Chapitre 2

Probabilités

2.1 Notion intuitive de probabilité

Phénomènes et expériences aléatoires

- **Phénomène aléatoire** : phénomène qui, lorsqu'il est observé dans des conditions déterminées, ne conduit pas toujours au même résultat
- **Expérience aléatoire** : expérience faisant intervenir un phénomène aléatoire dont on peut déterminer au préalable l'ensemble des résultats possibles

Exemple 2.1.

a) *Lancer d'un dé*

b) *Lancer de deux pièces de monnaie*

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Univers

- **Univers** : ensemble U de tous les cas (ou issues) possibles
- On note $|U|$ le nombre d'issues contenues dans U

Exemple 2.2.

Décrire l'univers U des expériences aléatoires suivantes :

a) *Lancer d'un dé*

b) *Lancer de deux pièces de monnaie*

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Evénements

- Un **événement** A est un **sous-ensemble de cas possibles**, donc un sous-ensemble de U.
- L'événement est dit **élémentaire** s'il n'est formé que d'une **seule issue**.
- U est l'événement **certain**
- $\emptyset$ est l'événement **impossible**
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue commune, donc si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 2.3.

a) *Lancer d'un dé*
Soit l'événement A : *obtenir un nombre premier*
Enumérer A.

b) *Lancer de deux pièces de monnaie*
Soit l'événement B : *obtenir au moins une pièce avec un côté face*
Enumérer B.

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*
Soit l'événement C : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans*
Enumérer C.

Notion intuitive de probabilité

- La probabilité d'un événement est un nombre sans unité compris entre 0 et 1 (100%) exprimant les « chances » que l'événement se réalise.

Exemple 2.4.

a) *Lancer d'un dé équilibré*
Quelle est la probabilité de l'événement A : *obtenir un nombre premier* ?

b) *Lancer de deux pièces de monnaie équilibrées*
Quelle est la probabilité de l'événement B : *obtenir au moins une pièce avec un côté face* ?

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*
Quelle est la probabilité de l'événement C : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans* ?

2.2 Situation d'équiprobabilité

- On se trouve dans une **situation d'équiprobabilité** si l'on peut décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un univers U dont tous les cas ont les mêmes « chances » de se réaliser.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A vaut :

$$\boxed{p(A) \quad = \quad \frac{\text{nombre de cas contenus dans } A}{\text{nombre de cas contenus dans } U} \quad = \quad \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}}$$

Exemple 2.5.

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 36 cartes.

Quelles sont les probabilités des événements suivants :

A : *tirer deux cartes noires*

B : *tirer une figure (valets, dames, rois) exactement*

Propriétés dans une situation d'équiprobabilité

Soient A et B deux événements.

1) **Valeur d'une probabilité**

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

En particulier, $p(U) = 1$, où U est l'univers des cas possibles

2) **Probabilité d'un événement contraire**

Soit $\overline{A} = U - A$ l'événement comportant les cas non compris dans l'événement A.

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right)$$

3) **Probabilité d'une union d'événements**
Cas particulier : Si A et B sont des événements **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Cas général : Si A et B sont des événements quelconques

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exemple 2.6.

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules blanches indistinguables au toucher. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : *Tirer au moins une boule rouge*

B : *Tirer deux boules de même couleur*

Calculer ensuite $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$, puis vérifier la règle de la probabilité de l'union de deux événements.

2.3 Axiomes de probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers U.

A chaque événement A, une probabilité associe un nombre réel $p(A)$ satisfaisant les axiomes suivants (dits **axiomes de Kolmogorov**) :

1) $p(A) \geq 0$

2) $p(U) = 1$

3) Si A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)
alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés d'une probabilité

On retrouve les propriétés vues dans une situation d'équiprobabilité :

1) **Valeur de la probabilité d'un événement**
$0 \leq p(A) \leq 1$

2) **Probabilité de l'événement contraire**
$p(A) + p(\overline{A}) = 1$

$p(A) = 1 - p(\overline{A})$

3) **Probabilité d'une union de deux événements**
Pour deux événements A et B quelconques

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 2.7.

Une course de chevaux compte trois partants : A, B et C.

Les pronostiqueurs estiment que A a deux fois plus de chances de gagner que B et que B a trois fois plus de chances de gagner que C.

Selon les pronostiqueurs, quelle est la probabilité que C gagne ?

