



Gymnase de Burier - DEF | DGEP

Case postale 96  
Rte de Chailly 170  
1814 La Tour-de-Peilz



## EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2023

### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU STANDARD

---

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Classe : \_\_\_\_\_

---

Durée de l'épreuve : 4 heures

Consignes : Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés

Matériel autorisé : Formulaire officiel non annoté

Calculatrice TI 30 ECO RS

**Problème 1** (21 points)

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{x + 1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
- Étudier le signe de la fonction.
- Déterminer les équations des éventuelles asymptotes.
- Étudier la croissance de la fonction en donnant les coordonnées des extrema.
- Représenter graphiquement la fonction.

**Problème 2** (21 points)

On considère :

- la droite  $(d) : x - 2y + 19 = 0$
- le point  $P(3; -4)$
- la droite  $(e) : x + 3y - 36 = 0$

- Déterminer une équation de la droite  $s$  parallèle à  $d$  et passant par le point  $P$ .
- Déterminer une équation du cercle  $\gamma$  tangent aux deux droites  $d$  et  $s$ , sachant que son centre  $C$  est un point de la droite  $e$ .

*En cas de problème à la question b), pour la suite du problème utiliser*

$$(\gamma) : (x - 12)^2 + (y - 8)^2 = 45$$

- Calculer les coordonnées du point de tangence  $S$  de la droite  $s$  et du cercle  $\gamma$ .
- Déterminer une équation de la deuxième tangente  $t$  à  $\gamma$  issue du point  $P$  (autre que la droite  $s$ ).
- Montrer que le triangle  $PCS$  est rectangle.
- Déterminer une équation du cercle  $\alpha$  circonscrit au triangle  $PCS$ .

**Problème 3** (10 points)

Une station service décide de faire une action en baissant le prix de l'essence pendant un mois afin d'attirer de nouveaux clients. La fonction  $f$  représentant le nombre de litres d'essence vendus après  $x$  jours de cette promotion s'exprime par

$$f(x) = 60x^2 \cdot e^{-0,25x} + 1'500$$

- Déterminer le nombre de litres d'essence vendus juste avant la promotion ( $x = 0$ ).
- Combien de jours faut-il attendre pour vendre un maximum de litres d'essence ?
- Déterminer le nombre maximal de litres d'essence vendus en un jour.

**Problème 4** (7 points)

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

- Montrer que le carré de la fonction  $f$  vaut  $f^2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$ .
- On désigne par  $D$  le domaine fermé limité par la courbe  $y = f(x)$ , l'axe  $Ox$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = 2$ . Calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner  $D$  autour de l'axe  $Ox$ .

**Problème 5** (9 points)

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- Calculer la valeur exacte de l'aire géométrique du domaine fermé  $D$  limité par la courbe  $y = f(x)$  et l'axe  $Ox$ .

**Problème 6** (16 points)

Dès le mois de décembre 2022, la compagnie ferroviaire MOB, Montreux-Oberland-Bernois, propose une nouvelle liaison Montreux-Interlaken avec le train GoldenPass Express (GPX). En gare de Montreux, le matériel roulant à disposition est le suivant :

- deux types de locomotives qui se distinguent par leur couleur : blanche ou noire ;
  - deux types de wagons qui se distinguent par leur classe : 1<sup>re</sup> ou 2<sup>e</sup> classe.
- a) Un train GPX est composé d'une locomotive en tête de train suivie de quatre wagons. Combien y a-t-il de trains GPX possibles si :
- 1) il n'y a aucune restriction ;
  - 2) il doit y avoir un wagon de 1<sup>re</sup> classe et trois wagons de 2<sup>e</sup> classe ;
  - 3) il doit y avoir au moins un wagon de 1<sup>re</sup> classe.
- b) Au cours des cinq premiers mois d'exploitation, la direction a observé que la ponctualité de ses trains GPX dépendait beaucoup des conditions météorologiques. En effet, la neige ou la pluie tombent en grande quantité sur cette région.

Statistiquement la météo est défavorable pour un train GPX sur vingt. Les trains GPX sont à l'heure neuf fois sur dix si la météo est favorable alors que les trains GPX sont en retard une fois sur cinq si la météo est défavorable.

- 1) Représenter cette situation par un arbre.
- 2) Montrer que la probabilité qu'un train GPX soit à l'heure vaut 89.5%.
- 3) Sachant qu'un train GPX est en retard, calculer la probabilité que la météo soit défavorable.
- 4) Chaque jour, huit trains GPX circulent sur cette ligne. Calculer la probabilité qu'au plus un train GPX soit en retard.