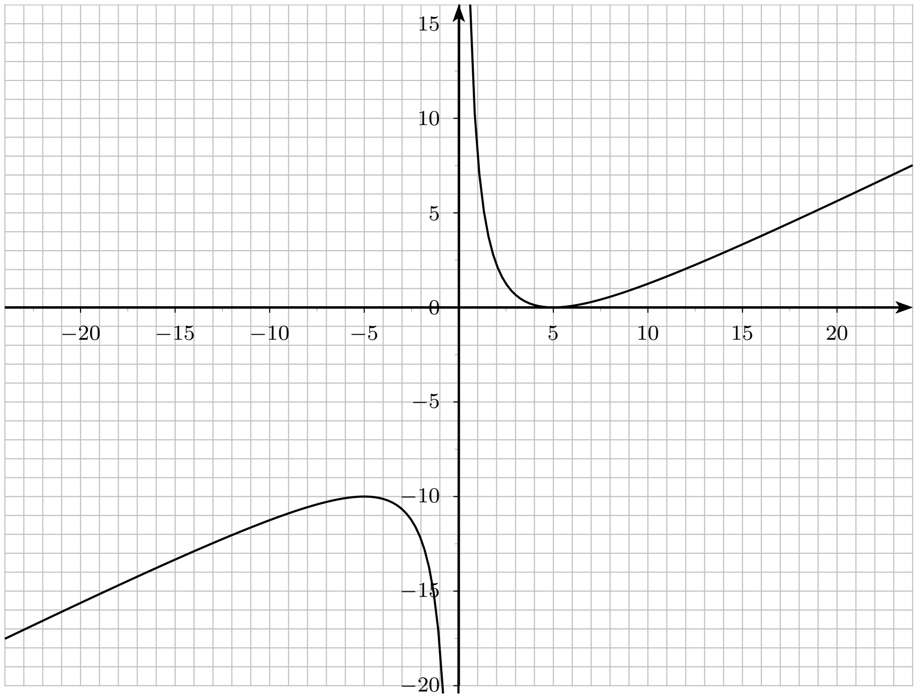
5.35

1) signe de f :

x		0		5	
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$

Croissance de f :

x		-5		0		5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$



2) signe de f :

x		-4		0		3	
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$+$

Croissance de f :

x		-4		0		3	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
f	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$