EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

Juin 2024

CORRIGÉ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau standard

Problème 1 (27 points)

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - 4\,x - 30}{x^2 - 2\,x - 3}$$

a) $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - 4\,x - 30}{x^2 - 2\,x - 3} = \dfrac{2(x^2 - 2\,x - 15)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{2(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+1)}$

Ainsi $\boxed{ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\,;\,3\}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

b) Les zéros de la fonctions : -3 et 5.

Les valeurs interdites : -1 et 3.

x	$-\infty$		-3		-1		3		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+3$		$-$	0	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x) = \frac{2(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+1)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{4 points}}$

c) Calculons les limites en $x = -1$ et en $x = 3$.

- $x = -1$: $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) \underset{\frac{2\cdot(-6)\cdot 2}{0}}{=} \infty$ et la position : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty \end{cases}$

  $\boxed{\text{On a donc une asymptote verticale d'équation } x = -1.}$

- $x = 3$: $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) \underset{\frac{2\cdot(-2)\cdot 6}{0}}{=} \infty$ et la position : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = -\infty \end{cases}$

  $\boxed{\text{On a donc une asymptote verticale d'équation } x = 3.}$

- Comme le degré du polynôme au numérateur est égal au degré du polynôme au dénominateur, il y a une asymptote horizontale.

  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^2 - 4\,x - 30}{x^2 - 2\,x - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^2\,(1 + \dots)}{x^2\,(1 + \dots)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^2}{x^2} = 2$$

  $\boxed{\text{On a donc une asymptote horizontale d'équation } y = 2.}$ $\boxed{\text{3 points}}$

d) Utilisons $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

$u = 2\,x^2 - 4\,x - 30 \Rightarrow u' = 4\,x - 4 = 4\,(x-1)$

$v = x^2 - 2\,x - 3 \Rightarrow v' = 2\,x - 2 = 2\,(x-1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4\,(x-1)(x^2-2\,x-3) - (2\,x^2-4\,x-30)\cdot 2\,(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{2\,(x-1)\,[2\,x^2-4\,x-6-2\,x^2+4\,x+30]}{(x-3)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{2\,(x-1)\cdot 24}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{48\,(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

4 points

e) On établit le tableau des variations de la fonction $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	Min	↗	‖	↗	$+\infty$

Il y a un minimum en $x=1$. $f(1) = \dfrac{2-4-30}{1-2-3} = \dfrac{-32}{-4} = 8$.

Les coordonnées du minimum : $\boxed{M(1\,;\,8)}$. 4 points

f)
- Les coordonnées du point T : $f(2) = \dfrac{8-8-30}{4-4-3} = \dfrac{-30}{-3} = 10 \Rightarrow T(2\,;\,10)$.
- La pente de la tangente au point T : $f'(2) = \dfrac{48\cdot 1}{9\cdot 1} = \dfrac{48}{9} = \dfrac{16}{3}$.
- Une équation de la tangente t : $(t) : y = \frac{16}{3}\,x + h$.

  Par le point T : $10 = \frac{16}{3}\cdot 2 + h \Rightarrow h = 10 - \frac{32}{3} = \frac{-2}{3}$.

  Finalement $\boxed{(t) : y = \frac{16}{3}\,x - \frac{2}{3}}$. 4 points

g) Voir la page 9. 6 points

Problème 2 (6 points)

Pour calculer le volume, on utilise la formule : $V = \pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-9}^{9} \left(\sqrt{x^2+0{,}5}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-9}^{9} \left(x^2+\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}\right]_{-9}^{9} = \pi \left[\frac{2\,x^3}{6}+\frac{3\,x}{6}\right]_{-9}^{9} = \frac{\pi}{6}\left[2\,x^3+3\,x\right]_{-9}^{9} \\
&= \frac{\pi}{6}\left[(2\cdot 9^3+3\cdot 9)-(2\cdot(-9)^3+3\cdot(-9))\right] = \frac{\pi}{6}\,(1'485-(-1'485)) \\
&= \frac{\pi}{6}\cdot 2'970 = 495\,\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6 points}}$

