canton de vaud
LIBERTÉ ET PATRIE

Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2018

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU STANDARD

Nom : ____________________ Prénom : __________________ Classe : __________

Durée de l'épreuve	:	4 heures
Consignes	:	Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés
Matériel autorisé	:	Formulaires officiels non annotés
		Calculatrices : TI 30 ECO RS

Problème 1 (21 points)

Relativement à un repère orthonormé, on considère :

- le cercle γ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 7$,
- la droite d d'équation $x - y - 1 = 0$,
- les points $E\left(-1; \frac{7}{2}\right)$ et $F\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées du centre M et le rayon r du cercle γ.

b) Prouver que la droite d coupe le cercle γ en $B(3;2)$ et en un deuxième point C dont on calculera les coordonnées.

c) Déterminer une équation de la droite t_B tangente à γ au point B.

d) Déterminer une équation cartésienne du cercle γ' de diamètre EF.

e) Soit M' le centre du cercle γ'. Prouver que l'origine O du repère, M et M' sont alignés.

f) Prouver que le point $P(2;-2)$ appartient à la tangente t_B et déterminer une équation cartésienne de la deuxième tangente au cercle γ issue de P.

Problème 2 (21 points)

Résoudre les questions indépendantes suivantes :

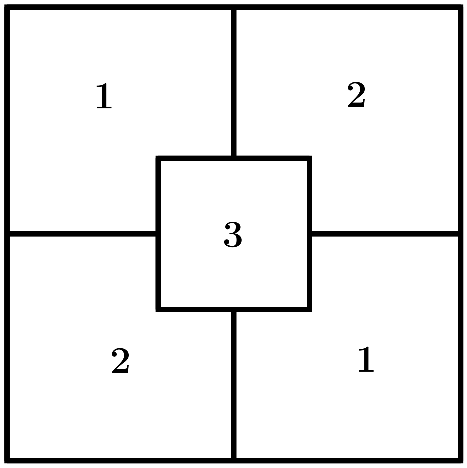
a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (2x-2) \cdot \sqrt{x}$ au point $T(4; ?)$ de cette courbe.

b) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\ln(x^3)}{x^2 - 4}$.
Déterminer l'ensemble de définition de g, puis déterminer une équation de ses éventuelles asymptotes verticales et horizontales.

c) Calculer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{3x+7}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Problème 3 (15 points)

Une cible pour un jeu de fléchettes est formée d'un grand carré de 60 cm de côté à l'intérieur duquel on a tracé un carré de 20 cm de côté, les deux carrés ayant le même centre. La surface de la cible située hors du carré central est divisée en 4 parties d'aires égales. Une fléchette lancée hors de la cible rapporte 0 point. Une fléchette plantée dans le carré central permet d'obtenir 3 points et les quatre coins de la cible permettent d'obtenir 1 ou 2 points (voir la représentation ci-contre).



On considère la suite des résultats obtenus avec 10 lancers successifs d'une fléchette. Par exemple, 1012331210, 3333333333 ou 0101010101.

a) Combien a-t-on de suites différentes de résultats avec 10 lancers ?

b) Parmi ces suites de résultats, combien comportent quatre 3, trois 2 et trois 1 ?

c) Parmi ces suites de résultats, combien ne comportent aucun 0 et au moins un 3 ?

On considère que Jean a, pour chaque lancer d'une fléchette, neuf chances sur dix de toucher la cible. De plus, lorsque la fléchette de Jean touche la cible, on suppose que la probabilité du résultat est proportionnelle à l'aire de la surface permettant d'obtenir ce résultat.

d) Prouver que Jean a, lors du lancer d'une fléchette, une probabilité de 10 % d'obtenir 3 points, de 40 % d'obtenir 2 points et de 40% d'obtenir 1 point.

e) Jean lance successivement deux fléchettes. Calculer la probabilité que Jean obtienne un total de 3 points avec ces deux fléchettes.

f) Jean lance successivement deux fléchettes et touche deux fois la cible. Calculer la probabilité que Jean obtienne un total de 2 points avec ces deux fléchettes.

Problème 4 (20 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les courbes c_1 et c_2 et la droite d suivantes :

— La courbe c_1 d'équation $(c_1) : y = 2 \cdot \sqrt{7-x}$

— La courbe c_2 d'équation $(c_2) : y = \sqrt{25-x^2}$

— La droite d d'équation $(d) : y = x+1$

Ci-dessous, on a représenté le domaine D_1 borné, fermé, limité par la droite d, la courbe c_1 et les deux axes Ox et Oy (domaine grisé de la figure 1), ainsi que le domaine D_2 borné, fermé, limité par l'axe Ox et les courbes c_1 et c_2 (domaine grisé de la figure 2).

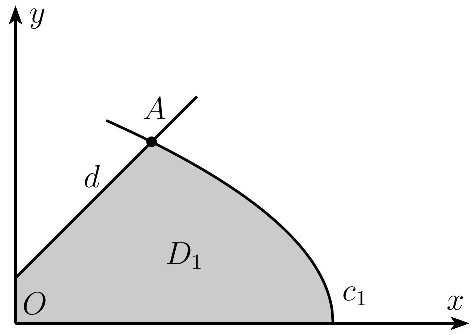


figure 1

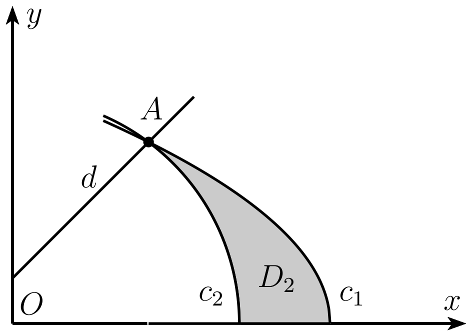


figure 2

a) Prouver que la droite d, les courbes c_1 et c_2 passent toutes par le point $A(3;4)$.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire géométrique du domaine D_1.

c) Déterminer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine D_2.

Problème 5 (21 points)

Une entreprise produit des casques audio. Le coût total de fabrication (en CHF) de x casques audio est donné par la fonction

$$T(x) \;=\; 20'000 \cdot e^{0{,}001x}\,.$$

a) Soit $C(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ le coût de fabrication d'un seul casque audio. Déterminer la quantité x à produire pour minimiser $C(x)$, puis calculer ce coût minimal à 5 centimes près.

b) On suppose que le prix de vente d'un casque audio est de CHF 80.- et on s'intéresse au bénéfice engendré par la vente des casques audio, à savoir la différence entre le montant total des ventes et le coût total de fabrication.

(i) Quel est, à 5 centimes près, le bénéfice obtenu si cette entreprise vend 500 casques audio ?

(ii) Soit $B(x)$ le bénéfice obtenu par la vente de x casques audio. Déterminer, à l'unité près, la quantité x à produire pour maximiser $B(x)$.