EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

Juin 2022

CORRIGÉ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau standard

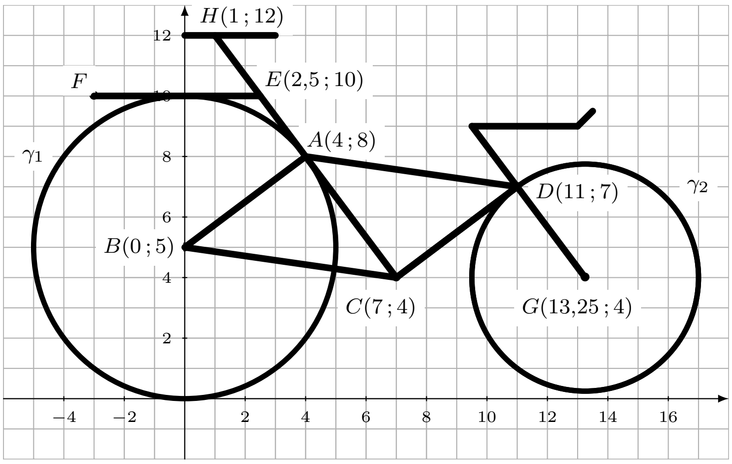
Problème 1 (20 points)

On donne les points C, D, E :

$C(7\,;4) \qquad D(11\,;7) \qquad E(2{,}5\,;10)$

et les cercles γ_1 et γ_2 :

- $(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 10y = 0$
- $(\gamma_2) : \left(x - \dfrac{53}{4}\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 = \dfrac{225}{16}$



a) $(\gamma_1) : x^2 + (y^2 - 10y + \ldots\ldots) = 0$

$(\gamma_1) : x^2 + (y-5)^2 = 25 \qquad$ Donc $\boxed{B(0\,;5)}$ et $\boxed{r = 5}$

b) $D(11\,;7) \in (\gamma_2)$:

$$\left(11 - \frac{53}{4}\right)^2 + \left(7 - 4\right)^2 = \frac{225}{16} \ ?$$

$$\frac{81}{16} + \frac{144}{16} = \frac{225}{16} \quad \text{OK!}$$

Variante 1 :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13{,}25 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{GD} = 4 \cdot (-2{,}25) + 3 \cdot 3 = 0 \qquad$ Donc $CD \perp GD$.

Donc $\boxed{CD \text{ est tangent à } \gamma_2 \text{ en } D}$.

Variante 2 :

$(CD) : 3x - 4y - 5 = 0$ et ainsi $\delta\left(G; (CD)\right) = \dfrac{|3 \cdot 53/4 - 4 \cdot 4 - 5|}{5} = 3{,}75 = r_2$

c)

$$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$y - 5 = m\,x \pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$E(2{,}5\,;10) \ \Rightarrow\ 10 - 5 = m \cdot 2{,}5 \pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$2 - m = \pm 2\sqrt{m^2+1}$$

$$4 - 4m + m^2 = 4m^2 + 4$$

$$3m^2 + 4m = 0$$
$$m\,(3m+4) = 0$$

- Si $m = 0$: $\boxed{(EF) : \; y - 10 = 0}$
- Si $m = -\dfrac{4}{3}$: $(EA) : \; y = -\dfrac{4}{3}x + h$

$$E(2{,}5\,;10) \;\Rightarrow\; 10 = -\frac{10}{3} + h \;\Rightarrow\; h = \frac{40}{3} \;\Rightarrow\; (EA) : \; y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$$
$$\boxed{(EA) : \; 4x + 3y - 40 = 0}$$

d) *Variante 1 :*

$$\overrightarrow{n_{EA}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \|\,\vec{n}\,\| = 5 = \text{rayon} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{BA} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{A(4\,;8)}$$

Variante 2 :

$$(AB) : 3x - 4y + 20 = 0 \;\Rightarrow\; A = (AB) \cap (EA)$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3x - 40 = 0 \\ 3x - 4y + 20 = 0 \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} 16x - 12x - 160 = 0 \\ 9x - 12y + 60 = 0 \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} 25x - 100 = 0 \\ 4x - 3x - 40 = 0 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \boxed{A(4\,;8)}$$

e) Par d) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et par c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$.