2.4 Probabilité conditionnelle

Exemple 2.8.

On considère un échantillon de 1500 élèves, dont 900 filles, qui ont effectué des études gymnasiales (avec obtention ou non d'une maturité)

On constate que 80 % des garçons ont obtenu leur maturité en trois ans, alors que cette proportion est de 90 % chez les filles.

a) On choisit un élève au hasard
Quelle est la probabilité que ce soit un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

b) On a choisi un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Probabilité conditionnelle de « A sachant B »

Soient A et B deux événements avec $p(B) \neq 0$.

- La **probabilité conditionnelle de *A* sachant que *B* est réalisé** (plus simplement, probabilité de A sachant B), notée $p(A\,/\,B)$, est définie par :

$$p(A\,/\,B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 2.1.

Cas particulier : si U est formé d'**issues équiprobables**, on a :

$$p(A\,/\,B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{cas communs à } A \text{ et à } B}{\text{cas contenus dans } B}$$

Exemple 2.9.

Nicolas a deux enfants. Je sais qu'il a au moins un garçon.

Quelle est la probabilité qu'il ait deux garçons ?

Exemple 2.10.

Lors du lancer de deux dés équilibrés, calculer la probabilité que la somme des deux dés valent 8 sachant que les deux dés indiquent des numéros différents.

Propriétés d'une probabilité conditionnelle

1) La probabilité conditionnelle vérifie les propriétés d'une probabilité non conditionnelle ; en particulier :
   - $0 \leq p(A\,/\,B) \leq 1$
   - $p(A\,/\,B) = 1 - p(\overline{A}\,/\,B)$
2) **Formule de Bays**

   $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B\,/\,A) = p(B) \cdot p(A\,/\,B)$

Exemple 2.11.

Une urne contient 2 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge :

a) En utilisant l'équiprobabilité.

b) En utilisant un arbre.

Exemple 2.12.

Une usine fabrique des pièces mécaniques. Chacune des pièces subit un contrôle de qualité qui décide d'accepter ou d'éliminer la pièce contrôlée. Lors de la fabrication, la probabilité qu'une pièce soit de bonne qualité est de 90 % ; de plus, lors du contrôle de qualité, la probabilité d'une erreur de jugement (pièce de bonne qualité éliminée ou pièce défectueuse acceptée) est de 5 % quelle que soit la pièce contrôlée.

Pour une pièce prise au hasard dans la production de la fabrique, calculer la probabilité qu'elle soit de bonne qualité si elle a été acceptée lors du contrôle.

2.5 Evénements indépendants

Un événement A est dit **indépendant** d'un événement B si le fait de savoir que l'événement B est réalisé ne modifie pas la probabilité que A se réalise :

A est indépendant de B si $p(A\,/\,B) = p(A)$

Propriété de l'indépendance

- Si A est indépendant de B, alors B est indépendant de A
- A et B indépendants $\iff$ $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Exemple 2.13.

On tire une carte dans un jeu de poker.

a) Soient les événements suivants :
A : *obtenir un as*
C : *obtenir un cœur*
Les événements A et C sont-ils indépendants ?

b) Soient les événements suivants :
R : *obtenir un roi*
F : *obtenir une figure (valet, dame ou roi)*
Les événements R et F sont-ils indépendants ?

2.6 Expérience binomiale

Exemple 2.14.

On lance un dé équilibré 8 fois de suite.

a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six

b) Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois six exactement.

Expérience binomiale

On répète n fois, dans les mêmes conditions et de manière indépendante, une épreuve à deux issues (notées 0 et 1) dont la probabilité d'obtenir 1 vaut p .

Probabilité d'obtenir k fois « 1 » (et donc $n - k$ fois « 0 »)

$$p(k \text{ fois « 1 »}) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

où C_k^n est le coefficient binomial $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Remarque 2.2.

Le coefficient binomial C_k^n compte dans l'arbre d'une expérience binomiale le nombre de branches qui comptent k fois « 1 » et $n - k$ fois « 0 »

2.7 Exercices

2.1

Une école de 200 élèves compte 80 filles, 50 porteurs de lunettes et 30 filles à lunettes.

a) On choisit une fille au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes.

b) On choisit un porteur de lunettes au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

c) On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon sans lunettes ?

d) On choisit deux élèves au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille sans lunettes et un garçon à lunettes ?

