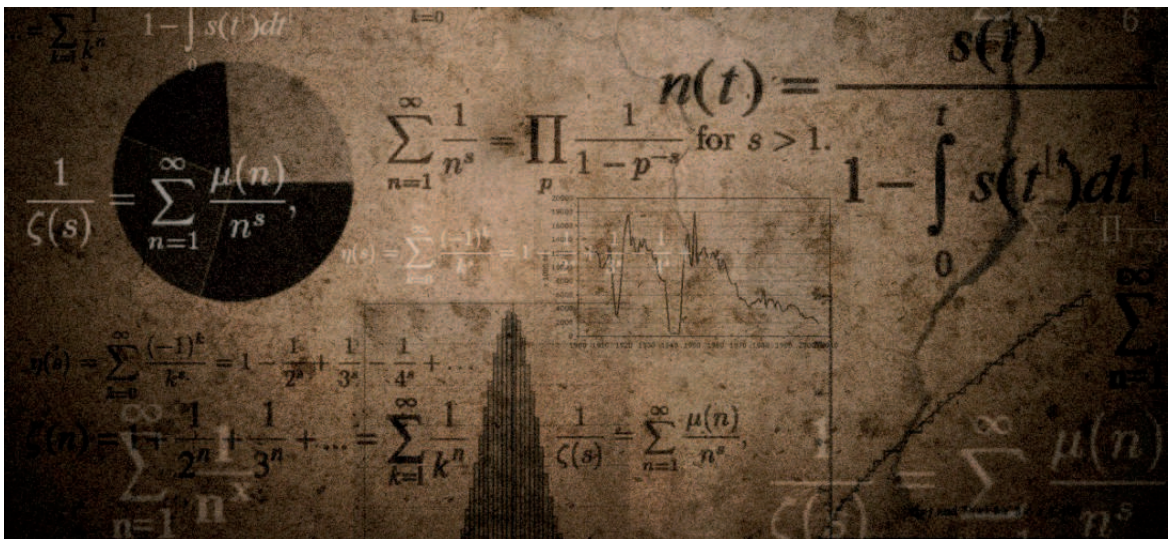


# Mathématiques

## PROBABILITES + GEOMETRIE

3<sup>ème</sup> année Maturité  
niveau standard



GYMNASE DE BURIER



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>4</b>
<b>1 Combinatoire</b>	<b>5</b>
1.1 Exemples d'introduction	5
1.2 Principes généraux	9
1.2.1 Règle du produit	9
1.2.2 Règle d'addition	9
1.3 Factorielles	11
1.4 Permutations	13
1.5 Arrangements	19
1.6 Combinaisons	25
1.7 Coefficients binomiaux	29
1.8 Triangle de Pascal	31
1.9 Exercices	33
1.10 Réponses	41
<b>2 Probabilités</b>	<b>43</b>
2.1 Notion intuitive de probabilité	43
2.2 Situation d'équiprobabilité	51
2.3 Axiomes de probabilité	57
2.4 Probabilité conditionnelle	59
2.5 Événements indépendants	65
2.6 Expérience binomiale	67
2.7 Exercices	69
2.8 Réponses	79
<b>3 Le cercle dans le plan</b>	<b>81</b>
3.1 Rappels en géométrie vectorielle plane	81
3.2 Equation cartésienne d'un cercle	89

3.3	Tangente à un point du cercle . . . . .	95
3.3.1	Equation cartésienne de la tangente à un point du cercle . . . . .	95
3.3.2	Equation cartésienne d'une tangente par dédoublement . . . . .	97
3.4	Tangentes à un cercle de pente donnée . . . . .	99
3.5	Position d'une droite relativement à un cercle . . . . .	101
3.6	Position entre deux cercles . . . . .	105
3.6.1	Cercles tangents . . . . .	105
3.6.2	Cercles sécants ou sans point commun . . . . .	107
3.7	Tangentes issues d'un point situé hors du cercle . . . . .	109
3.8	Exercices . . . . .	113
3.9	Réponses . . . . .	118

# Avant-propos

Mesdames et messieurs, Je vous signale tout de suite que je vais parler pour ne rien dire. Oh ! je sais, vous pensez « S'il n'a rien à dire, il ferait mieux de se taire ! » Évidemment ! Mais c'est trop facile ! Vous voudriez que je fasse comme tous ceux qui n'ont rien à dire et qui le gardent pour eux ? Eh bien, non ! Mesdames et messieurs, moi, lorsque je n'ai rien à dire, je veux qu'on le sache ! Je veux en faire profiter les autres ! Et si, vous-mêmes, mesdames et messieurs, vous n'avez rien à dire, eh bien, on en parle, on en discute ! Je ne suis pas ennemi du colloque. Mais, me direz-vous, si on parle pour ne rien dire, de quoi allons-nous parler ? Eh bien, de rien ! De rien ! Car rien... ce n'est pas rien ! La preuve ? C'est qu'on peut le soustraire. Par exemple, rien moins rien égale moins que rien ! Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose ! On peut acheter quelque chose avec rien ! En le multipliant ! Une fois rien ... c'est rien ! Deux fois rien ... ce n'est pas beaucoup ! Mais trois fois rien !... Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose... et pour pas cher ! Maintenant, si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien : rien multiplié par rien égale rien, trois multiplié par trois égale neuf, cela fait donc rien de neuf !

Raymond Devos



DESSIN CI-CONTRE DE PHILIPPE GELUCK

7<sup>e</sup> édition, La Tour-de-Peilz, juin 2022

# Chapitre 1

## Combinatoire

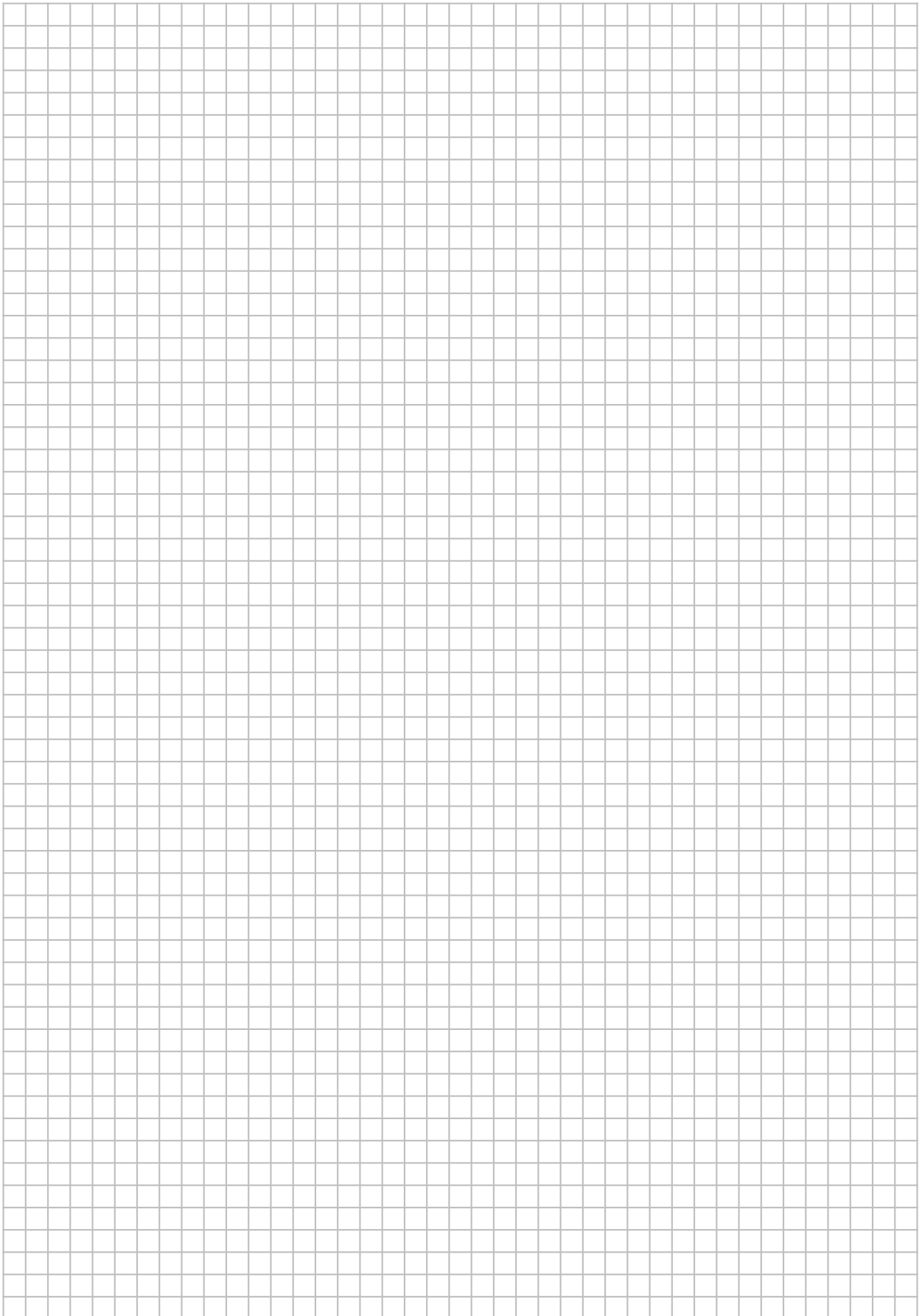
### 1.1 Exemples d'introduction

#### Exemple 1.1.

Pour un match, Rodger constate qu'il possède six tee-shirts, cinq shorts, huit paires de basket et quatre bandeaux différents. Combien de tenues différentes peut-il agencer si l'on admet qu'une tenue comporte un tee-shirt, un short, une paire de basket et un bandeau ?

#### Exemple 1.2.

24 équipes ont participé au tournoi final du championnat d'Europe 2012 de football. Si l'on admet que toutes les équipes peuvent terminer aux trois premières places, calculer le nombre de manières différentes d'attribuer ces trois places.



**Exemple 1.3.**

Une assemblée se compose de 60 filles et 40 garçons. On doit choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier. La présidence doit être assumée par une fille, le secrétariat par un garçon et un élève ne peut exercer plus d'une charge à la fois.

De combien de manières peut-on le faire ?