f) H, E et A sont alignés et $\|\,EH\,\| = 2{,}5$

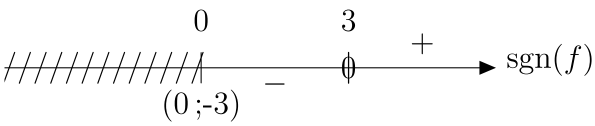
$$\overrightarrow{d_{EA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \|\,\vec{d}\,\| = 5 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\,\vec{d} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{H(1\,;12)}$$

Problème 2 (11 points)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) $\boxed{ED(f) = \mathbb{R}_+}$

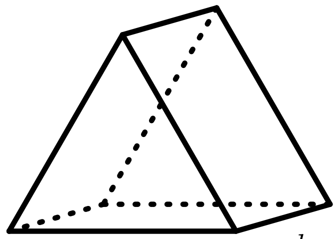
b) 

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty.$ Donc aucune AHD.

d) $f'(x) = 1\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(2\sqrt{x}+x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

e) $x = 1 \;\Rightarrow\; f(1) = -2e \;\Rightarrow\; T(1;-2e)$
$f'(1) = 0 \;\Rightarrow$ la tangente est horizontale $\Rightarrow \boxed{y = -2e}$

Problème 3 (18 points)



a) La base du prisme est un triangle équilatéral : $A_{base}(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$

Le volume du prisme : $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}h = 483 \Longrightarrow h = \dfrac{483 \cdot 4}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}x^2}$

L'aire d'une face : $A_{face}(x) = hx = \dfrac{1932x}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}x} = \dfrac{1932\sqrt{3}}{3x}$

L'aire totale de cet emballage : $A(x) = 2A_{base}(x) + 3A_{face}(x) = \dfrac{2\sqrt{3}x^2}{4} + \dfrac{3 \cdot 1932\sqrt{3}}{3x}$

Par conséquent, $\boxed{A(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{2} + \dfrac{1932\sqrt{3}}{x}}$

b) <u>Fonction</u> :

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}$$

<u>Dérivée</u> :

$$A'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}\right)' = \frac{2x\sqrt{3}}{2} - 1932\sqrt{3}x^{-2}$$

Par conséquent, $\boxed{A'(x) = \dfrac{\sqrt{3}(x^3 - 1932)}{x^2}}$

c) <u>Zéro de la dérivée</u> :
$A'(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 1932 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = 1932 \Longrightarrow x \cong 12.5$ cm.
<u>Condition</u> : $x > 0$
<u>Croissance</u> :

x	$-\infty$		0		12.5		$+\infty$
$\sqrt{3}(x^3 - 1932)$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$A'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$A(x)$			$\|+\infty$	$\searrow$	403	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Minimum</u> :

$$x \cong 12.5 \text{ et } A(12.5) \cong 403.$$

Alors la hauteur de cet emballage est donnée par

$$h = \frac{1932}{\sqrt{3}(12.5)^2} \cong 7.14.$$

Dimensions de cet emballage au millimètre près : $\boxed{x = 125 \text{ mm}, h = 72 \text{ mm}}$

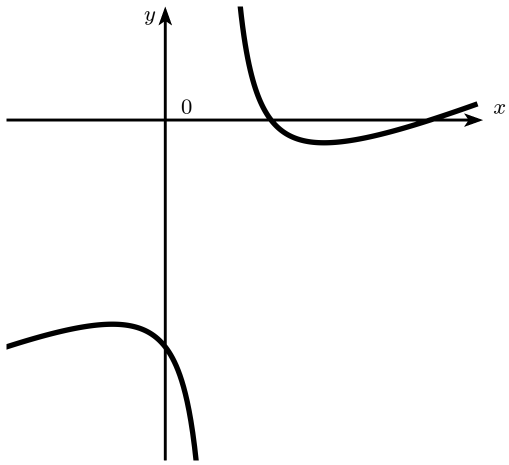
Problème 4 (8 points)

$y = \dfrac{(x-2)(x-5)}{x-1} \;\Rightarrow\;$ bornes de $x = 2$ à $x = 5$.