2.2

Pour connaître les intentions de vote d'une population, on a interrogé 100 personnes et on leur a demandé pour lequel des partis A, B et C elles voteraient. On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

	A	B	C
Hommes	13	21	19
Femmes	20	8	19

a) On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Quelle est la probabilité que la personne vote pour le parti A ?

b) On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle vote pour le parti A ?

c) On choisit au hasard un homme. Quelle est la probabilité qu'il vote pour le parti B ou C ?

d) On choisit au hasard une personne qui vote pour le parti B. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

e) On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle ne vote pas pour le parti B ?

f) On choisit au hasard une personne qui ne vote pas pour le parti A. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

2.3

Un sac contient trois objets rouges, quatre objets bleus et cinq objets jaunes. On tire simultanément trois objets au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : Les trois objets tirés sont jaunes,
B : Il y a un objet de chaque couleur ;
C : Aucun objet n'est rouge ;
D : Il y a au moins un objet rouge ;
E : Il y a au moins un objet bleu ;
F : Il y a au plus un objet bleu.

2.4

On tire simultanément au hasard 8 cartes d'un jeu de 32 cartes (on a retiré les six d'un jeu de 36 cartes). Calculer la probabilité des événements :
A : Parmi les 8 cartes, il y a l'as de cœur ;
B : Il n'y a aucun as parmi les 8 cartes ;
C : Il y a au moins un as parmi les 8 cartes.

2.5

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire au hasard simultanément 5 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : On tire 2 rois, 2 dames et 1 valet ;
B : On tire les quatre rois ;
C : Le roi de cœur se trouve dans le tirage.

2.6

On obtient un nombre de trois chiffres en jetant un dé équilibré trois fois de suite.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : On obtient un nombre formé de trois chiffres différents ;
B : On obtient un nombre qui se termine par 6 ;
C : On obtient un nombre qui contient exactement un chiffre 6 ;
D : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut 15 ;
E : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut au moins 15.

2.7

On sort d'un jeu les quatre as et les quatre rois. On tire ensuite au hasard simultanément deux cartes parmi ces huit cartes.

a) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as ?
b) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as rouges ?
c) Quelle probabilité a-t-on de tirer un as au moins ?
d) Quelle probabilité a-t-on de tirer un roi et un as rouge ?
e) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux cartes de couleurs différentes ?

2.8

On dispose d'un sac contenant 10 lettres différentes, soit 6 consonnes et 4 voyelles. Pour former un mot de quatre lettres, on tire successivement quatre fois une lettre du sac en remettant dans le sac à chaque fois la lettre tirée.
Calculer la probabilité d'obtenir un mot qui :

a) ne contient aucune voyelle ;
b) contient au moins une consonne ;
c) contient deux consonnes et deux voyelles ;
d) contient au moins une voyelle et au moins une consonne.

2.9

On lance un dé pipé à six faces. Les nombres pairs ont la même probabilité d'apparition. Les nombres impairs ont la même probabilité d'apparition. La probabilité d'obtenir l'un des nombres pairs est égale aux 75% de celle d'obtenir l'un des nombres impairs.
Quelle est la probabilité des événements :
A : On obtient 1 ?
B : On obtient 1 ou 6 ?

2.10

Les 8 faces d'un dé octaédrique sont numérotées de 1 à 8 et on a observé que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \text{ et } p(6) = p(7) = p(8) = 2 \cdot p(1)$$

On lance ce dé irrégulier. Quelle est la probabilité des événements :
A : On obtient 2 ?
B : On obtient 8 ?
C : On obtient l'un des chiffres 3 , 5 ou 8 ?

2.11

Arnaud, Buck et Charles participent à une course de natation. Arnaud et Buck ont la même probabilité de gagner et chacun d'eux a deux fois plus de chances de gagner que Charles. Calculer la probabilité pour que Buck ou Charles gagne la course.

2.12

En 1983, la Suisse avait une population de 6'410'000 habitants dont 947'000 étrangers. La même année les tribunaux prononcent 22'055 condamnations dont 6'615 concernaient des étrangers. On tire au hasard une personne dans la population. Quelle probabilité y a-t-il que la personne choisie :

a) ait été condamnée si elle est suisse ?
b) ait été condamnée si elle est étrangère ?
c) soit suisse et ait été condamnée ?
d) soit étrangère et ait été condamnée ?
e) soit suisse si l'on sait qu'elle a été condamnée ?
f) soit étrangère si l'on sait qu'elle a été condamnée ?