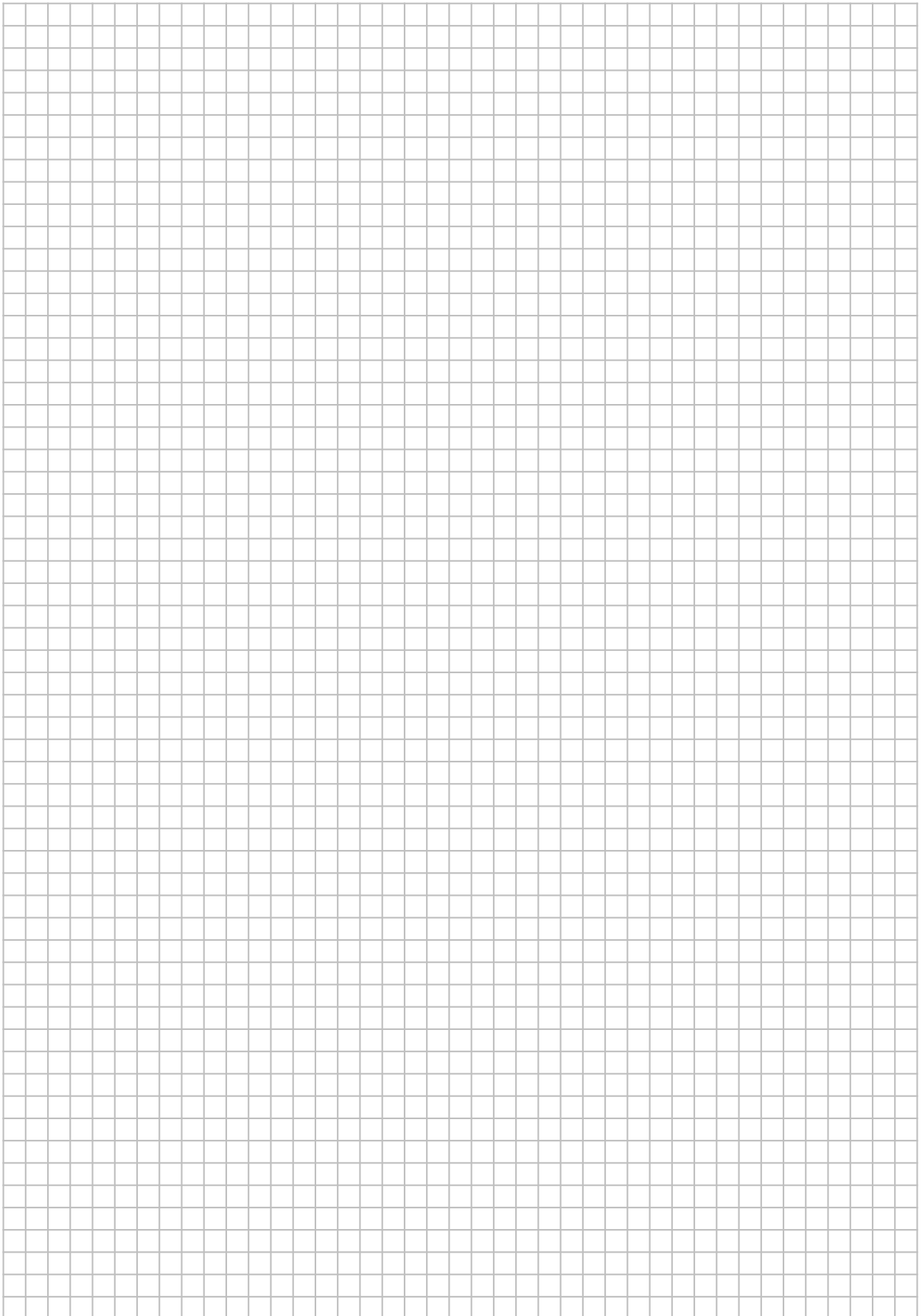
**Exemple 1.4.**

Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents strictement inférieurs à 1'250 ?

**Exemple 1.5.**

Nicolas et Willy disputent un match de tennis à deux sets gagnants. Quel est le nombre de déroulements possibles du match ?





## 1.2 Principes généraux

### 1.2.1 Règle du produit

Soit une épreuve composée de  $n$  opérations  $E_1, E_2, \dots, E_n$  successives qui sont **indépendantes les unes des autres** (le nombre d'issues possibles de  $E_{k+1}$  ne dépend pas des issues obtenues successivement dans  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ).

Si l'opération  $E_k$  peut amener à  $m_k$  issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

manières différentes.

### 1.2.2 Règle d'addition

Soit une épreuve dont les issues peuvent être séparées en  $n$  sous-groupes d'issues  $S_1, S_2, \dots, S_n$  **incompatibles deux à deux** (sans possibilité commune).

Si le groupe  $S_k$  peut amener  $s_k$  issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

manières différentes.

#### Remarque 1.1.

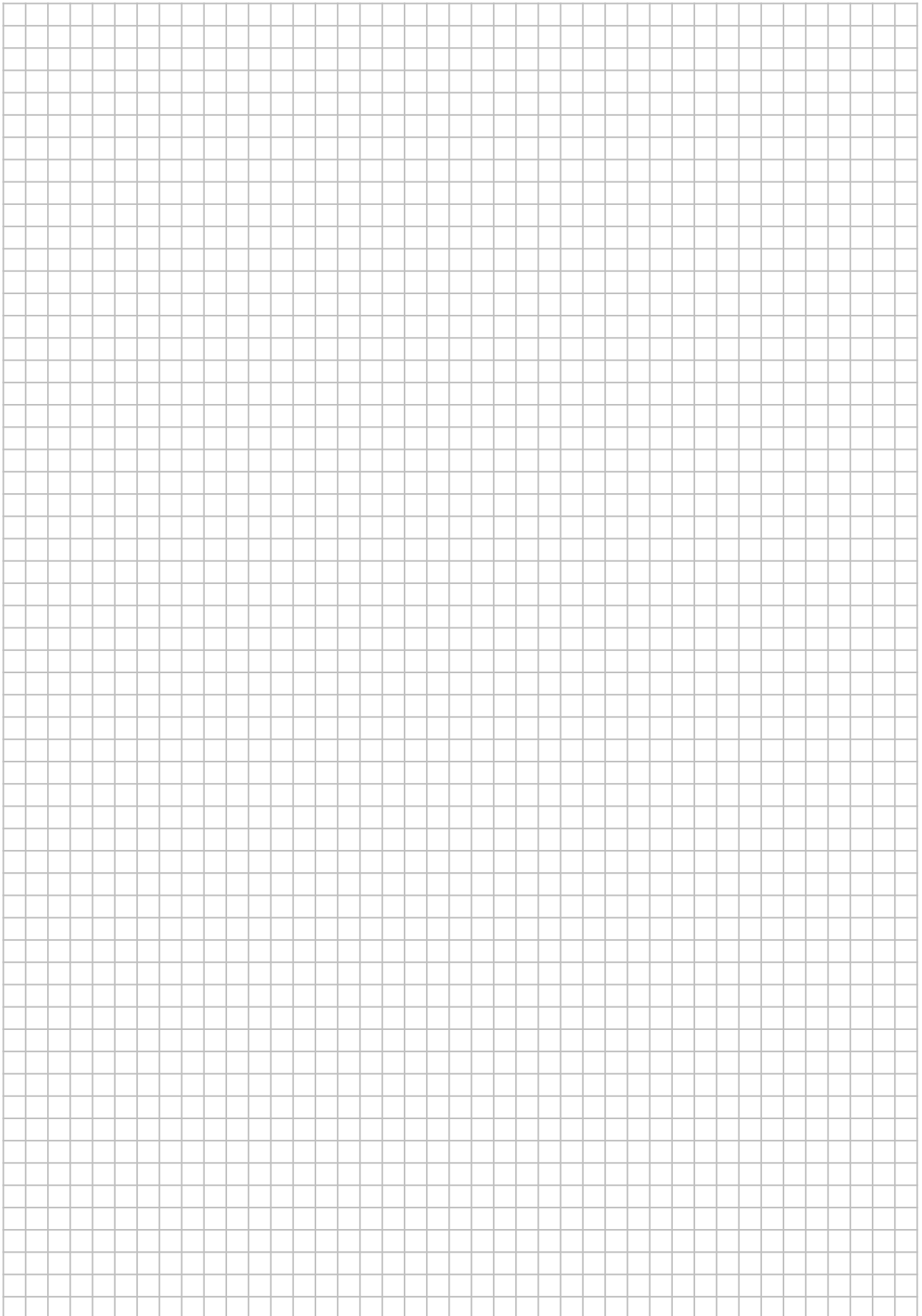
- 1) La **règle du produit** est utilisée lorsque l'on compte le nombre de cas en parcourant l'arbre des issues possibles des branches principales jusqu'aux feuilles, les **branches d'un niveau donné devant avoir toutes le même nombre de sous-branches**.
- 2) La **règle d'addition** est utilisée lorsque l'on divise l'arbre des issues possibles en plusieurs sous-arbres et que l'on somme les nombres des issues des différents sous-arbres.
- 3) En général, la règle du produit correspond à la conjonction « et » et la règle d'addition à la conjonction « ou ».

#### Exemple 1.6.

Dans une classe comportant 12 garçons et 8 filles, on doit choisir une personne responsable du courrier et une autre personne déléguée de classe.

a) De combien de manières peut-on le faire ?

b) Parmi ces choix combien sont formés de deux élèves du même sexe ?



## 1.3 Factorielles

- $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \dots$
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

### Exemple 1.7.

Calculer.

a)  $\frac{8!}{5!} =$

b)  $\frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4!} =$

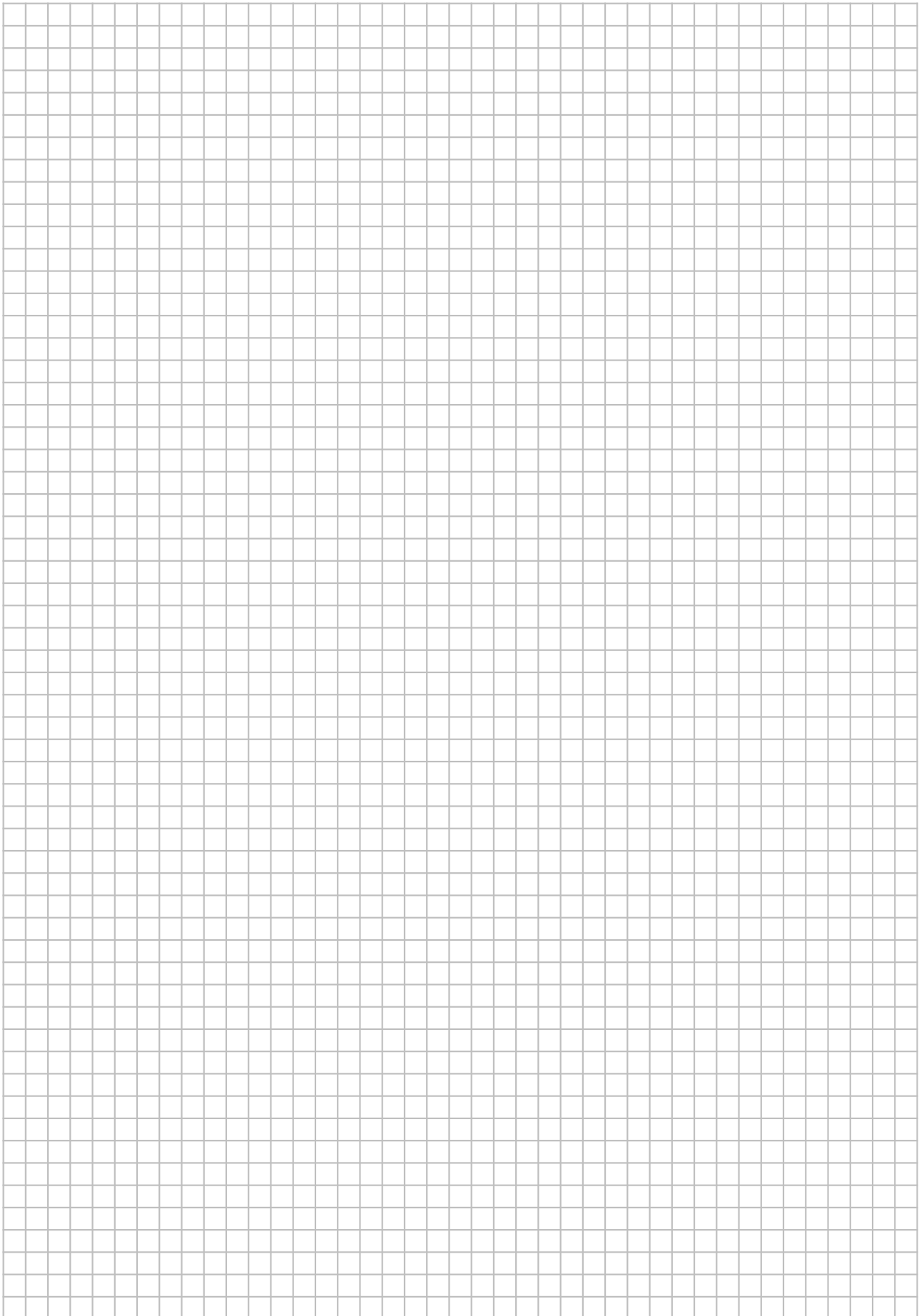
c)  $\frac{100!}{98!} =$

d)  $7! \cdot 8 =$

e) Ecrire  $\frac{n!}{(n-k)!}$  comme un produit de facteurs.

