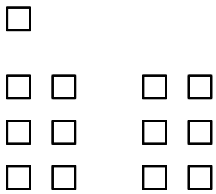
Problème 1. **(8 points)**



a) $P_{12} = 12! = \boxed{479'001'600}$

b) $P_6 \cdot P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 6! \cdot 2! = \boxed{1'036'800}$

c) Interprétation 1 :

F	H	F	H
F	H	F	H
F	H	F	H

$P_6 \cdot P_6 \cdot (P_2)^6 = 6! \cdot 6! \cdot 2^6 = \boxed{33'177'600}$

Interprétation 2 :

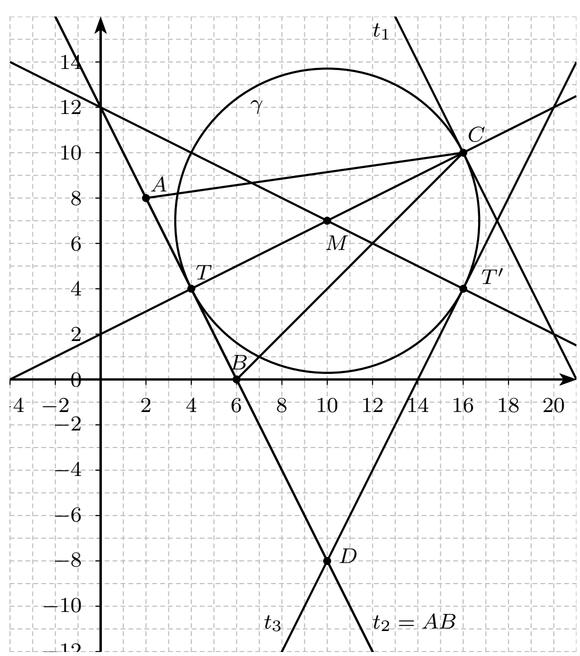
...	F	H	...
...	F	H	...
...	F	H	...

$6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 2^3 \cdot 6! = \boxed{82'944'000}$

Problème 2. **(31 points)**

Etant donné

$$A(2;8), \quad B(6;0), \quad C(16;10), \quad D(10;-8), \quad \gamma : x^2 + y^2 - 20x - 14y + 104 = 0.$$



a)

$$\begin{aligned} x^2+y^2-20x-14y+104=0 &\Leftrightarrow x^2-20x+y^2-14y=-104 \\ &\Leftrightarrow x^2-20x+100+y^2-14y+49=-104+100+49 \\ &\Leftrightarrow (x-10)^2+(y-7)^2=45 \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{M(10;7)} \quad \text{et} \quad \boxed{r=\sqrt{45}=3\sqrt{5}}$$

b) Méthode 1 : Avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$, on a

$$\sigma\big(\triangle ABC\big) = \frac{1}{2}\,|\text{dét}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})| = \frac{1}{2}\,|4\cdot 10-10\cdot(-8)| = \frac{120}{2} = \boxed{60}.$$

Méthode 2 : Tout d'abord, on remarque que

$$\sigma\big(\triangle ABC\big) = \frac{\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\delta(A;BC)}{2}.$$

On a

- $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$.
- Equation de la droite $BC=(B;\overrightarrow{BC})$: $a=10$, $b=-10$, $c=10\cdot 0-10\cdot 6=-60$;

$$\begin{aligned} (BC):\quad & 10x-10y-60=0 \\ \Leftrightarrow\ & x-y-6=0. \end{aligned}$$

Alors

$$\delta(A;BC) = \frac{|2-8-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Ainsi,

$$\sigma\big(\triangle ABC\big) = \frac{10\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = \boxed{60}.$$

c) Méthode 1 : montrer que $\delta(M;AB)=r=3\sqrt{5}$;

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$.
- Equation de la droite $AB=(A;\overrightarrow{AB})$: $a=-8$, $b=-4$, $c=4\cdot 0-(-8)\cdot 6=48$;

$$\begin{aligned} (AB):\quad & -8x-4y+48=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x+y-12=0. \end{aligned}$$

Alors

$$\delta(M;AB) = \frac{|2\cdot 10+7-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} = r.$$

CQFD

Méthode 2 : montrer que $\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, où $T(x;y)$ est le point de tangence ;

- $(AB) :\ 2x + y - 12 = 0$.
- $AB \cap \gamma$:

$$\begin{cases} 2x + y - 12 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 20x - 14y + 104 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ x^2 + y^2 - 20x - 14y + 104 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ x^2 + (-2x+12)^2 - 20x - 14(-2x+12) + 104 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ x^2 + 4x^2 - 48x + 144 - 20x + 28x - 168 + 104 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ 5x^2 - 40x + 80 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2x + 12 \\ (x-4)^2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= -2 \cdot 4 + 12 \\ x &= 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= 4 \\ x &= 4 \end{cases}$$