2.13

Une urne contient 10 boules blanches et 7 noires. On en extrait simultanément 2 boules.

a) Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?
b) Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
c) Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
d) Les deux boules tirées sont de même couleur ; quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux noires ?

2.14

On répartit sur les faces d'un dé vert et d'un dé rouge (les deux dés sont parfaitement équilibrés) les numéros de 1 à 12 de la manière suivante :

- sur chacune des 6 faces du dé vert, on a noté un des numéros suivants : 1, 3, 7, 8, 10, 11 ;
- sur chacune des 6 faces du dé rouge, on a noté un des numéros suivants : 2, 4, 5, 6, 9, 12.

a) On lance les deux dés simultanément. Calculer la probabilité :
   i) d'obtenir deux nombres pairs ;
   ii) d'obtenir au moins un nombre pair ;
   iii) d'obtenir un nombre pair et un nombre impair.

b) Jean décide de jouer avec le dé vert et Pierre avec le dé rouge. Jean et Pierre lancent chacun leur dé ; le joueur qui a obtenu le plus grand numéro a gagné la partie.
   i) Calculer la probabilité que Jean gagne la partie.
   ii) Sachant que Jean a gagné la partie, calculer la probabilité qu'il ait obtenu un 10.

2.15

Les billets d'une loterie sont émis par séries de dix. Chaque série contient trois billets gagnants.

a) Une personne achète trois billets d'une même série. Quelle est la probabilité que l'un des billets au moins soit gagnant ?

b) A présent, chaque billet acheté provient d'une série différente de dix billets. On achète trois billets. Quelle est la probabilité que l'un des trois billets au moins soit gagnant ? Quelle est la probabilité qu'un billet exactement soit gagnant ?

c) On signale qu'un billet coûte 2 francs. Si le billet est gagnant, on obtient un prix de 5 francs. On se propose de jouer de la façon suivante sur une même série de dix billets : on achète un billet ; s'il est perdant, on arrête. S'il est gagnant, on en rachète un et ainsi de suite (le joueur sait qu'il n'y a que 3 billets gagnants dans une série de 10).
   i) Décrire l'ensemble des événements à l'aide d'un arbre avec les probabilités correspondantes.
   ii) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 francs de plus après avoir joué qu'avant ?

2.16

On dispose d'un paquet de douze cartes contenant les quatre valets, les quatre dames et les quatre rois (les figures) de pique, carreau, trèfle et cœur (les familles). On tire simultanément trois cartes de ce paquet. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) trois valets ;

b) trois figures différentes ;

c) trois cartes de trois familles différentes ;

d) trois rois sachant que l'on a tiré trois mêmes figures ;

e) la dame de pique sachant que l'on a tiré deux rois exactement.

2.17

Une boîte A contient 8 pièces dont 3 sont défectueuses et une boîte B en contient 5 dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce dans chaque boîte.

a) Calculer la probabilité qu'aucune des pièces ne soit défectueuse.

b) Calculer la probabilité qu'une seule pièce soit défectueuse.

c) Si une seule pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte A ?

2.18

Trois marques A, B et C de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43 %, 34 % et 23 %. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple (S) ou à trois vitesses (V) : 35 % des tétines de la marque A sont simples, ainsi que 25 % de la marque B et 47 % de la marque C. Un jeune père paniqué achète au hasard un biberon. Il constate que ce biberon a une tétine simple. Quelle est la probabilité qu'il soit de marque C ?

2.19

Deux urnes notées U_1 et U_2 contiennent 3 boules rouges, 2 boules vertes pour U_1 et 1 boule rouge, 1 boule verte pour U_2.
On tire une boule de U_1, puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,

b) que cette boule soit rouge sachant que la première boule tirée était rouge,

c) que la première boule tirée ait été rouge si, au second tirage, on a tiré une boule rouge.

2.20

Dans un atelier, il y a trois machines. Pendant une journée, la première tombe en panne avec une probabilité de 5 %, la deuxième avec une probabilité de 10 % et la troisième avec une probabilité de 15 %. Quelle est la probabilité :

a) d'avoir au cours d'une journée exactement une machine en panne ?

b) d'avoir au cours d'une journée exactement deux machines en panne ?

c) de n'avoir au cours d'une journée aucune machine en panne ?