### Remarque 1.2.

On calcule  $n!$  avec la calculatrice en pressant successivement sur sur  $\boxed{n}$ ,  $\boxed{2nd}$ ,  $\boxed{3}$  et  $\boxed{=}$



## 1.4 Permutations

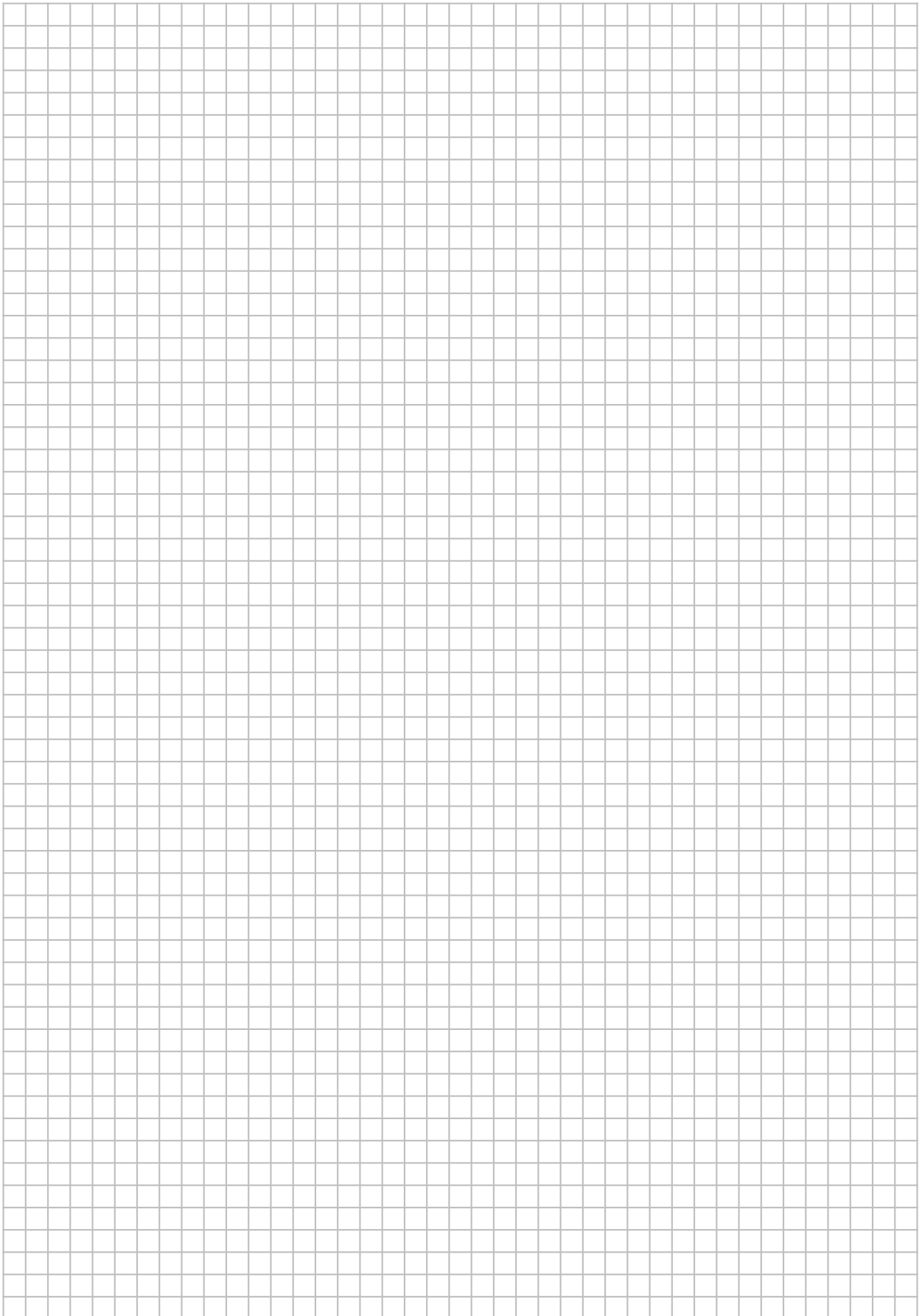
Par définition, une **Anagramme** d'un mot est un mot de même longueur qui mélange les lettres du mot donné.

### **Exemple 1.8.**

Déterminer le nombre d'anagrammes de PARIS.

### **Exemple 1.9.**

Déterminer le nombre d'anagrammes de ALMA.



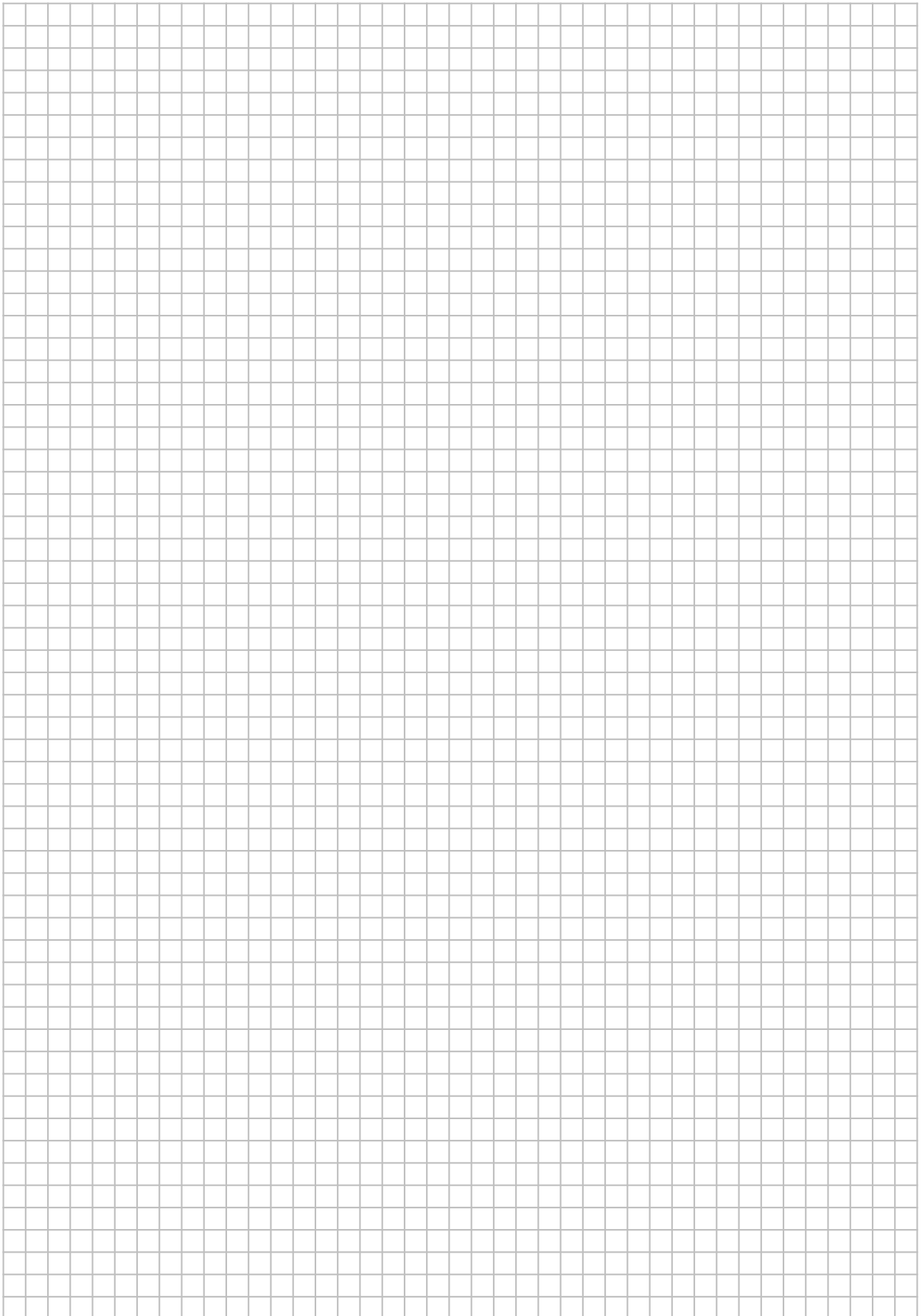
**Exemple 1.10.**

Déterminer le nombre d'anagrammes de GENEVE.