Donc le point de tangence est le point $T(4;4)$ et $\overrightarrow{MT} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Par le critère d'orthogonalité,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{AB} \;=\; -6 \cdot 4 + (-3) \cdot (-8) \;=\; -24 + 24 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \text{ est tangent à } AB. \end{aligned}$$

CQFD

d) $C \in \gamma$ car $16^2 + 10^2 - 20 \cdot 16 - 14 \cdot 10 + 104 = 0$.

Méthode 1 :

$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{n}_{MC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, le vecteur normal à $\overrightarrow{MC}$. Alors $t_1 = (C; \overrightarrow{n}_{MC}) : a = 6$, $b = 3$, $c = -3 \cdot 10 - 6 \cdot 16 = -126$;

$$\begin{aligned} (t_1) : \quad & 6x + 3y - 126 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{2x + y - 42 = 0}. \end{aligned}$$

Méthode 2 : par dédoublement,

$$(x-10)(x-10) + (y-7)(y-7) = 45$$

et en remplaçant par les coordonnées du point C, on obtient :

$$\begin{aligned} (t_1) : \quad & (16-10)(x-10) + (10-7)(y-7) = 45 \\ \Leftrightarrow \quad & 6x + 3y - 126 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{2x + y - 42 = 0}. \end{aligned}$$

e) On observe que

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}.$$

En particulier, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, d'où A, B et D sont alignés.

CQFD

f) Méthode 1 : On rappelle que le centre du cercle γ est le point $M(10; 7)$ et que son rayon est $r = 3\sqrt{5}$. A l'aide de la formule $y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$, on obtient

$$y - 7 = m(x - 10) \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}.$$

Puisque les tangentes cherchées passent par le point $D(10; -8)$, on a

$$\begin{aligned} -15 = m \cdot 0 \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad & 225 = 9 \cdot 5(m^2 + 1) \\ \Leftrightarrow \quad & 5 = \frac{225}{45} = m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & m^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m+2)(m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & m = -2 \quad \text{ou} \quad m = 2. \end{aligned}$$

- Si $m = -2$, l'équation de la tangente t_2 est de la forme $y = -2x + h$, et puisque t_2 passe par D, on a $-8 = -20 + h$, d'où $h = 12$. Ainsi,

$$\boxed{t_2 : 2x + y - 12 = 0}$$

- Si $m = 2$, l'équation de la tangente t_3 est de la forme $y = 2x + h$, et puisque t_2 passe par D, on a $-8 = 20 + h$, d'où $h = -28$. Ainsi,

$$\boxed{t_3 : \ 2x - y - 28 = 0}$$

Méthode 2 :

$$\boxed{t_2 = AB : \ 2x + y - 12 = 0}$$

Soit $T'(x; y)$ le point de tangence de la tangente t_3 au cercle γ passant par D. Alors

$$\overrightarrow{MT'} = \begin{pmatrix} x - 10 \\ y - 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DT'} = \begin{pmatrix} x - 10 \\ y + 8 \end{pmatrix}$$

et T' vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \overrightarrow{MT'} \cdot \overrightarrow{DT'} = 0 \\ \|\overrightarrow{MT'}\|^2 = 45 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-10)^2 + (y-7)(y+8) &= 0 \\ (x-10)^2 + (y-7)^2 &= 45 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 20x + 100 + y^2 + y - 56 &= 0 \\ x^2 - 20x + 100 + y^2 - 14y + 49 &= 45 \end{cases} \\
&\overset{E_2 \longrightarrow E_1 - E_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x^2 - 20x + 100 + y^2 + y - 56 &= 0 \\ 15y - 49 - 56 &= -45 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 20x + 100 + y^2 + y - 56 &= 0 \\ y &= 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 20x + 64 &= 0 \\ y &= 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-16)(x-4) &= 0 \\ y &= 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

