



Gymnase de Burier
Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz



EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2019

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU STANDARD

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Durée de l'épreuve : 4 heures

Consignes : Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés

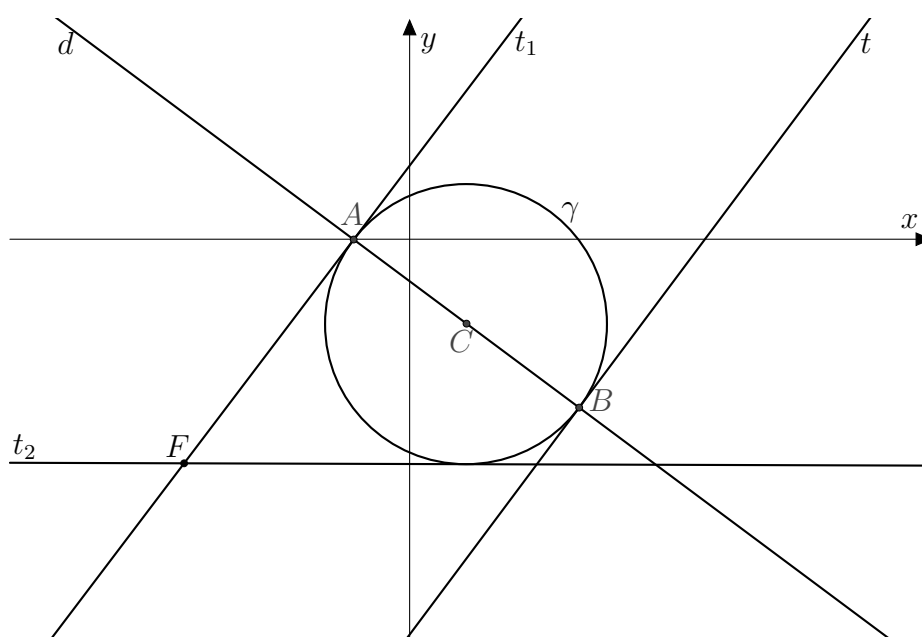
Matériel autorisé : Formulaires officiels non annotés

Calculatrices : TI 30 ECO RS

Problème 1 (23 points)

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère tous les éléments suivants (voir la représentation graphique ci-dessous) :

- le cercle γ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
- la droite d d'équation $3x + 4y + 6 = 0$
- le point $F(-8; -8)$
- les points A et B intersections de la droite d avec le cercle γ
- la tangente t à γ en B
- les tangentes t_1 et t_2 à γ issues de F .



- a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle γ .
- b) Prouver que la droite d passe par le centre C du cercle γ .
- c) Calculer les coordonnées des intersections A et B de la droite d et du cercle γ .
On nommera B le point dont l'abscisse est positive et A l'autre point.

En cas de doute, prendre $A(-2; 0)$ et $B(6; -6)$.

- d) Déterminer une équation cartésienne de la droite t , tangente à γ en B .
- e) Déterminer une équation cartésienne des tangentes t_1 et t_2 au cercle γ issues du point F .

En cas de doute, prendre $(t_1) : 4x - 3y + 8 = 0$ et $(t_2) : y + 8 = 0$.

- f) Calculer la valeur de l'angle aigu α entre les droites t_1 et t_2 .
- g) Vérifier que le point A appartient à l'une de ces deux tangentes.
- h) Déterminer une équation cartésienne du cercle δ circonscrit au triangle FAC .

Problème 2 (15 points)

Monsieur Gouache est un passionné d'art. Il se rend aujourd'hui à une vente aux enchères pour tenter d'y acheter une oeuvre de Picasso et une de Van Gogh.

La vente commence par le tableau de Picasso mais ses chances d'être l'acquéreur de ce bien ne sont que de 15%. Si, par malheur, il ne réussissait pas à acheter le Picasso, Monsieur Gouache ferait tout pour obtenir le Van Gogh qui lui serait attribué avec une probabilité de 95%.

Quoi qu'il en soit, ses chances de partir avec les deux tableaux sont de 3%.

- a) Représenter la situation avec un diagramme en arbre, en indiquant les probabilités sur chaque branche.
- b) Calculer la probabilité que Monsieur Gouache acquière le Van Gogh sachant qu'il a acheté l'oeuvre de Picasso.
- c) Calculer la probabilité que Monsieur Gouache n'obtienne aucun des deux tableaux qu'il convoite.
- d) Calculer la probabilité que Monsieur Gouache soit devenu l'heureux propriétaire du Picasso sachant qu'il n'a pas pu acquérir le Van Gogh.