**Exemple 1.11.**

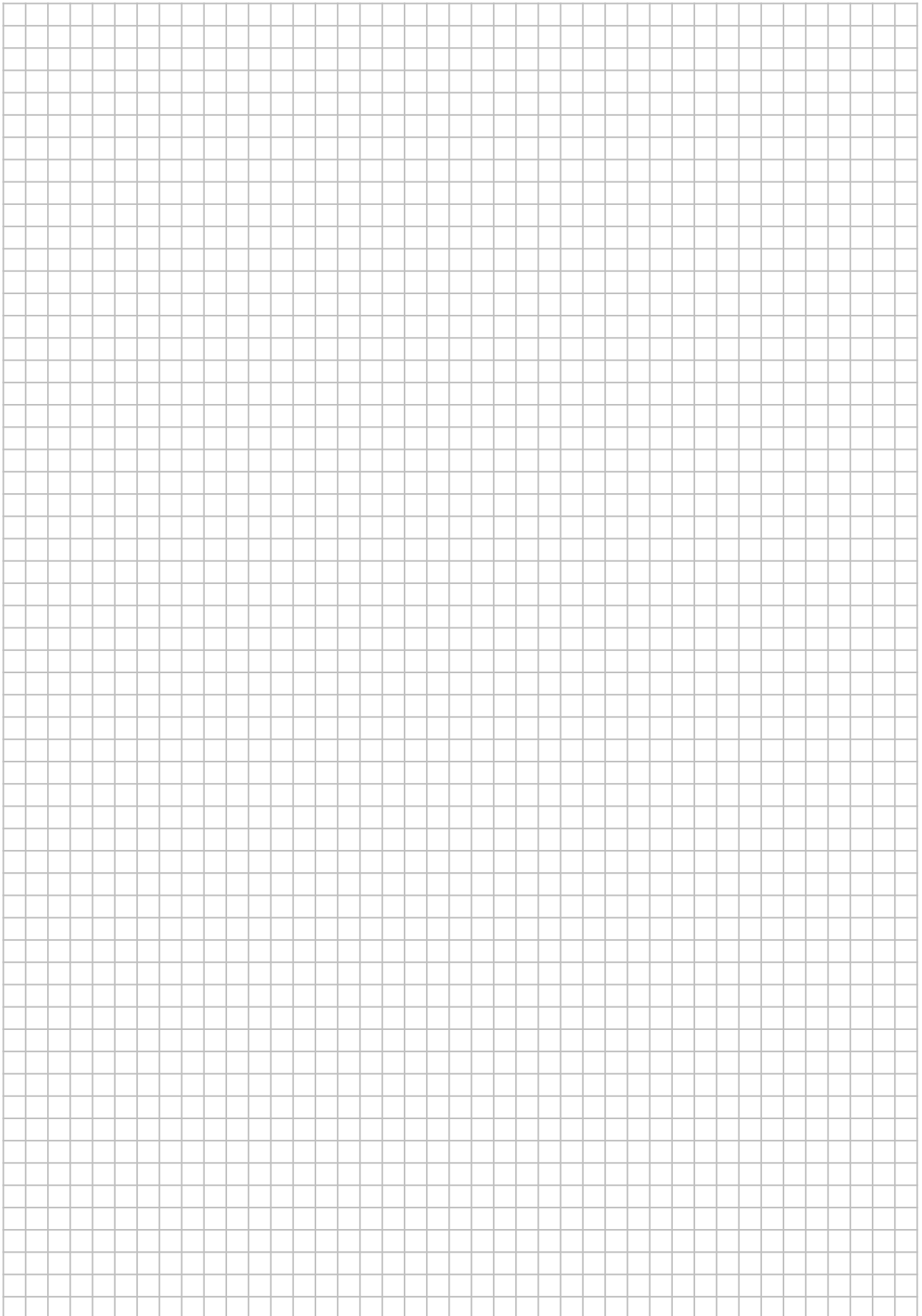
Déterminer le nombre d'anagrammes de VILLENEUVE.





**Formule des permutations**

Placer $n$ objets à $n$ places	
Permutations simples	Permutations avec répétitions
<p><b>Exemples de référence</b></p> <p>a) Classements possibles de 5 personnes.</p> <p>b) Anagrammes de GYMNASE.</p>	<p><b>Exemples de référence</b></p> <p>a) Manières d'aligner trois billes rouges et 4 billes vertes.</p> <p>b) Anagrammes de FILOZOFI.</p>
<p><b>Formule</b></p> <p><math>P_n =</math></p>	<p><b>Formule</b></p> <p><math>\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_r) =</math></p>



## 1.5 Arrangements

### Exemple 1.12.

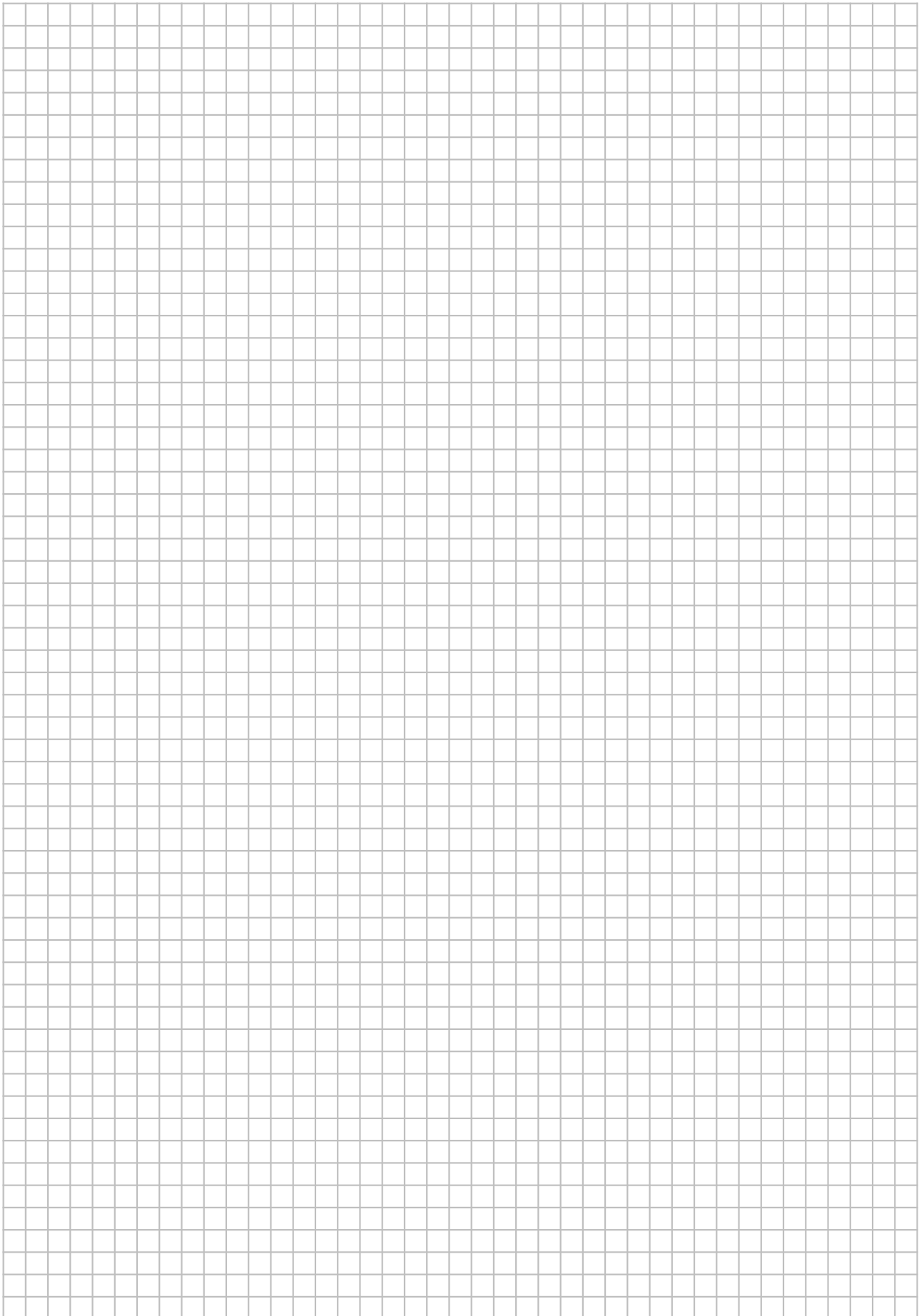
Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places.

De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

### Exemple 1.13.

Une course de chevaux compte 15 partants.

Combien y a-t-il de possibilités de jouer un quarté (pronostiquer l'ordre d'arrivée des 4 premiers de la course) ?



**Exemple 1.14.**

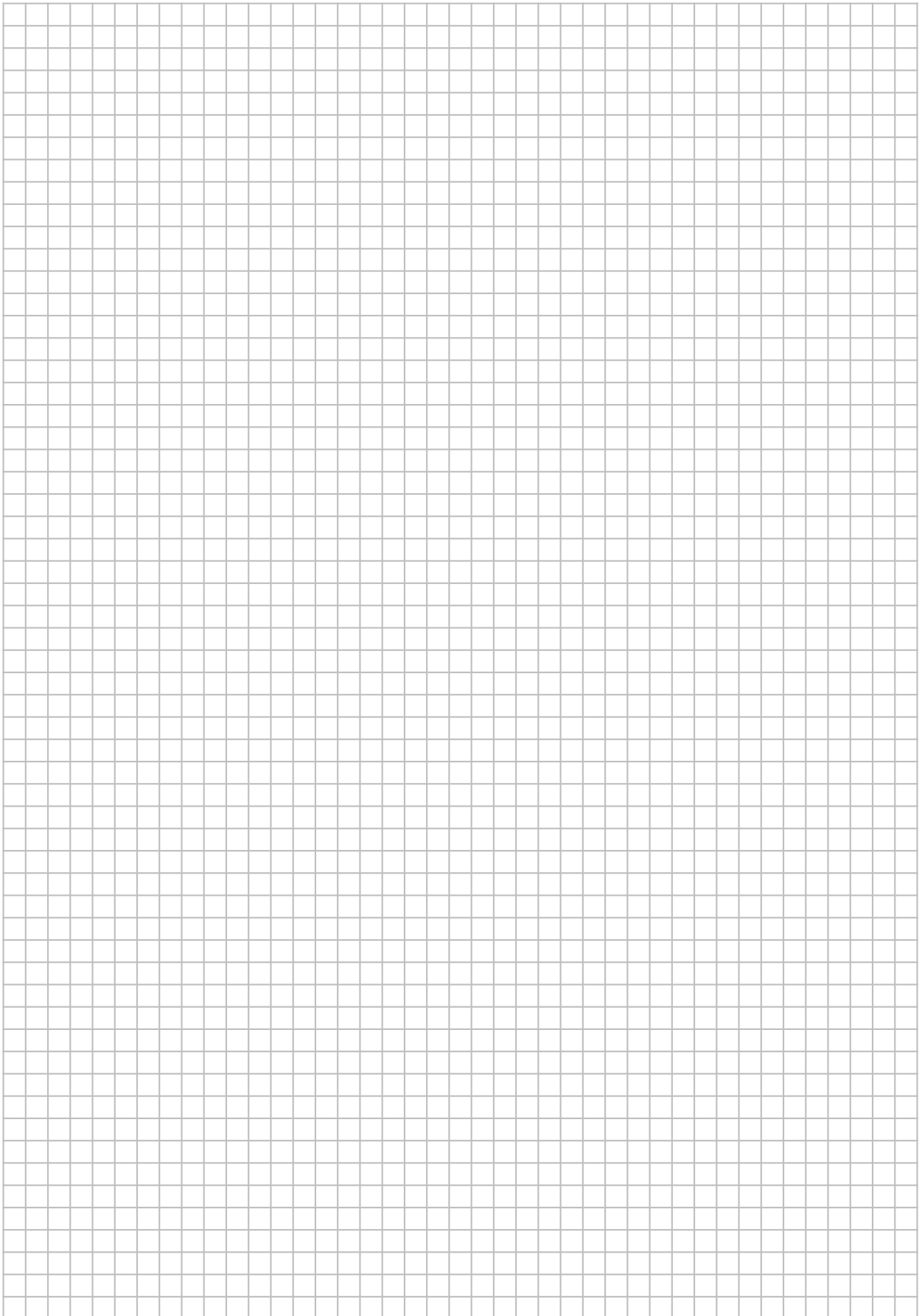
Les plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactly quatre lettres de l'alphabet latin.

Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ?

**Exemple 1.15.**

Un bulletin de sport-toto compte 13 matches. Un joueur doit cocher « 1 » s'il pense que l'équipe jouant à domicile va gagner, « 2 » s'il pense que c'est l'autre qui va gagner et « x » s'il pense que les deux équipes vont faire match nul.

Combien de bulletins différents de sport-toto peut-on remplir ?