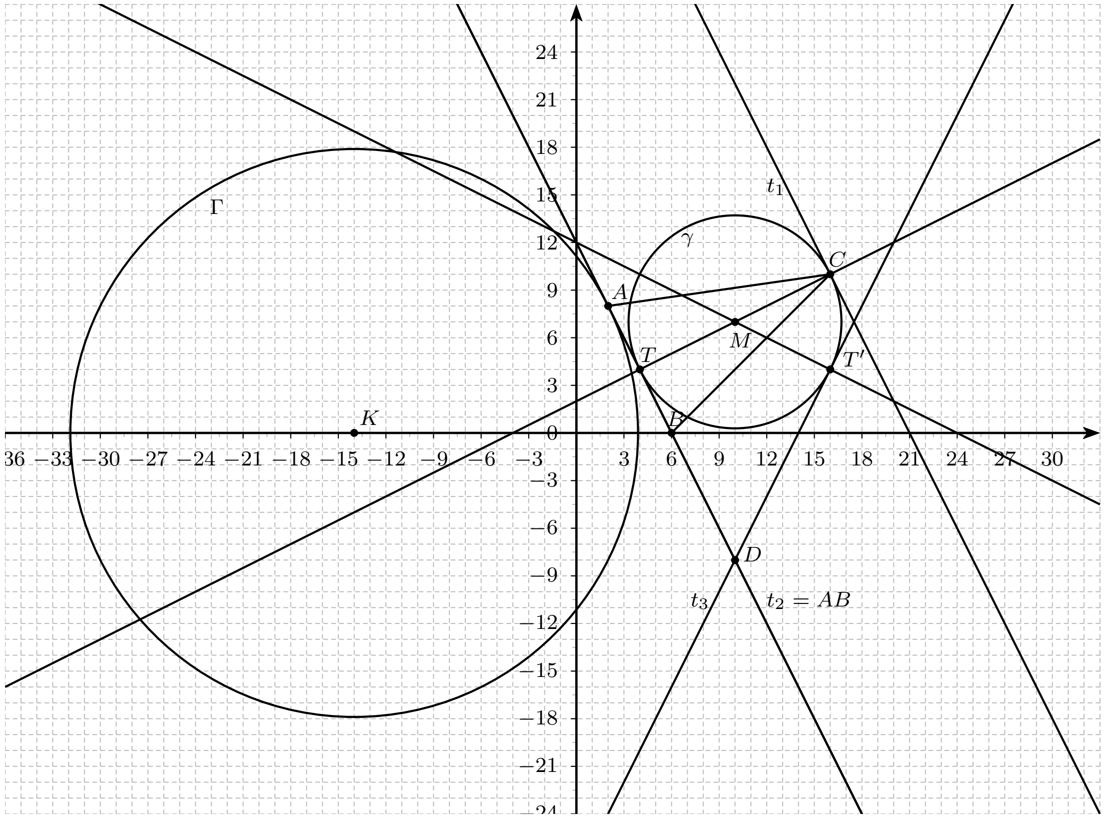
On en déduit que

$$T'(16; 4) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DT'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $t_3 = (D; \overrightarrow{DT'})$: $a = 12$, $b = -6$, $c = 6 \cdot (-8) - 12 \cdot 10 = -168$;

$$\begin{aligned} (t_3) : \quad & 12x - 6y - 168 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{2x - y - 28 = 0}. \end{aligned}$$

g) Soit $K(x;0)$ le centre du cercle cherché.



On rappelle que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Méthode 1 : On a $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -8 \end{pmatrix}$. Par le critère d'orthogonalité,

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} \; = \; (x-2)\cdot 4 + (-8)\cdot(-8) \; = \; 4x + 56 \; = \; 0,$$

d'où $x = -14$ et

$$K(-14;0) \text{ est le centre du cercle } \Gamma.$$

De plus, $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix}$ et le rayon de Γ est donné par

$$\|\overrightarrow{AK}\| \; = \; \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} \; = \; \sqrt{320}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Gamma : \; (x+14)^2 + y^2 = 320}.$$

Méthode 2 : Notons d la droite perpendiculaire à AB passant par A. En particulier, $d = (A; \overrightarrow{n}_{AB})$, où $\overrightarrow{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$. Alors $a = 4$, $b = -8$, $c = 8 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 56$;

$$\begin{aligned} d : \qquad & 4x - 8y + 56 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2y + 14 = 0. \end{aligned}$$

Or $K = d \cap O_x$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 14 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = -14.$$

Donc,

$$K(-14; 0) \text{ est le centre du cercle } \Gamma.$$

De plus, $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix}$ et le rayon de Γ est donné par

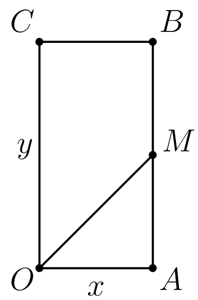
$$\|\overrightarrow{AK}\| \; = \; \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} \; = \; \sqrt{320}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Gamma : \; (x+14)^2 + y^2 = 320}.$$

Problème 3. (16 points)

a)



$$xy = 32 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{32}{x}$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2}y = \frac{32}{2x} = \frac{16}{x}$$

Théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^4 + 256}}{x} \end{aligned}$$

CQFD

b) Condition : $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 256)}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 512x}{x^4} \\ &= \frac{2x^5 - 512x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 256)}{x^4} = \frac{2x(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{x^4} \\ &= \frac{2(x-4)(x+4)(x^2+16)}{x^3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 + 16$		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$					$+\infty$	$\searrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, $x = 4$ et $y = \dfrac{32}{4} = 8$.