Problème 3 (24 points)

a) $(\gamma_1) : x^2+y^2+10\,x-4\,y-71=0$. Complétons les carrés :

$$\begin{aligned}
x^2+10\,x \qquad +y^2-4\,y &= 71 \\
x^2+10\,x+25+y^2-4\,y+4 &= 71+25+4 \\
(x+5)^2+(y-2)^2 &= 100
\end{aligned}$$

γ_1 est un cercle de centre $C(-5\,;\,2)$ et de rayon $r=\sqrt{100}=10$. $\boxed{\text{2 points}}$

b) 1) $(3+5)^2+(8-2)^2 = 8^2+6^2 = 64+36 = 100 = r^2$ $\boxed{\text{1 points}}$

2) Pour déterminer une équation cartésienne de la tangente t au point A, on dédouble l'équation de γ_1.

$$\begin{aligned}
(\gamma_1) : (x+5)^2+(y-2)^2 &= 100 \\
(\gamma_1) : (x+5)(x+5)+(y-2)(y-2) &= 100 \\
(t) : (3+5)(x+5)+(8-2)(y-2) &= 100 \\
(t) : 8\,(x+5)+6\,(y-2) &= 100 \\
(t) : 8\,x+6\,y+40-12-100 &= 0 \\
(t) : 8\,x+6\,y-72 &= 0 \\
(t) : 4\,x+3\,y-36 &= 0
\end{aligned}$$

L'équation de t est donc $\boxed{(t) : 4\,x+3\,y-36=0}$ ou $\boxed{y=-\frac{4}{3}\,x+12}$. $\boxed{\text{3 points}}$

c) 1) $x_B = \dfrac{3+11}{2} = 7$ et $y_B = \dfrac{8+14}{2} = 11$. Donc $\boxed{B(7\,;\,11)}$. $\boxed{\text{1 points}}$

2) B est le centre du cercle γ_2. AB est un rayon de γ_2.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 = r_2$

$\boxed{(\gamma_2) : (x-7)^2+(y-11)^2 = 25}$ $\boxed{\text{3 points}}$

d) Calculons les coordonnées du point M milieu du segment CE :

$x_M = \frac{-5+1}{2} = -2$ et $y_M = \frac{2-6}{2} = -2$. Donc $M(-2\,;\,-2)$.

$$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc on a une équation de la médiatrice $(m) : 3\,x - 4\,y + c = 0$. Elle passe par le point M : $-6 + 8 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

$\boxed{(m) : 3\,x - 4\,y - 2 = 0}$ ou $\boxed{y = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}}$. $\boxed{\text{4 points}}$

e) Calculons la distance de m à B :

$$\delta(m\,,B) = \frac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot 11 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|21 - 44 - 2|}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Comme $\delta(m\,,B) = 5$ est égal au rayon de γ_2, la droite m est tangente au cercle γ_2.

$\boxed{\text{2 points}}$

f) Une équation cartésienne de la droite d passant par les points D et E :

$$(DE) : \frac{y - 14}{x - 11} = \frac{-6 - 14}{1 - 11} = \frac{-20}{-10} = \frac{2}{1} \Rightarrow (d) : 2\,(x - 11) = y - 14 \Rightarrow \boxed{(d) : 2\,x - y - 8 = 0}$$

$\boxed{\text{3 points}}$

g) Le triangle ADF est un triangle rectangle en F. En effet :

$$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FD} = -16 + 16 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{FD}$ $\boxed{\text{2 points}}$