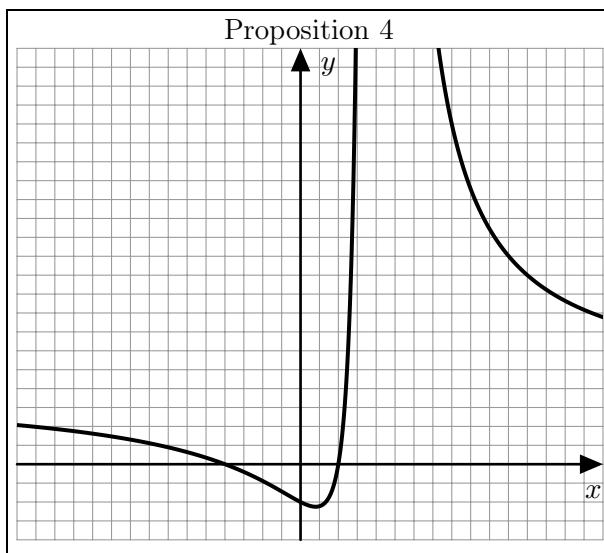
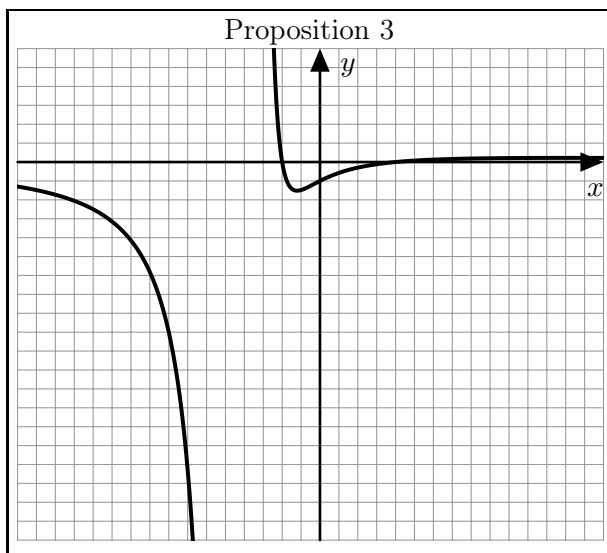
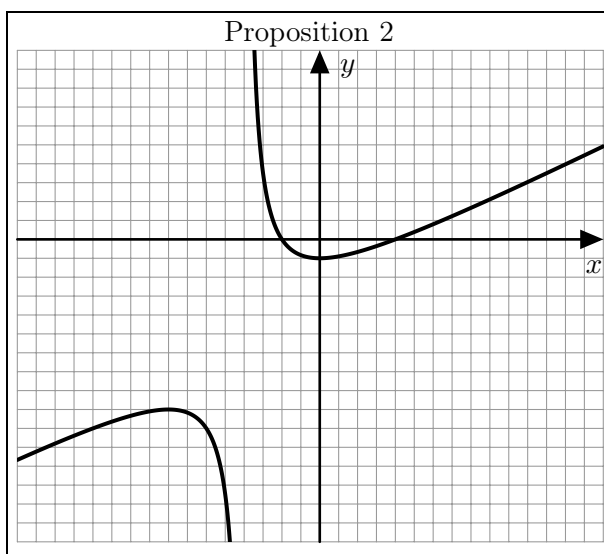
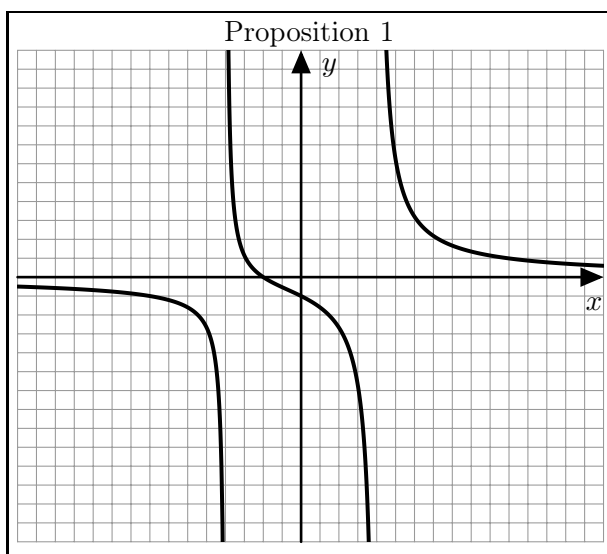
Au cas où Monsieur Gouache n'obtient aucun des deux tableaux et seulement dans cette situation, il mise sur un tableau de Monet et a une chance sur dix de l'obtenir.

- e) Calculer la probabilité que Monsieur Gouache devienne le propriétaire d'un seul de ces trois tableaux.

Problème 3 (36 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

- a) Donner son ensemble de définition.
- b) Étudier son signe.
- c) Déterminer par calculs une équation de chacune de ses asymptotes.
- d) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$
- e) Étudier la croissance de f , en précisant les coordonnées des éventuels extremums.
- f) Choisir parmi les quatre graphes proposés à la page 5 lequel correspond à la fonction f . Indiquer l'échelle sur chaque axe et tracer les asymptotes.
- g) Déterminer une équation de chacune des tangentes horizontales au graphe de f , et les représenter sur le graphique.
- h) On considère le point P du graphe de f dont l'abscisse vaut -3 . Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en P , et la représenter sur le graphique.
- i) Le graphe de f délimite avec l'axe Ox un domaine D fermé borné. Calculer l'aire de ce domaine (réponse arrondie à deux décimales).



Problème 4 (17 points)

Un avion d'acrobaties vole à une altitude constante avant de plonger vers le sol et de remonter ensuite. L'altitude (en mètres) de l'avion en fonction du nombre x de minutes écoulées depuis le début du plongeon est donnée par la fonction

$$f(x) = 4'000 - \frac{10'000 \ln(x + 1)}{x + 1}$$

- a) Quelle était l'altitude de l'avion au début du plongeon ?
- b) Prouver par calculs que la dérivée de $f(x)$ est

$$f'(x) = \frac{10'000 [\ln(x + 1) - 1]}{(x + 1)^2}$$

- c) Après combien de temps (à la seconde près) l'avion aura-t-il atteint son altitude minimale ?
- d) Vérifier par calcul que l'avion ne touchera pas le sol sachant qu'il survole une plaine située à 297 mètres d'altitude.
- e) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