$\boxed{\text{Dimensions : } 4 \text{ m} \times 8 \text{ m}}$

c)

$$\begin{aligned} d(4) &= \frac{\sqrt{4^4+256}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{512}}{4} = \frac{16\sqrt{2}}{4} = \boxed{4\sqrt{2}\text{ m}} \end{aligned}$$

Par le théorème de Pythagore :

$$d_{min} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = \boxed{4\sqrt{2}\text{ m}}$$

Problème 4. (6 points)

Ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3-x}$:

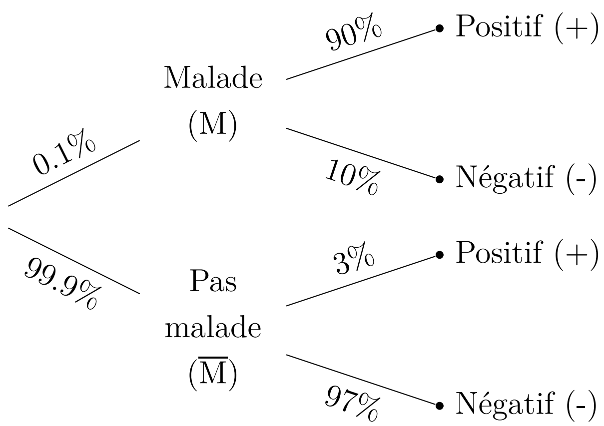
$$3-x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ED}(f) =]-\infty; 3].$$

Bornes d'intégration : $x=-1$ et $x=3$ (zéro de la fonction f)

Calcul du volume :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{3} \left(\sqrt{3-x}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} (3-x)\, dx \\ &= \pi \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} = \pi \left[\left(9-\frac{9}{2}\right) - \left(-3-\frac{1}{2}\right)\right] = \pi \cdot (12-4) = \boxed{8\pi\text{ u}^3} \end{aligned}$$

