Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2022

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

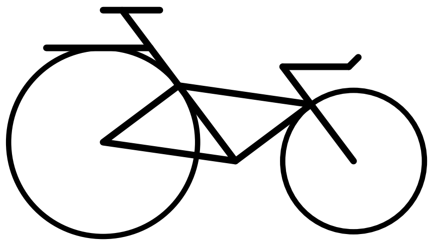
Niveau Standard

Nom : __________ Prénom : __________ Classe : ______

Durée de l'épreuve :	4 heures
Consignes :	Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés
Matériel autorisé :	Formulaires officiels non annotés
	Calculatrice : TI 30 ECO RS

Problème 1 (20 points)

On aimerait créer le logo du vélo ci-contre.

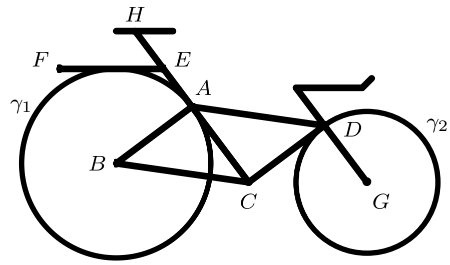


On donne les points C, D, E :

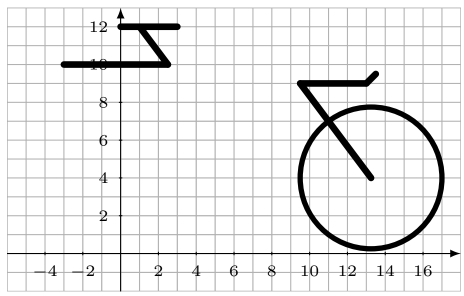
$C(7\,;4)$ $\qquad$ $D(11\,;7)$ $\qquad$ $E(2{,}5\,;10)$

et les cercles γ_1 et γ_2 :

- (γ_1) : $x^2 + y^2 - 10y = 0$
- (γ_2) : $\left(x - \dfrac{53}{4}\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 = \dfrac{225}{16}$



- B et G sont les centres des roues
- EF et EA sont tangents à γ_1
  et A est un des points de tangence
- le point H appartient à la selle
- les points H, E et A sont alignés
- $||\overrightarrow{EH}|| = 2{,}5$ unités



Ce graphique est à disposition si besoin.

a) Déterminer le centre B et le rayon r de γ_1.

b) Montrer que CD est tangent à γ_2 en D.

c) Déterminer les équations cartésiennes des tangentes EF et EA issues de E au cercle γ_1.

Pour les questions suivantes, en cas de doutes, utiliser (EA) : $4x + 3y - 40 = 0$.

d) Déterminer les coordonnées du point de tangence A.

e) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme.

f) Déterminer les coordonnées du point H.

Problème 2 (11 points)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x-3) \cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Étudier le signe de f.

c) Déterminer par calculs si f possède une asymptote horizontale.

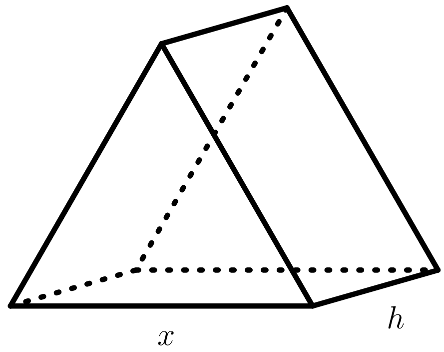
d) Montrer que

$$f'(x) = \frac{(2\sqrt{x} + x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

e) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

Problème 3 (18 points)

Un chocolatier prépare un nouveau produit dont l'emballage est un prisme droit à base triangulaire. La base de ce prisme est un triangle équilatéral. Afin de minimiser le matériau servant à la fabrication de l'emballage, le chocolatier cherche à déterminer les dimensions de ce prisme, sachant que son volume vaut 483 cm^3.



a) Montrer que l'aire totale de cet emballage, en cm^2, est donnée par :

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}$$

où x est la mesure, en cm, du côté du triangle équilatéral.

b) Montrer que

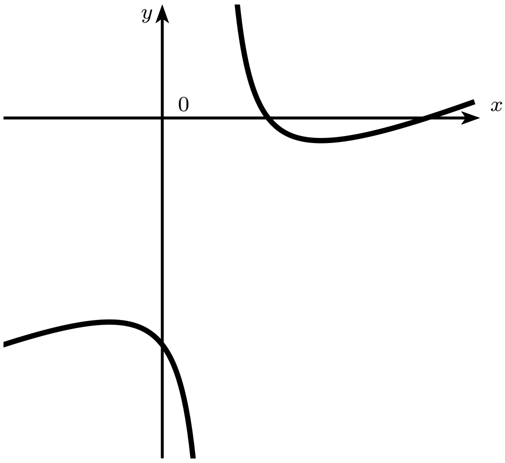
$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}\,(x^3 - 1932)}{x^2}$$

c) Déterminer les dimensions de cet emballage au millimètre près pour que l'aire totale du prisme à base triangulaire soit minimale.

Problème 4 (8 points)

Calculer l'aire géométrique du domaine fermé délimité par la courbe d'équation

$y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ et l'axe des abscisses.

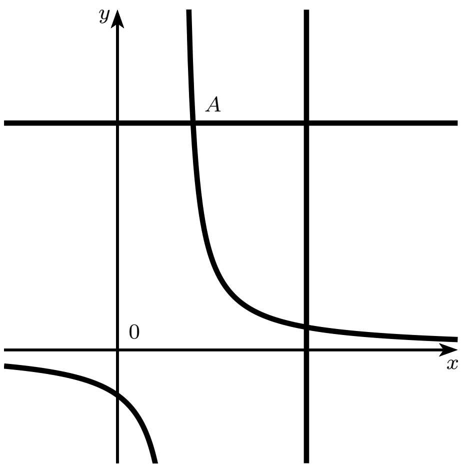


Problème 5 (8 points)

On considère :

- la courbe c d'équation $y = \dfrac{6}{3x - 5}$
- le point $A(...; 6)$ appartenant à la courbe c
- la droite horizontale a passant par A
- la droite b d'équation $x = 5$

Calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine fermé délimité par la courbe c et les deux droites a et b.



Problème 6 (18 points)

Simon planifie une randonnée de cinq étapes. L'ordre des cinq étapes est fixé à l'avance mais il peut, lors de chaque étape, passer par le bord de mer, par les montagnes ou par la route.

Partie A

a) De combien de façons différentes Simon peut-il planifier sa randonnée ?

b) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut uniquement passer par le bord de mer ?

c) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il ne veut pas passer par la route ?

d) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut faire 2 étapes par la mer, 2 étapes par les montagnes et 1 étape par la route ?

e) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut passer au moins une fois par les montagnes ?

Partie B

Par le bord de mer, Simon a 40% de chance de voir des dauphins. Par les montagnes, il a 30% de chance de voir un ours. Par la route, il n'a aucune chance de voir un animal. (Depuis le bord de mer on ne peut pas voir d'ours et depuis les montagnes on ne peut pas voir de dauphin.)

a) Représenter la situation de la première étape par un arbre des probabilités.

b) Quelle est la probabilité que Simon ait vu un dauphin lors de sa première étape ?

c) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dauphin ou un ours lors de sa première étape ?

d) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un des deux animaux lors de sa première étape sachant qu'il n'est pas passé par la route ?

e) Quelle est la probabilité que Simon ait vu au moins une fois un dauphin lors de sa randonnée sachant qu'il a fait toutes les étapes au bord de la mer ?