2.21

Pour faire une enquête dans un quartier d'une ville, on envoie par la poste à 10 personnes un questionnaire à remplir.
On estime à 30 % la probabilité que le questionnaire soit retourné. Calculer la probabilité de recevoir en retour :

a) 10 questionnaires ;

b) au plus un questionnaire ;

c) plus de 7 questionnaires.

2.22

Marco est un joueur de basket-ball qui réussit 90 % de ses lancers francs.
Calculer la probabilité qu'il réussisse :

a) ses 10 prochains lancers francs ;

b) exactement 5 des 10 prochains lancers francs ;

c) au moins 7 de ses 10 prochains lancers francs.

2.23

Un test sanguin assure avec une fiabilité de 95 % la détection d'une certaine maladie lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, le test indique aussi un résultat positif pour 1 % des personnes saines. Si 0,5 % de la population porte effectivement cette maladie, quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif ?

2.24

Dans un village de 150 habitants, 100 ont été vaccinés contre la grippe. Lors d'une épidémie, on constate que 10 personnes ont été malades alors qu'elles avaient été vaccinées et que 10 autres ont aussi été malades alors qu'elles n'avaient pas été vaccinées.

a) Calculer la probabilité qu'une personne vaccinée attrape la grippe.

b) Calculer la probabilité qu'un habitant de ce village attrape la grippe.

c) Calculer la probabilité qu'une personne ait été vaccinée si elle a la grippe.

2.25

Trois machines A, B et C produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces d'une usine. Chacune de ces machines fabrique respectivement 3 %, 4 % et 5 % de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce fabriquée par cette usine : elle est défectueuse. Calculer la probabilité que cette pièce ait été produite par la machine A.

2.26

a) Chez un marchand de fruits, un avocat sur 10 en moyenne est pourri. Une cliente en achète 10.

   i) Calculer la probabilité qu'elle ait au moins un avocat pourri.

   ii) Calculer la probabilité qu'elle ait exactement un avocat pourri.

b) Les avocats de ce marchand proviennent de trois pays A, B et C à raison de respectivement 50 %, 30 % et 20 %. Il constate que 1 % des avocats fournis par le pays A sont pourris, 5 % pour B et 10 % pour C. Une cliente achète un avocat.

   i) Calculer la probabilité qu'il soit pourri.

   ii) Il est pourri. Calculer la probabilité qu'il provienne du pays A.

2.27

Lors d'un test d'adresse, on dispose de 3 fléchettes que l'on doit lancer en direction d'une cible. On réussit le test (et on arrête de lancer) dès qu'une fléchette a atteint le centre de la cible ou que deux fléchettes ont atteint la cible. Une personne se présente au test. Pour celle-ci, on estime la probabilité d'atteindre le centre de la cible avec une fléchette à

0,25 alors que la probabilité d'atteindre la cible ailleurs qu'au centre est estimée à 0,50 (la probabilité de rater la cible est donc estimée à 0,25).

a) Quelle est la probabilité de réussir le test ?

b) Si cette personne réussit le test, quelle est la probabilité qu'une seule fléchette ait atteint la cible ?

c) Trois personnes pour lesquelles on estime les probabilités comme pour celle ci-dessus se présentent au test. Quelle est la probabilité

   i) qu'aucune d'entre elles ne le réussisse ?

   ii) qu'au moins l'une d'entre elles ne le réussisse pas ?

Exercices de révision

2.28

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2014]
Un boulanger fait une étude sur sa clientèle. Il constate que 30 % de ses clients sont des enfants, 20 % des adolescents, le reste étant composé d'adultes.
Un dixième des adolescents qui entrent dans la boulangerie repartent avec une baguette à la main. La proportion d'acheteurs de baguette est, quant à elle, de 80 % chez les adultes et de 65 % chez les enfants.

a) Etablir l'arbre représentant la situation.

b) Un client entre dans la boulangerie. Montrer que la probabilité qu'il achète une baguette est de 61,5 % .

c) Un client est reparti sans acheter de baguette. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un adolescent ?

d) Un groupe de sept enfants entre dans la boulangerie. Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux achètent une baguette ?

e) Combien de clients la boulangerie doit-elle accueillir pour que la probabilité qu'au moins une baguette se vende soit supérieure à 99,9 % ?