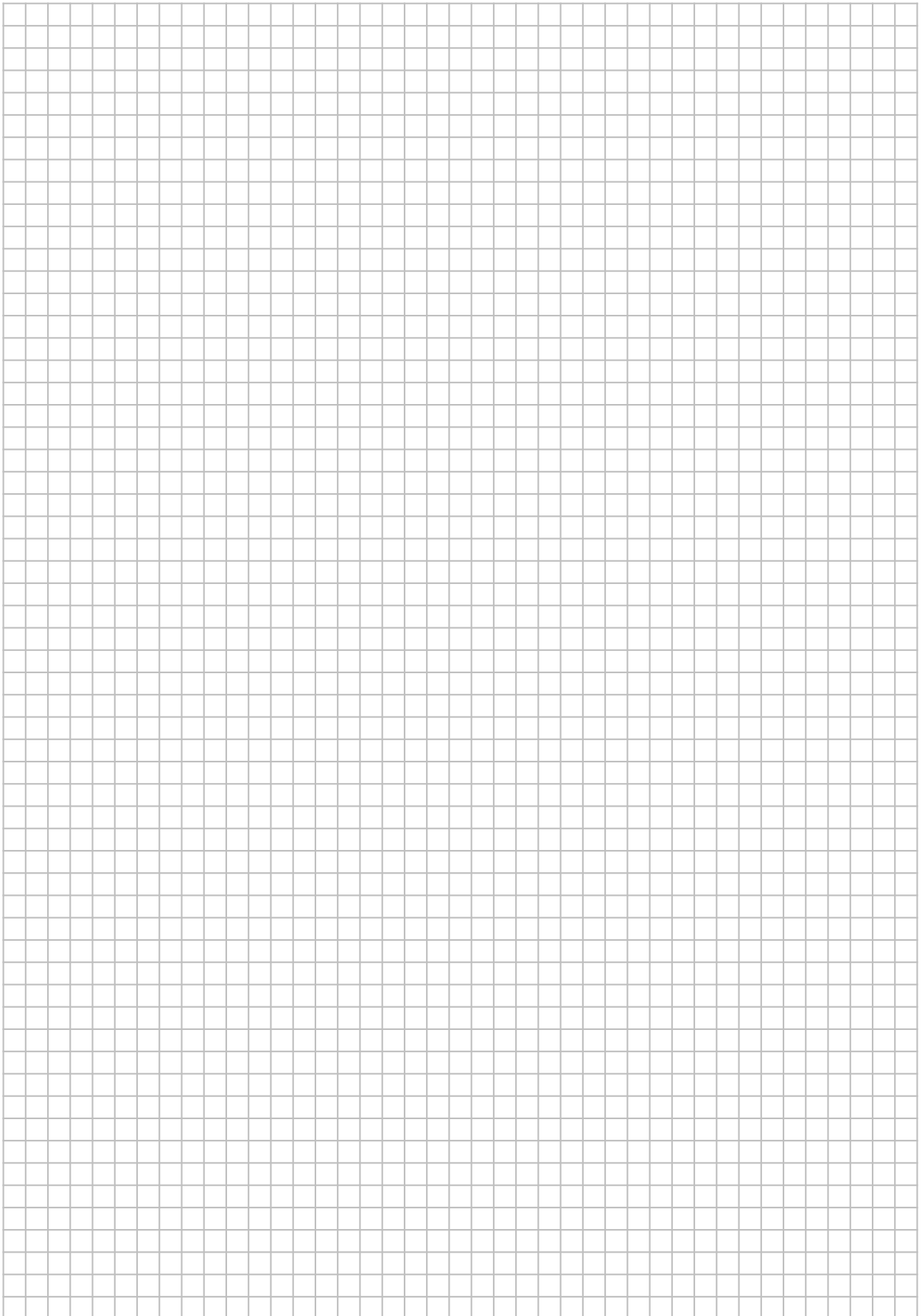
## Formule des arrangements

Choix successifs (en tenant compte de l'ordre) de $k$ éléments (distincts ou non) parmi $n$	
Arrangements simples	Arrangements avec répétitions
<p><b>Exemple de référence</b> Codes de quatre lettres différentes</p>	<p><b>Exemple de référence</b> Codes de quatre lettres (non nécessairement distinctes)</p>
<p><b>Formule</b></p> $A_k^n =$	<p><b>Formule</b></p> $\overline{A}_k^n =$

### Remarque 1.3.

Avec la calculatrice, on calcule  $A_k^n$  à l'aide de la touche **nPr** soit en pressant successivement sur :  $\boxed{n}$ ,  $\boxed{2nd}$ ,  $\boxed{9}$ ,  $\boxed{k}$  et  $\boxed{=}$ .





## 1.6 Combinaisons

### Exemple 1.16.

Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

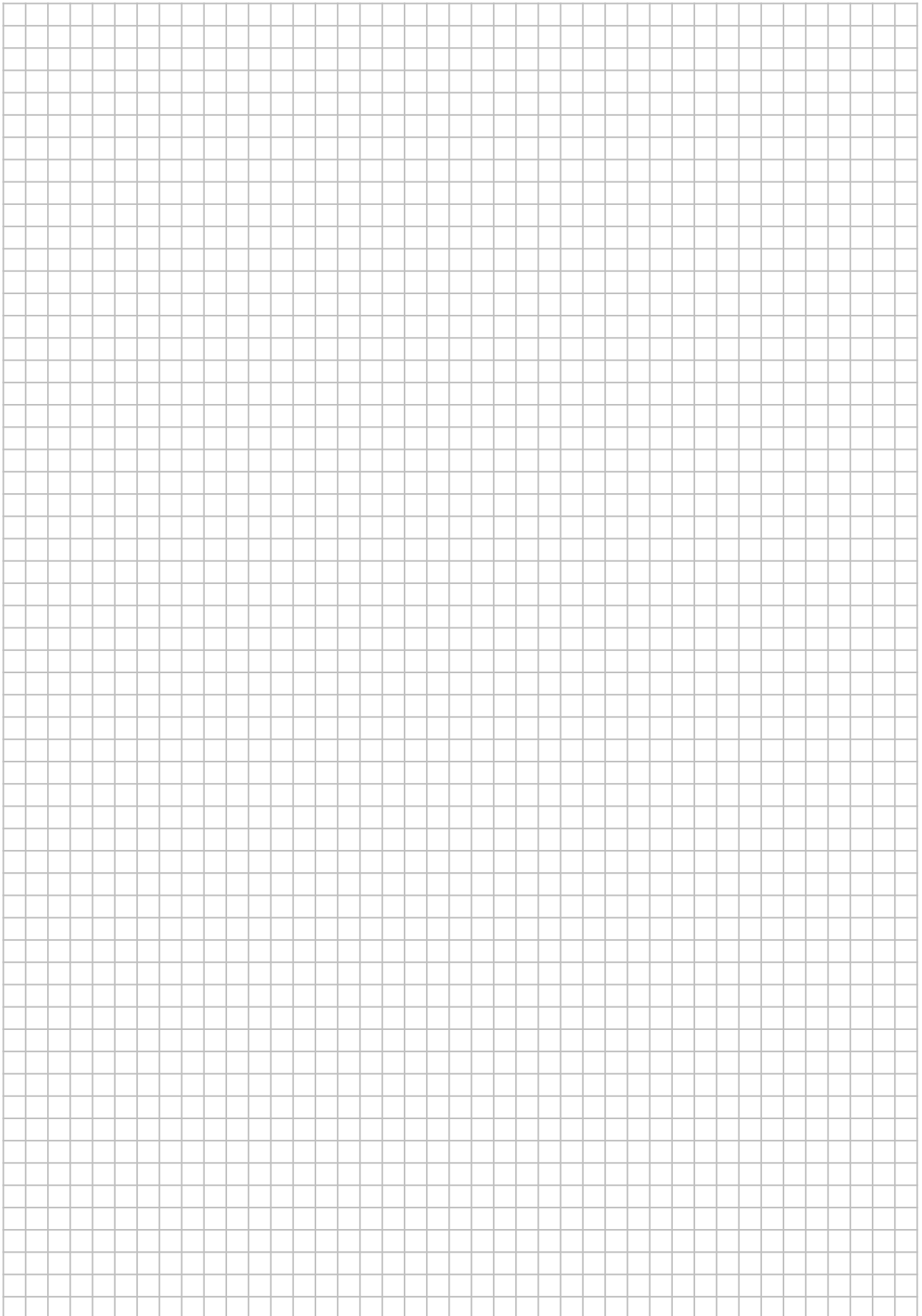
### Exemple 1.17.

Combien de mains différentes (choix de 5 cartes) y a-t-il dans un jeu de poker ?

### Exemple 1.18.

Une grille de loto compte 45 numéros. Un joueur doit en cocher 6.

Combien y a-t-il de façons de remplir cette grille ?



## Formule des combinaisons

Choix de  $k$  objets parmi  $n$  objets, les objets choisis ayant tous le même rôle, l'ordre de choix n'étant pas considéré

### Combinaisons simples (sans répétition)

#### Exemple de référence

Nombre de manières de choisir un groupe de 3 personnes pour la préparation d'un voyage d'étude parmi une classe de 20 élèves