Par division euclidienne, $y = x - 6 + \dfrac{4}{x-1}$ et ainsi,

$\displaystyle\int_2^5 x - 6 + \frac{4}{x-1}dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + 4\ln(|x-1|)\right)\Big|_2^5 = \left(\frac{25}{2} - 30 + 4\ln(4)\right) - (2-12) =$

$-7{,}5 + \ln(256) \cong -1{,}95 \;\Rightarrow\;$ Aire géométrique de $\boxed{1{,}95\,u^2}$.



Problème 5 (8 points)

Le volume extérieur est un cylindre formé par la rotation de la droite a entre x_A et $x = 5$.

Sachant que $y_A = 6$ on résout

$$\frac{6}{3x-5} = 6 \;\Rightarrow\; 3x - 5 = 1 \;\Rightarrow\; x_A = 2$$

Ainsi,

$$V_{ext} = \pi \cdot 6^2 \cdot (5-2) = 108\pi\,u^3$$

Pour le volume intérieur,

$$V_{int} = \pi\int_2^5 \left(\frac{6}{3x-5}\right)^2 dx = 36\pi\int_2^5 (3x-5)^{-2}\,dx = 36\pi\left[-\frac{1}{3}(3x-5)^{-1}\right]_2^5$$
$$= 36\pi\left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{3}\right) = \frac{54}{5}\pi\,u^3$$

Le volume final est donné par $108\pi - \dfrac{54}{5}\pi = \boxed{\dfrac{486}{5}\pi\,u^3}$

Problème 6 (18 points)

Partie A

a) $3^5 = \boxed{243}$ planifications différentes.

b) $\boxed{\text{Une seule façon}}$, rester en bord de mer.

c) $2^5 = \boxed{32}$ planifications sans passer par la route.

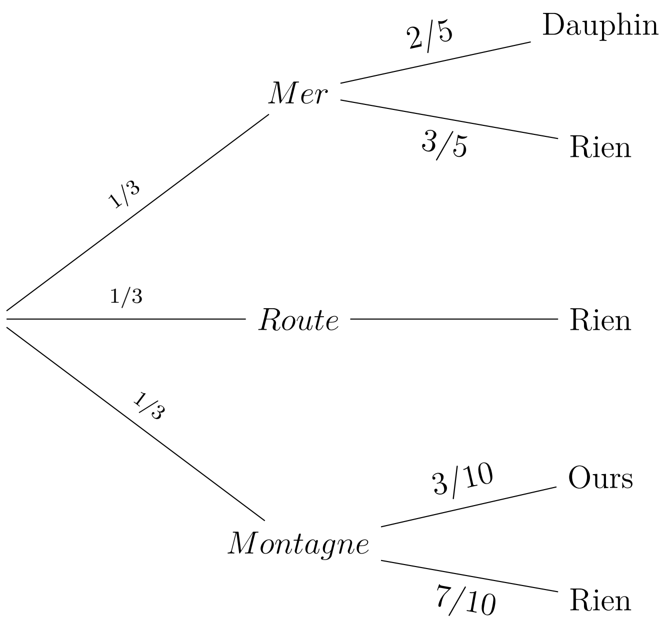
d) $\dfrac{5!}{2!\,2!} = \boxed{30}$ planifications avec 2 par la mer, 2 par les montagnes et 1 par la route.

Variante : $C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1$

e) $3^5 - 2^5 = \boxed{211}$ planifications en passant au moins une fois par les montagnes.

Partie B

a)



b) $P(\text{Mer} \cap \text{Dauphin}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15} \cong \boxed{13{,}33\,\%}$

c) $P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours}) = P(\text{Dauphin}) + P(\text{Ours}) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{30} \cong \boxed{23{,}33\,\%}$

d) $P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours} \,|\, \overline{\text{Route}}) = \dfrac{P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours})}{P(\overline{\text{Route}})} = \dfrac{7/30}{2/3} = \dfrac{7}{20} = \boxed{35\,\%}$

Variante : $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{7}{20}$

e) $P(\text{Au moins un dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer}) = 1 - P(\text{Aucun dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer})$

$= 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 = \boxed{92{,}224\,\%}$