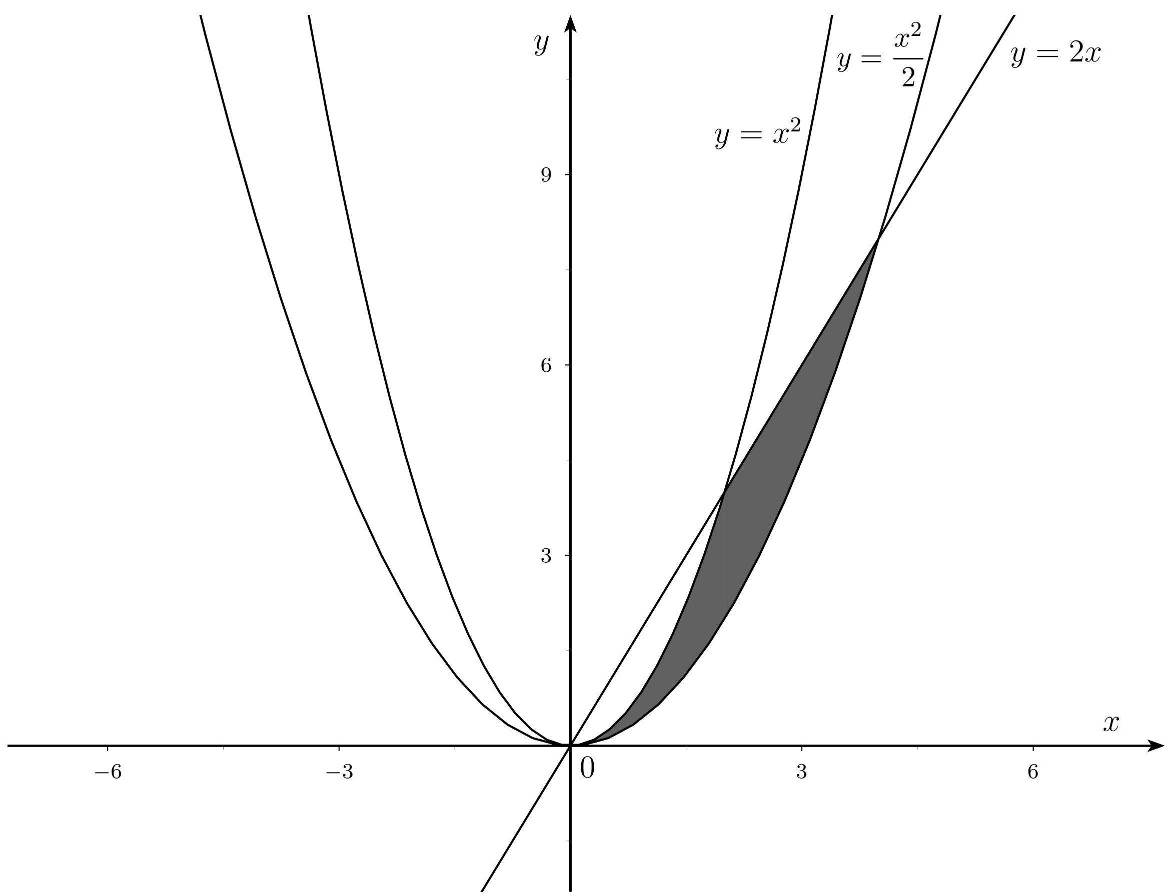
Problème 5. **(7 points)**



a) $$\begin{aligned} P(+) &= 0.1\% \cdot 90\% + 99.9\% \cdot 3\% \\ &= 0.0009 + 0.02997 \\ &= 0.03087 = \boxed{3.09\%} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(M|+) &= \frac{P(M \cap +)}{P(+)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.9}{0.03087} \\ &= 0.029 = \boxed{2.9\%} \end{aligned}$$

Problème 6. **(9 points)**



Recherche des bornes d'intégration :

$$① \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$② \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } x = 2$$

$$③ \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } x = 4$$

Calcul de l'aire :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} \sigma &= \underbrace{\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx}_{= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx} + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2}_{= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2} + \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_2^4 \\ &= \frac{4}{3} + \left(16 - \frac{64}{6}\right) - \left(4 - \frac{4}{3}\right) \\ &= 12 - \frac{48}{6} = \boxed{4 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx - \int_0^2 (2x - x^2)\, dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 16 - \frac{64}{6} - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = 12 - \frac{48}{6} = \boxed{4 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Problème 7. (21 points)

a) Ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$:

$$x^2 - 3x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(x-3) > 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,

$$\boxed{\mathrm{ED}(f) =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[}$$

b) Ensemble de définition de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{-x + 1}$:

$$\mathrm{ED}(g) = \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$$

Asymptote verticale :

$$\lim_{x \to 1} g(x) \overset{\frac{3 \cdot 2}{0}}{=} \infty \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\text{A. V. en } x = 1.}$$

Asymptote oblique $\Big($car deg(numérateur) = deg(dénominateur)+1$\Big)$:
Par division euclidienne, on obtient

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\text{A. O. en } y = -x - 3}$$

$$\begin{array}{rr|l} & x^2 + 2x + 3 & -x + 1 \\ \cline{3-3} - & x^2 - x & -x - 3 \\ \cline{1-2} & 3x + 3 & \\ - & 3x - 3 & \\ \cline{1-2} & 6 & \end{array}$$

c) Soit $y = f(x) = e^{2x+4}$. Alors

$$f'(x) \;=\; 2 \cdot e^{2x+4}$$

d'où

$$f'(-2) \;=\; 2 \cdot e^{0} \;=\; 2 \;=\; m, \text{ la pente de la tangente } t.$$

Méthode 1 : L'équation de la tangente t est de la forme $y = mx + h$, avec $m = 2$. De plus, t passe par le point $T(-2; 1)$ $(f(-2) = e^0 = 1)$:

$$1 \;=\; 2 \cdot (-2) + h \quad \Rightarrow \quad h \;=\; 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{y \;=\; 2x + 5.}$$

Méthode 2 : A l'aide de la formule

$$y - f(a) \;=\; f'(a)(x - a).$$

On a $f'(-2) = 2$ et $f(-2) = 1$. Ainsi,

$$y - 1 \;=\; 2(x + 2),$$

d'où

$$\boxed{y \;=\; 2x + 5.}$$

d) (i)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} \;=\; 0 \cdot 0 \;=\; \boxed{0}$$

(ii)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4} \overset{\substack{\frac{0}{0} \\ \text{BH}}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x} \;=\; \boxed{\frac{1}{4}}$$