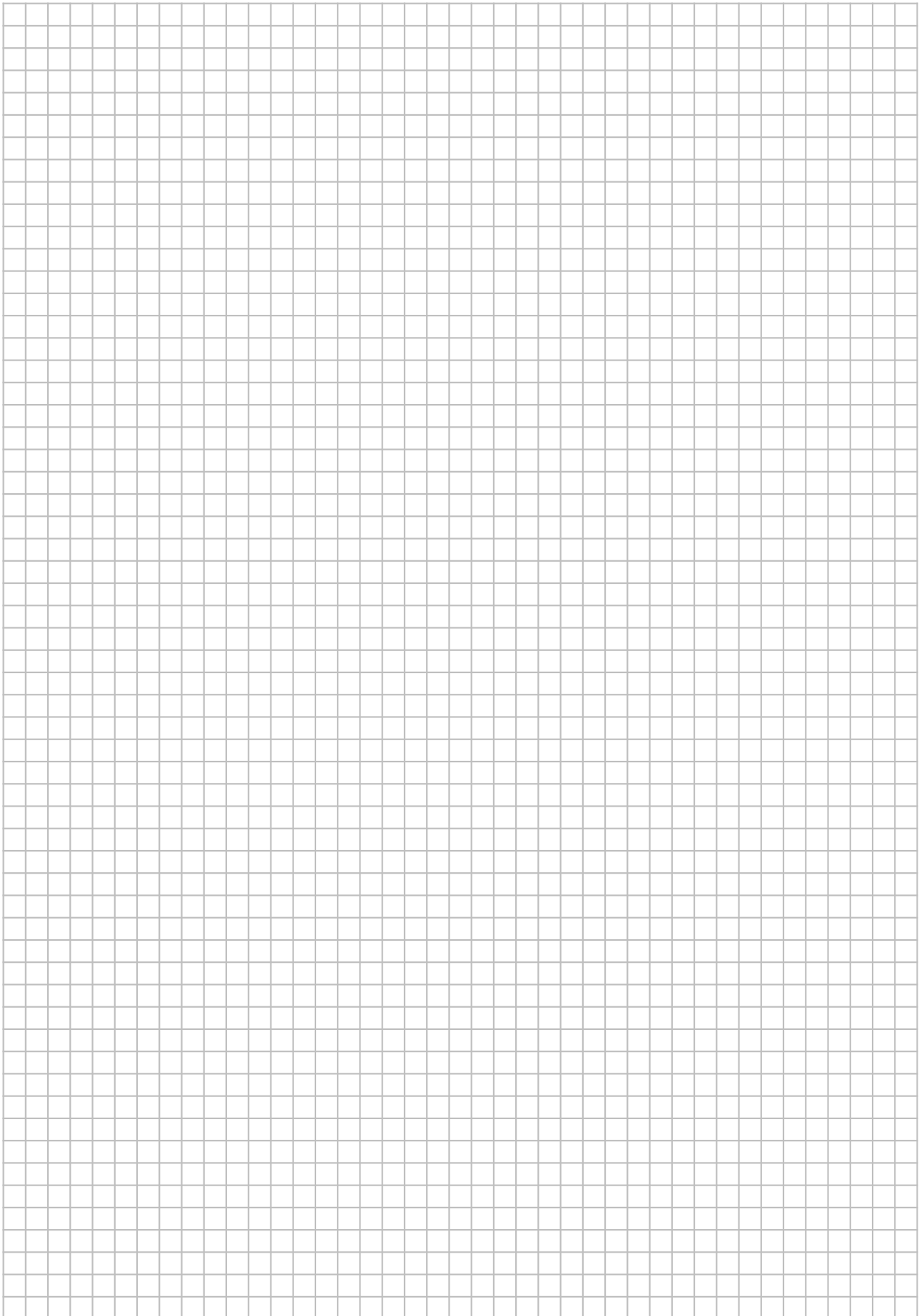
#### Formule

$$C_k^n =$$

#### Remarque 1.4.

$$1) C_k^n = \frac{A_k^n}{k!}$$

2) Avec la calculatrice, on calcule  $C_k^n$  à l'aide de la touche **nCr** soit en pressant successivement sur :  $\boxed{n}$ ,  $\boxed{2nd}$ ,  $\boxed{8}$ ,  $\boxed{k}$  et  $\boxed{=}$ .



## 1.7 Coefficients binomiaux

$C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  est appelé un **coefficient binomial**, noté également  $\binom{n}{k}$ .

### Propriétés des coefficients binomiaux

1)  $C_k^n$  représente le nombre de choix simultanés de  $k$  objets parmi  $n$  (choix d'un sous-groupe de  $k$  objets distincts sans tenir compte de l'ordre).

2)

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

A chaque choix simultané de  $k$  objets parmi  $n$  correspond le choix simultané des  $n-k$  objets restants.

3)

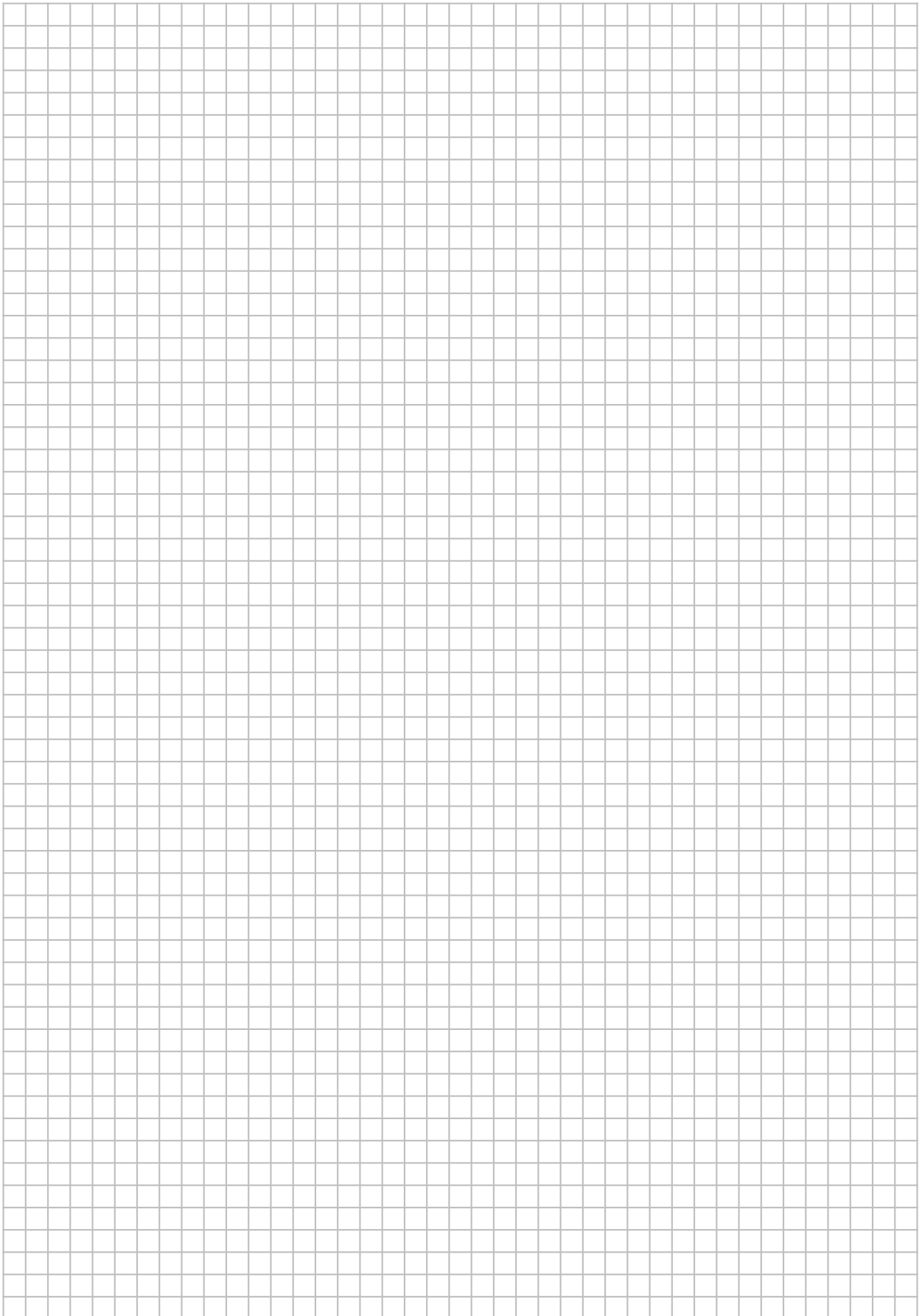
$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$

L'ensemble des choix simultanés de  $k$  objets parmi  $n$  objets  $O_1, O_2, \dots, O_n$  peut être divisé en deux groupes :

- Les  $C_k^{n-1}$  choix simultanés qui ne contiennent pas l'objet  $O_n$  (donc les choix de  $k$  objets parmi  $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}$ )
- Les  $C_{k-1}^{n-1}$  choix simultanés qui contiennent l'objet  $O_n$  (donc les choix, outre de  $O_n$ , de  $k-1$  objets parmi  $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}$ )

#### Exemple 1.19.

Dans un groupe de 20 personnes dont Jacques, calculer le nombre de commissions de trois personnes contenant Jacques et le nombre de commissions de trois personnes ne contenant pas Jacques.



## 1.8 Triangle de Pascal

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
					$C_0^0$					
				$C_0^1$		$C_1^1$				
			$C_0^2$		$C_1^2$		$C_2^2$			
		$C_0^3$		$C_1^3$		$C_2^3$		$C_3^3$		
	$C_0^4$		$C_1^4$		$C_2^4$		$C_3^4$		$C_4^4$	
$C_0^5$		$C_1^5$		$C_2^5$		$C_3^5$		$C_4^5$		$C_5^5$

### binôme de Newton

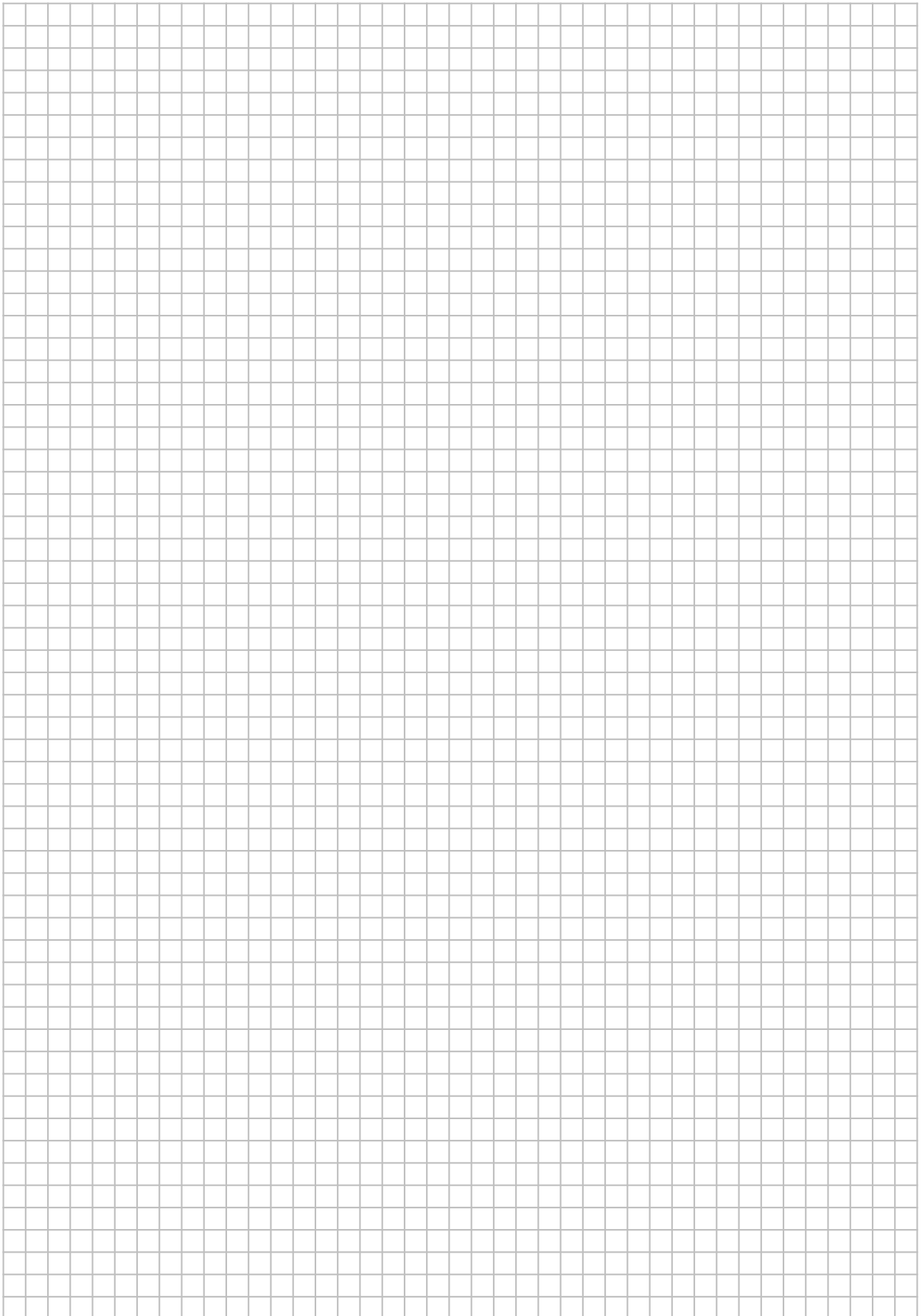
- $(a + b)^0 = 1$
- $(a + b)^1 = a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$
- ...
- $(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_k^n \cdot a^{n-k}b^k$

#### Exemple 1.20.

Développer.

$$(3 - 2x)^5 =$$





## 1.9 Exercices

### 1.1

- a) Déterminer le nombre d'entiers positifs à quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4.
- b) Parmi les entiers du point a), combien ont des chiffres distincts ?
- c) Parmi les entiers du point a), combien sont-ils inférieurs à 2'200 ?