h) L'aire du triangle ADF est égal à

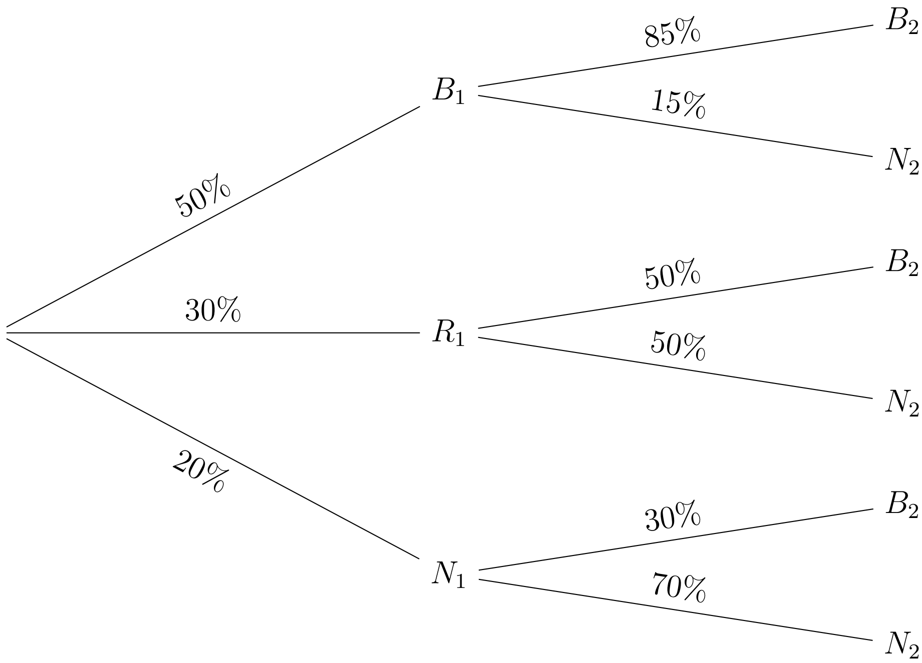
$$\text{Aire}(\Delta ADF) = \frac{1}{2} \left| det \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\,|-32 - 8| = \boxed{20}$$ $\boxed{\text{3 points}}$

Ou

$$\text{Aire}(\Delta ADF) = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{FA}|| \cdot ||\overrightarrow{FD}|| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\sqrt{5} \cdot 4\,\sqrt{5} = \boxed{20}$$

Problème 4 (13 points)

a) Le diagramme en arbre qui indique les probabilités sur chaque branche :



$\boxed{\text{3 points}}$

b) $P(R_1B_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15 = \boxed{15\%}$ $\boxed{\text{1 points}}$

c) $P(\text{a skié sur piste noire}) = P(N_1) + P(B_1N_2) + P(R_1N_2) = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}075 + 0{,}15 = 0{,}425 = 42{,}5\%$ $\boxed{\text{2 points}}$

(ou $1 - (P(B_1B_2) + P(R_1B_2)) = 1 - (0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}3 \cdot 0{,}5) = 1 - 0{,}575 = 0{,}425 = 42{,}5\%$)

d) $P(\text{a skié sur piste noire}) = 0{,}425 = \boxed{42{,}5\%}$

$P(\text{n'a pas skié sur piste noire}) = 1 - 0{,}425 = 0{,}575 = 57{,}5\%$

$P(\text{1 exactement sur 6 a skié sur piste noire}) = 6 \cdot 0{,}425^1 \cdot 0{,}575^5 \cong 0{,}1603 = \boxed{16{,}03\%}$

$\boxed{\text{2 points}}$

e) $$P(N_1|N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(B_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0.5 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}14}{0{,}365} \cong 0{,}3836 = \boxed{38{,}36\%}$$ $\boxed{\text{3 points}}$

f) $P(B_1) = 50\%$, $P(R_1) = 30\%$ et $P(N_1) = 20\%$ et de e) on a $P(N_2) = 0{,}365 = 36{,}5\%$

Ainsi $P(B_2) = 1 - 0{,}365 = 0{,}635 = 63{,}5\%$

($P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}635 = 63{,}5\%$)

Il y a eu le plus de skieurs sur la piste B_2. 63,5% des skieurs ont skié dessus.