Le boulanger s'intéresse de plus près aux achats des adultes qui constituent une grande part de sa clientèle. Il constate que les deux articles les plus achetés par ces derniers sont les baguettes et les croissants. Il estime que 56 % des adultes repartent avec à la fois une baguette et un croissant, alors que seulement 3 % des adultes repartent sans croissant, ni baguette.

f) Etablir le diagramme de Venn représentant la situation.

g) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète un croissant sans acheter de baguette ?

h) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète une baguette, sachant qu'il achète un croissant ?

2.29

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2013]
Un client désirant louer une voiture auprès de la société Bonoto doit formuler sa requête en précisant deux critères :

- la puissance du véhicule : deux catégories possibles A ou B ;
- l'équipement : avec climatisation ou sans climatisation.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % choisissent la climatisation. Par ailleurs, 24 % des clients optent pour une voiture de catégorie B climatisée.

a) Etablir l'arbre traduisant la situation.

b) Un client loue une voiture de catégorie B. Quelle est la probabilité qu'elle soit climatisée ?

On choisit un client au hasard :

c) Montrer que la probabilité qu'il choisisse une voiture climatisée est égale à 36 %.

d) Quelle est la probabilité que la voiture choisie soit de catégorie A sachant qu'elle est climatisée ?

On choisit à présent au hasard trois clients simultanément :

e) Déterminer la probabilité que les trois clients aient loué une voiture climatisée.

f) Déterminer la probabilité que deux clients exactement aient choisi une voiture climatisée.

g) Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait loué une voiture climatisée.

2.30

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2014]
Les parties A et B sont indépendantes.
Une urne contient 6 boules vertes numérotées de 1 à 6, 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 7 boules bleues numérotées de 1 à 7.

A) On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.

  a) Combien y a-t-il de tirages ordonnées contenant 3 boules de la même couleur ?

  b) Combien de tirages ordonnées donnent une somme de 4, en additionnant la valeur des trois boules ?

  c) Combien de tirages ordonnées donnent une somme supérieure ou égale à 5, en additionnant la valeur des trois boules ?

B) Toutes les boules sont ensuite replacées dans l'urne.
On tire une boule de cette urne. Si elle est verte, on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si elle est rouge, on lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. Si elle est bleue, on lance un dé à 20 faces, numérotées de 1 à 20.

  d) Quelle est la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?

  e) Sachant que le dé a montré 5, quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

  f) Si on répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois la boule dans l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le nombre 5 ?

  g) Un daltonien réalise l'expérience une fois. Comme il ne voit pas la différence entre le rouge et le vert, si la boule tirée est de l'une de ces deux couleurs, il choisit au hasard entre le dé à 6 faces et celui à 12 faces. Quelle est alors la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?

2.31

[Problème de baccalauréat, Gymnase de la Cité, 2013]
Nous disposons d'un dé cubique bien équilibré et de deux boîtes B_1, B_2 contenant des boules indiscernables au toucher. La boîte B_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires, tandis que la boîte B_2 contient 6 boules rouges et 4 boules noires.
On jette le dé. Si le dé indique un nombre strictement supérieur à 4, on extrait de la boîte B_1 *simultanément* 3 boules. Dans le cas contraire on extrait *successivement et avec remise* 3 boules de la boîte B_2. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) Les trois boules sont rouges ;
b) Les trois boules sont de la même couleur ;
c) Au moins une boule est rouge ;
d) Deux boules sont noires et une boule est rouge ;
e) Le dé indique un nombre strictement supérieur à 4 sachant que les trois boules sont rouges.

2.32

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2012]
Un jeu est constitué de questions qui portent sur les thèmes « Musique » et « Cinéma ». Le quart des questions portent sur le thème « Musique », les autres portent sur le thème « Cinéma ». La probabilité que Julien réponde correctement à une question « Musique » est de 60 %, alors que la probabilité qu'il réponde correctement à une question « Cinéma » est de 70 %. On pose à Julien une question choisie au hasard. Si Julien répond correctement à cette question, on lui pose une deuxième question qui porte sur le même thème ; une deuxième réponse juste lui permet de doubler son gain. Représenter la situation par un arbre et calculer la probabilité que :

a) Julien réponde correctement à la première et à la deuxième question.
b) Julien réponde correctement à la deuxième question s'il a répondu correctement à la première.
c) Les deux questions aient porté sur la musique sachant que Julien a doublé son gain ?

Ce jeu est proposé chaque matin avant 8 heures à la radio. Julien y participe 5 jours de suite.

d) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question trois des cinq jours.
e) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question au moins l'un des cinq jours.