### 1.2

Une personne a quatre pantalons, six chemises et trois pulls. Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter ? Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter si chaque pull peut être mis avec exactement 2 pantalons et chaque chemise avec exactement deux pulls ?

### 1.3

Dans un certain état, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet suivie de cinq chiffres (0, 1, 2, ... , 9). Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si :

- a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut être 0 ;
- b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0.

### 1.4

On place les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

- a) Combien existe-t-il de classements différents ?
- b) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?
- c) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

### 1.5

Un questionnaire comporte cinq questions à choix multiple ; pour chacune des questions, on propose trois réponses possibles.

- a) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une seule réponse par question (il y a donc une seule réponse juste par question)
- b) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une ou deux réponses par question (il peut donc y avoir une ou deux réponses justes par question).

### 1.6

Un **palindrome** est un nombre entier (ou un mot, voire une phrase) qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche sans le modifier ; par exemple, 21312 est un palindrome.

- a) Déterminer le nombre de palindromes formés de 2 chiffres, 3 chiffres, 4 chiffres, 5 chiffres, 10 chiffres.
- b) Le 20.02.2002 était une date palindrome ; le 11.02.2011 également. Quelles sont les deux dates palindromes suivantes ?

**1.7**

Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points qui sont disposés dans un tableau de trois lignes et deux colonnes. Chaque point peut être en relief ou non. Combien de signes distincts peut-on composer ?

**1.8**

On forme un nombre en utilisant les chiffres 2, 3, 5, 6, 7 ou 9 autant de fois que l'on veut.

- a) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
- b) Parmi ceux-ci combien sont inférieurs à 550 ? pairs ? multiples de 5 ?

**1.9**

15 pilotes participent à une suite de grand prix ; on compte parmi eux 4 motos Yamaha, 9 motos Honda et 2 motos Suzuki.

- a) Lors d'une course, combien y a-t-il de podiums (classements des 3 premiers) possibles ?
- b) On s'intéresse aux vainqueurs des trois premières courses de la saison (un pilote peut gagner plusieurs courses).
  - i) Combien y a-t-il de cas où ce sont trois pilotes de marques différentes qui gagnent les trois courses ?
  - ii) Combien y a-t-il de cas où une course au moins est gagnée par un pilote Suzuki ?

**1.10**

De combien de façons différentes peut-on aligner 5 billes rouges, 2 billes bleues et 3 billes vertes ?

**1.11**

Combien d'anagrammes du mot TOULOUSE peut-on écrire si les consonnes doivent occuper les 1<sup>ère</sup>, 4<sup>ème</sup> et 7<sup>ème</sup> positions ?

**1.12**

On jette vingt fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note le résultat sous la forme d'une suite de  $P$  ou de  $F$ .

- a) Combien y a-t-il de suites différentes ?
- b) Parmi celles-ci, combien contiennent exactement une fois pile ? quatre fois pile ? dix fois pile ? vingt fois pile ?

**1.13**

On dispose de 26 jetons gravés avec les lettres de l'alphabet. En tirant successivement au hasard trois jetons sans remise, on obtient un mot de trois lettres.

- a) Quel est le nombre d'issues possibles ?
- b) Dénombrer les événements suivants :
  - i) On obtient un mot formé de trois consonnes.
  - ii) On obtient un mot formé de trois voyelles.
  - iii) On obtient le mot BAC.
  - iv) On obtient une anagramme du mot BAC.

**1.14**

De combien de manières différentes peut-on aligner 5 dés à jouer de couleurs différentes ?

**1.15**

- a) Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour un distributeur automatique de billets. Si le client a oublié l'ordre des chiffres, calculer le nombre maximum d'essais nécessaires pour obtenir le code correct.
- b) Même problème que la question 1 avec les chiffres 2, 4 et 7 en sachant que l'un de ces trois chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

**1.16**

On considère les huit chiffres du nombre 73'293'372.

- a) Combien de nombres peut-on écrire avec ces huit chiffres ?
- b) Combien de nombres impairs peut-on écrire avec ces huit chiffres ?
- c) Combien de nombres composés de trois chiffres 3 consécutifs peut-on former avec ces huit chiffres ?

**1.17**

On lance quatre fois de suite un dé tétraédrique (en forme de pyramide à base triangulaire) dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4. En notant les quatre chiffres successifs obtenus sur la face cachée du dé, on obtient un nombre à quatre chiffres.

- a) Combien de nombres peut-on obtenir ?
- b) Parmi les nombres obtenus, combien de nombres :
  - i) comportent quatre chiffres différents ?
  - ii) ne comportent aucun chiffre 2 ?
  - iii) comportent exactement une fois le chiffre 1 ?

**1.18**

Un programme d'ordinateur est formé de bits. Un bit est soit « 0 » soit « 1 ». On considère un mot de longueur 15 bits.

- a) Combien de mots différents peut-on construire ?
- b) Combien de mots sont formés de sept fois « 0 » et huit fois « 1 » ?
- c) Combien de mots commencent-ils et se terminent-ils par « 1 » ?
- d) Combien de mots sont-ils composés de deux « 1 » exactement qui ne sont pas consécutifs (il y a donc treize « 0 »)

**1.19**

Pour remercier onze personnes d'un travail bénévole qu'elles viennent d'accomplir, le responsable souhaite offrir à chacun un disque ou un livre.

- a) S'il dispose de cinq exemplaires d'un même disque et six exemplaires d'un même livre, de combien de manières peut-il effectuer son choix ?
- b) Même question que 1 s'il dispose de quatre exemplaires d'un premier disque, deux exemplaires d'un deuxième disque et cinq exemplaires d'un même livre.

**1.20**

On considère un groupe de 10 randonneurs, dont Pierre, Paul et Jacques. Les 10 randonneurs marchent les uns derrière les autres (ils forment une colonne de marcheurs).

- a) Combien y a-t-il de colonnes possibles ?
- b) Dans combien de colonnes Pierre, Paul et Jacques se suivent-ils (dans un ordre quelconque) ?
- c) Quel est le nombre de colonnes pour lesquelles Pierre, Paul et Jacques ne sont ni en tête, ni en queue du groupe ?

**1.21**

On doit choisir parmi une classe de 13 élèves des délégués pour la représenter dans le conseil de l'école.

- a) On veut choisir deux délégués. Pour choisir ces deux représentants, on place dans une urne le nom des 13 élèves, l'on tire un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants. Combien de tirages sont possibles ?  
Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des deux délégués.
- b) On veut choisir maintenant trois délégués. Pour choisir ces trois représentants, on tire de l'urne un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants et un troisième parmi les restants. Combien de tirages sont possibles ?  
Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des trois délégués.
- c) En utilisant le lien entre le nombre de tirages et le nombre de choix de délégués vus aux points précédents, déterminer le nombre de choix de quatre délégués et le nombre de choix de cinq délégués.

**1.22**

A partir d'un groupe de 10 candidats formés de 6 hommes et 4 femmes, de combien de manières différentes peut-on choisir (chaque personne ne peut occuper qu'une seule fonction) :

- a) Un comité formé d'un(e) président(e), d'un(e) caissier(ère) et d'un(e) secrétaire ?
- b) Un comité de trois personnes formé d'au moins une femme ?
- c) Une commission de trois personnes comportant une personne qui préside la commission et formée d'exactly une femme ?

**1.23**

Douze personnes ont à leur disposition trois voitures de 6, 4 et 2 places.

- a) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures ?
- b) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures s'il y a quatre conducteurs parmi les douze personnes et qu'il faut choisir un conducteur par voiture (lorsqu'il y a deux conducteurs dans une voiture, le choix du conducteur doit être pris en compte) ?

**1.24**

- a) De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes en deux groupes, un de sept personnes, l'autre de 3 personnes ?
- b) Même question avec un partage en trois groupes : un de cinq, un de deux et un de trois.
- c) Même question avec deux groupes de cinq personnes.

**1.25**

12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

**1.26**

Un tiroir contient 4 couteaux, 7 fourchettes et 1 cuillère, mais ces ustensiles sont rangés dans le plus grand désordre.

- a) On choisit successivement trois de ces services sans remettre le service choisi dans le tiroir. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :
  - i) dans cet ordre la cuillère, une fourchette et un couteau ?
  - ii) un couteau lors troisième tirage ?
  - iii) la cuillère ?
  - iv) au moins deux fourchettes ?
- b) On saisit dans le tiroir, simultanément, trois des ustensiles. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :
  - i) la cuillère, une fourchette et un couteau ;
  - ii) trois fourchettes ou trois couteaux ;
  - iii) la cuillère ?

**1.27**

Un électricien peu honnête désire vendre son stock de 30 ampoules dont 27 sont en parfait état et 3 sont défectueuses.

- a) Vérifier que l'électricien peut réaliser 4'060 emballages contenant 3 ampoules.
- b) Combien, parmi ces emballages, ne contiennent que 2 ampoules en parfait état ?
- c) Combien, parmi ces emballages, contiennent au moins une ampoule défectueuse ?

L'électricien vend à un client deux emballages de 3 ampoules choisies au hasard parmi les 30 ampoules.

- d) Combien a-t-il de possibilités de le faire ?
- e) Parmi ces possibilités, combien comportent 6 ampoules en parfait état ?

**1.28**

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire simultanément 5 cartes. Quel est le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

- a) 2 rois, 2 dames et 1 valet ?
- b) Les quatre rois ?
- c) Le roi de cœur ?
- d) Au moins un roi rouge ?

**1.29**

De combien de manières peut-on asseoir 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde, si (on ne tient compte que de la position relative des six personnes les unes par rapport aux autres).

- a) Aucune restriction n'est imposée ?
- b) 2 femmes particulières ne doivent pas être assises l'une à côté de l'autre ?
- c) Chaque femme doit être placée entre deux hommes ?

**1.30**

De combien de manières peut-on asseoir 9 personnes dans une rangée de 9 sièges ?

**1.31**

De combien de manières peut-on placer 3 romans, 2 livres de mathématiques et 1 de chimie sur une étagère si :

- a) Aucune restriction n'est mise ;
- b) Les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble et les romans aussi ;
- c) Seuls les romans doivent être rangés ensemble (les 2 livres de mathématiques sont séparés) ?