On peut aussi affirmer directement que ce sera la piste B_2, car il y a moins de 50% de chances qu'un skieur ait skié sur une piste noire. Ainsi plus de la moitié des skieurs auront skié sur B_2, ce qui sera le pourcentage le plus élevé. $\boxed{\text{2 points}}$

Problème 5 (6 points)

a) Il y a $7! =$ $\boxed{\text{5'040 ordres différents}}$. $\boxed{\text{1 point}}$

b) Il y a 5 (=7-2) choix pour la tête de groupe, puis 4 (=7-3) choix pour la queue de groupe et enfin $5\,!$ choix pour les 5 skieuses du milieu.

On a donc : $5 \cdot 4 \cdot 5! =$ $\boxed{\text{2'400 ordres possibles}}$. $\boxed{\text{2 points}}$

c) Il y a $A_3^7 =$ $\boxed{\text{210 podiums possibles}}$. $\boxed{\text{1 point}}$

d) Il y a $C_3^7 =$ $\boxed{\text{35 combinaisons possibles}}$ (ou $C_4^7 = 35$). $\boxed{\text{2 points}}$

Problème 6 (11 points)

a) $N(x) = x^3 \cdot e^{-0{,}02\,x}$

$$N'(x) = 3\,x^2 \cdot e^{-0{,}02\,x} + x^3 \cdot (-0{,}02) \cdot e^{-0{,}02\,x} = 3\,x^2 \cdot e^{-0{,}02\,x} - 0{,}02\,x^3 \cdot e^{-0{,}02\,x}$$

$$= e^{-0{,}02\,x} \cdot x^2(3 - 0{,}02\,x) = 0{,}02\,e^{-0{,}02\,x} \cdot x^2 \left(\frac{3}{0{,}02} - x\right) = 0{,}02\,x^2\,(150 - x) \cdot e^{-0{,}02\,x}$$

$$= \frac{2}{100}\,x^2\,(150 - x) \cdot e^{-0{,}02\,x} = \frac{1}{50}\,x^2\,(150 - x) \cdot e^{-0{,}02\,x}$$ $\boxed{\text{4 points}}$

b) On cherche $N'(x) = 0$ pour obtenir les extrema.

Comme $e^{-0{,}02x} > 0$, on a que $N'(x) = 0$ lorsque $x^2(150 - x) = 0$.

Comme $x \in \mathbb{N}^*$, $x^2(150 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 150$.

x	$-\infty$		1		150		$+\infty$
$\frac{1}{50}\,x^2(150 - x)$				$+$	0	$-$	
$e^{-0{,}02x}$				$+$		$+$	
$N'(x)$				$+$	0	$-$	
Croissance de $N(x)$				$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Il y aura donc un extremum après 150 jours.

Grâce au tableau de croissance, on obtient qu'au 150ème jour le nombre d'écoutes sera maximum. $\boxed{\text{3 points}}$

c) $N(150) = 150^3 \cdot e^{-0{,}02\cdot 150} \cong 3'375'000 \cdot 0{,}049787 \cong 168'031{,}35$

Il y aura 168'031 écoutes au maximum en un jour. $\boxed{\text{1 point}}$

$(N(50) = 50^3 \cdot e^{-0{,}02\cdot 50} = 125'000 \cdot e^{-1} \cong 45'984{,}93)$

d) Lorsque $x \to +\infty$, on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \cdot e^{-0{,}02x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{0{,}02x}} =$ « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » est indéterminé.

On calcule alors avec Bernouilli - l'Hospital :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{0{,}02x}} \underbrace{\overset{\text{BH}}{=}}_{''\frac{+\infty}{+\infty}''} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{0{,}02 \cdot e^{0{,}02x}} \underbrace{\overset{\text{BH}}{=}}_{''\frac{+\infty}{+\infty}''} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{0{,}02^2 \cdot e^{0{,}02x}} \underbrace{\overset{\text{BH}}{=}}_{''\frac{+\infty}{+\infty}''}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{0{,}02^3 \cdot e^{0{,}02x}} = \frac{6}{+\infty} = 0_+$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x) = 0_+ = 0$

Lorsque $x \to +\infty$, le nombre d'écoutes tend vers 0 quotidiennement. $\boxed{\text{3 points}}$

Annexe du problème 1 — Étude de fonction Nom et Prénom : ....