2.33

Le jeu de la boule noire se joue à deux. Avant chaque partie, on place dans une urne 5 boules blanches et 2 boules noires. Les joueurs tirent alors alternativement une boule de l'urne, jusqu'à ce que l'un des deux tire une boule noire. Ce joueur perd la partie et le jeu s'arrête. Une partie peut se jouer avec ou sans remise.
Paul et Jeanne décident de jouer au jeu de la boule noire. Paul effectue le premier tirage.

a) On suppose qu'ils jouent sans remise.
   i) Quelle probabilité chaque joueur a-t-il de gagner la partie ?

ii) Si Paul perd, quelle est la probabilité que ce soit à son troisième tirage ?

b) On suppose qu'ils jouent avec remise. Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de voir la partie se terminer en n tirages ou moins est plus grande que 0,99.

2.8 Réponses

2.1 a) 3/8 ; b) 3/5 ; c) 1/2 ; d) 10/199.

2.2 a) 33 % ; b) 42,55 % ; c) 75,47 % ; d) 27,59 % ; e) 82,98 % ; f) 59,70 %.

2.3 A : 4,55 % ; B : 27,27 % ; C : 38,18 % ; D : 61,82 % ; E : 74,55 % ; F : 76,36 %.

2.4 A : 25 % ; B : 29,55 % ; C : 70,45 %.

2.5 A : 18,18 % ; B : 1,01 % ; C : 41,67 %.

2.6 A : 55,56 % ; B : 16,67 % ; C : 34,72 % ; D : 4,63 % ; E : 9,26 %.

2.7 a) 21,43 % ; b) 3,57 % ; c) 78,57 % ; d) 28,57 % ; e) 57.14 %

2.8 a) 12.96 % ; b) 97.44 % ; c) 34.56 % ; d) 84.48 % .

2.9 19.05 % ; 33.33 %.

2.10 $\frac{1}{11}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{4}{11}$.

2.11 $\frac{3}{5}$.

2.12 a) 0.28 % ; b) 0.70 % ; c) 0.24 % ; d) 0.10 % ; e) 70.01 % ; f) 29,99 % .

2.13 a) 51,47 % ; b) 33,08 % ; c)15,44 % ; d) 31,82 %.

2.14 a) i) 22.22 % ; ii) 77.78 % ; iii) 55.56 % ; b) i) 52.78 % ; ii) 26.32 %.

2.15 a) 70.83 % ; b) 65.7 %, 44.1 % ; c) ii) 6.67 %.

2.16 a) 1.82 % ; b) 29.09 % ; c) 49.09 % ; d) 33.33 % ; e) 12.5 % .

2.17 a) 37.5 % ; b) 47.5 % ; c) 47.37 % .

2.18 31.46 %.

2.19 a) 56.67 % ; b) 50 % ; c) 52.94 %.

2.20 a) 24.73 % ; b) 2.53 % ; c) 72.68 %.

2.21 a) 0.00059 % ; b) 14.93 % ; c) 0.16%.

2.22 a) 34.87 % ; b) 0.15 % ; c) 98.72 %.

2.23 32.31 %.

2.24 a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{2}{15}$; c) $\frac{1}{2}$.

2.25 40.54 %.

2.26 a) i) 65.13 % ; ii) 38.74 % ; b) i) 4 % ; ii) 12.5 %.

2.27 a) $\frac{57}{64}$; b) $\frac{7}{19}$; c) i) 0.13 % ; ii) 29.35 %.

2.28 c) 46.75 % ; d) 4.66 % ; e) 8 clients ; g) 17 % ; h) $\frac{56}{73}$.

2.29 b) 60 % ; c) 36 % ; d) 33.33 % ; e) 4.67 % ; f) 24.88 % ; g) 73.79 %.

2.30 a) 336 ; b) 54 ; c) 3300 ; d) 10 % ; e) 15.63 % ; f) 0.81 % ; g) 9.22 %.

2.31 a) 17.73 % ; b) 22 % ; c) 95.73 % ; d) 29.2 % ; e) 18.80 %.

2.32 a) 45.75 % ; b) 67.78 % ; c) 19.67 % ; d) 15.64 % ; e) 85.99 %.

2.33 a) i) Paul : $\frac{3}{7}$; Jeanne : $\frac{4}{7}$; ii) $\frac{1}{6}$; b) 14 tirages.