**1.32**

A l'aide des 6 chiffres de 1 à 6, chacun étant pris une seule fois, combien peut-on former de nombres distincts dans chacun des cas suivants :

- a) Nombres de 6 chiffres ?
- b) Nombres de 4 chiffres ?
- c) Nombres de 4 chiffres commençant par le chiffre 4 ?
- d) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 ?
- e) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 mais pas le chiffre 6 ?
- f) Nombres de 4 chiffres ne contenant ni le chiffre 3, ni le chiffre 6 ?
- g) Nombres de 4 chiffres contenant les chiffres 3 et 6 ?
- h) Nombres de 4 chiffres contenant au plus l'un des deux chiffres 3 et 6 ?
- i) Nombres de 4 chiffres contenant au moins l'un des deux chiffres 3 et 6 ?
- j) Nombres de 4 chiffres contenant 2 chiffres pairs et 2 chiffres impairs ?
- k) Nombres pairs de 4 chiffres ?
- l) Nombres de 4 chiffres divisibles par 4 ?

**1.33**

Un film est projeté 3 soirs de suite. Si 15 personnes décident d'aller voir ce film (chacune une fois), combien de possibilités peut-on envisager

- a) Si chaque personne choisit indépendamment des autres le soir qui lui convient ?
- b) Si chaque soir exactement 5 de ces personnes vont voir le film ?

**Exercices de révision****1.34**

Sur un damier rectangulaire composé de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer :

- a) Quatre jetons de même couleur ?
- b) Quatre jetons de couleurs différentes ?
- c) Quatre jetons de couleurs différentes dont deux sont dans la troisième colonne ?
- d) Quatre jetons de couleurs différentes dont deux au moins sont dans la troisième colonne ?

**1.35**

On compose un numéro de quatre chiffres en tapant successivement quatre fois de suite sur le clavier d'un téléphone (formé des touches numérotées de 0 à 9).

- a) Combien de numéros ne comportent-ils aucun 8 et aucun 9 ?
- b) Combien de numéros sont-ils formés de deux 9 exactement ?
- c) Combien de numéros sont-ils formés de quatre chiffres distincts, dont trois impairs et un pair ?
- d) Combien de numéros sont-ils formés de (exactement) deux chiffres différents ?

**1.36**

Une équipe sportive d'un gymnase est composée de 12 garçons et de 18 filles. Parmi les garçons, 10 étudient l'anglais, alors que parmi les filles, 14 étudient l'anglais. On offre à deux élèves de l'équipe un voyage gratuit en Angleterre pour assister à la finale du tournoi de Wimbledon en choisissant simultanément deux personnes dans l'équipe. Combien de choix :

- a) Peut-on faire en tout ?
- b) Comportent deux élèves de même sexe qui étudient les deux l'anglais ?
- c) Comportent deux élèves dont l'un au moins étudie l'anglais ?
- d) Comportent deux élèves qui étudient l'anglais dont au moins un garçon ?

**1.37**

Chaque jour de la semaine (7 jours), un amoureux offre une fleur à sa belle. Il achète cette fleur dans un magasin qui ne vend que des iris, des oeillets et des roses. Il fait en sorte que chaque semaine soit différente de toutes les précédentes.

- a) Pendant combien de semaines ce Romeo peut-il acheter des fleurs dans ce magasin ?
- b) Combien y aura-t-il de semaines au cours desquelles la jeune fille recevra :
  - i) au moins une rose ?
  - ii) exactement 3 roses ?
  - iii) 3 roses, 2 iris et 2 oeillets ?



**1.38**

On a posé la question suivante dans une classe : « de combien de manières différentes peut-on placer 5 tours sur un échiquier (64 cases) de manière à ce qu'elles ne s'attaquent pas mutuellement ? ». Les réponses (avec le raisonnement correspondant) ont été les suivantes :

A : On choisit 5 colonnes, puis 5 lignes, soit  $C_5^8 \cdot C_5^8 = 3'136$ .

B : On choisit 5 lignes :  $C_5^8$ . Il y a  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$  possibilités de disposer les tours sur les 5 lignes choisies. Donc  $C_5^8 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = 376'320$ .

C : On met une tour sur l'échiquier : 64 possibilités ; on place ensuite une seconde tour : 49 possibilités et ainsi de suite :  $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 = 45'158'400$ .

D : Pour mettre 8 tours sur l'échiquier, il y a  $8!$  possibilités ; on choisit 5 tours dans chacune de ces positions :  $8! \cdot C_5^8 = 2'257'920$ .

Ces raisonnements sont-ils corrects ? Modifier légèrement les raisonnements non corrects de sorte qu'ils deviennent corrects. Vérifier que les quatre raisonnements fournissent la même réponse.

## 1.10 Réponses

1.1 a) 256; b) 24; c) 80.

1.2 72 et 24.

1.3 a) 2'340'000; b) 2'160'000.

1.4 a) 479'001'600; b) 39'916'800; c) 79'833'600.

1.5 a) 243; b) 7'776.

1.6 a) 9; 90; 90; 900; 90'000; b) 21 février 2012 (21022012) et 2 février 2020 (02022020).

1.7 64

1.8 a) 216; b) 84; 72; 36.

1.9 a) 2'730; b) i) 432; ii) 1'178.

1.10 2'520

1.11 180

1.12 a) 1'048'576; b) 20; 4'845; 184'756; 1.

1.13 a) 15'600; b) i) 6'840; ii) 120; iii) 1; iv) 6.

1.14 933'120

1.15 a) 24; b) 36.

1.16 a) 1'680; b) 1'260; c) 180.

1.17 a) 256; b) i) 24; ii) 81; iii) 108.

1.18 a) 32'768; b) 6'435; c) 8'192; d) 91.

1.19 a) 462; b) 6'930.

1.20 a) 3'628'800; b) 241'920; c) 1'693'440.

1.21 a) 78;  $156 = 2 \cdot 78$ ; b) 286;  $1'716 = 6 \cdot 286$ ; c) 715; 1'287.

1.22 a) 720; b) 100; c) 180.

**1.23** a) 13'860; b) 12'096.

**1.24** a) 120; b) 2'520; c) 126.

**1.25** 66

**1.26** a) i) 28; ii) 440; iii) 330; iv) 840; b) i) 28; ii) 39; iii) 55.

**1.27** a) 4'060; b) 1'053; c) 1'135; d) 5'937'750; e) 2'960'100.

**1.28** a) 144; b) 8; c) 330; d) 540.

**1.29** a) 120; b) 72; c) 12

**1.30** 362'880

**1.31** a) 720; b) 72; c) 72

**1.32** a) 720; b) 360; c) 60; d) 240; e) 96; f) 24; g) 144; h) 216; i) 336; j) 216; k) 180; l) 96

**1.33** a) 14'348'907; b) 756'756

**1.34** a) 495; b) 11'880; c) 2'592; d) 2'808.

**1.35** a) 4'096; b) 486; c) 1'200; d) 630.

**1.36** a) 435; b) 136; c) 420; d) 185.

**1.37** a) 2187; b) i) 2059; ii) 560; iii) 210

**1.38** B correct.

# Chapitre 2

## Probabilités

### 2.1 Notion intuitive de probabilité

#### Phénomènes et expériences aléatoires

- **Phénomène aléatoire** : phénomène qui, lorsqu'il est observé dans des conditions déterminées, ne conduit pas toujours au même résultat
- **Expérience aléatoire** : expérience faisant intervenir un phénomène aléatoire dont on peut déterminer au préalable l'ensemble des résultats possibles

#### Exemple 2.1.

- a) *Lancer d'un dé*
- b) *Lancer de deux pièces de monnaie*
- c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

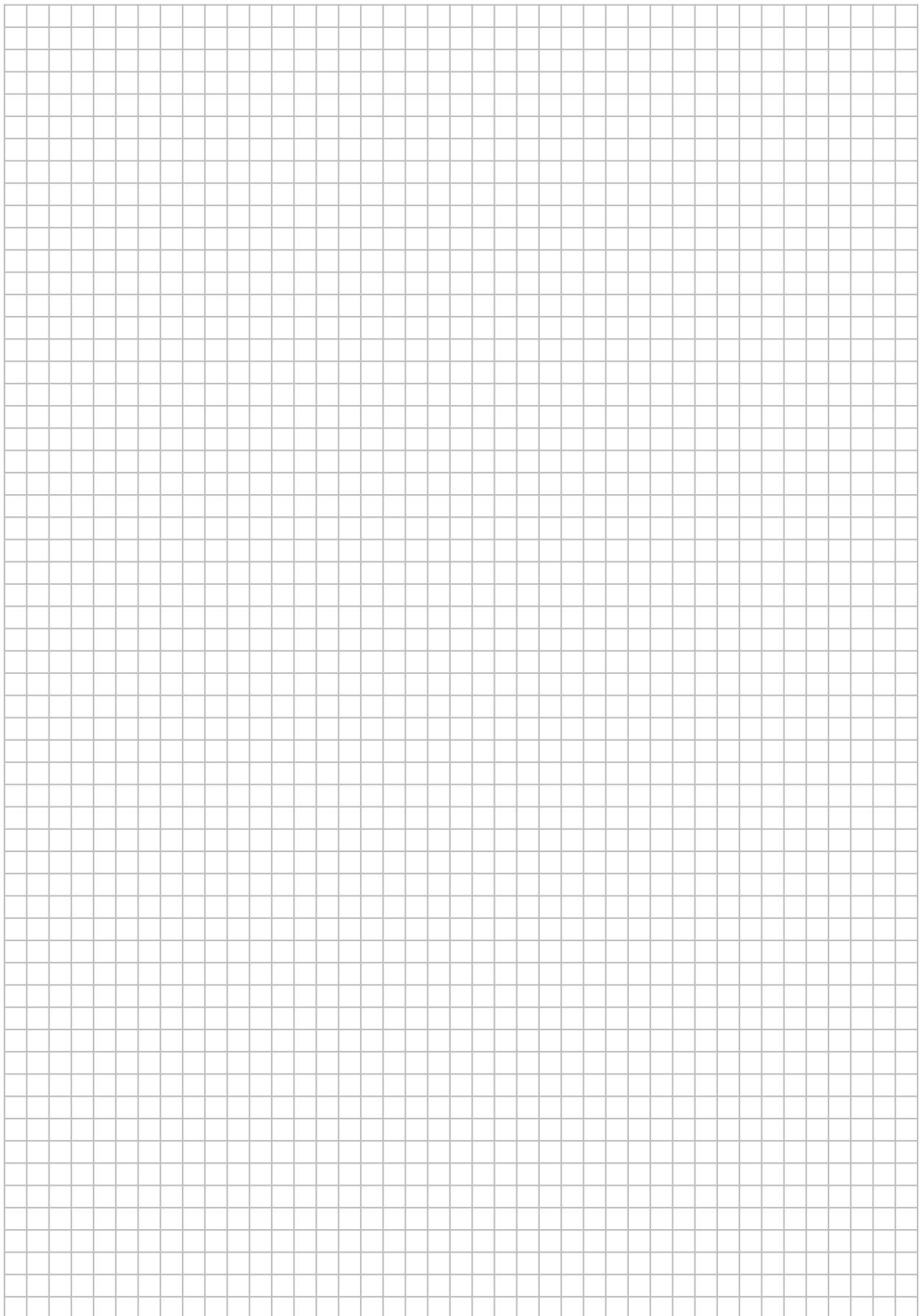
#### Univers

- **Univers** : ensemble  $U$  de tous les cas (ou issues) possibles
- On note  $|U|$  le nombre d'issues contenues dans  $U$

#### Exemple 2.2.

Décrire l'univers  $U$  des expériences aléatoires suivantes :

- a) *Lancer d'un dé*



b) *Lancer de deux pièces de monnaie*

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

### Evénements

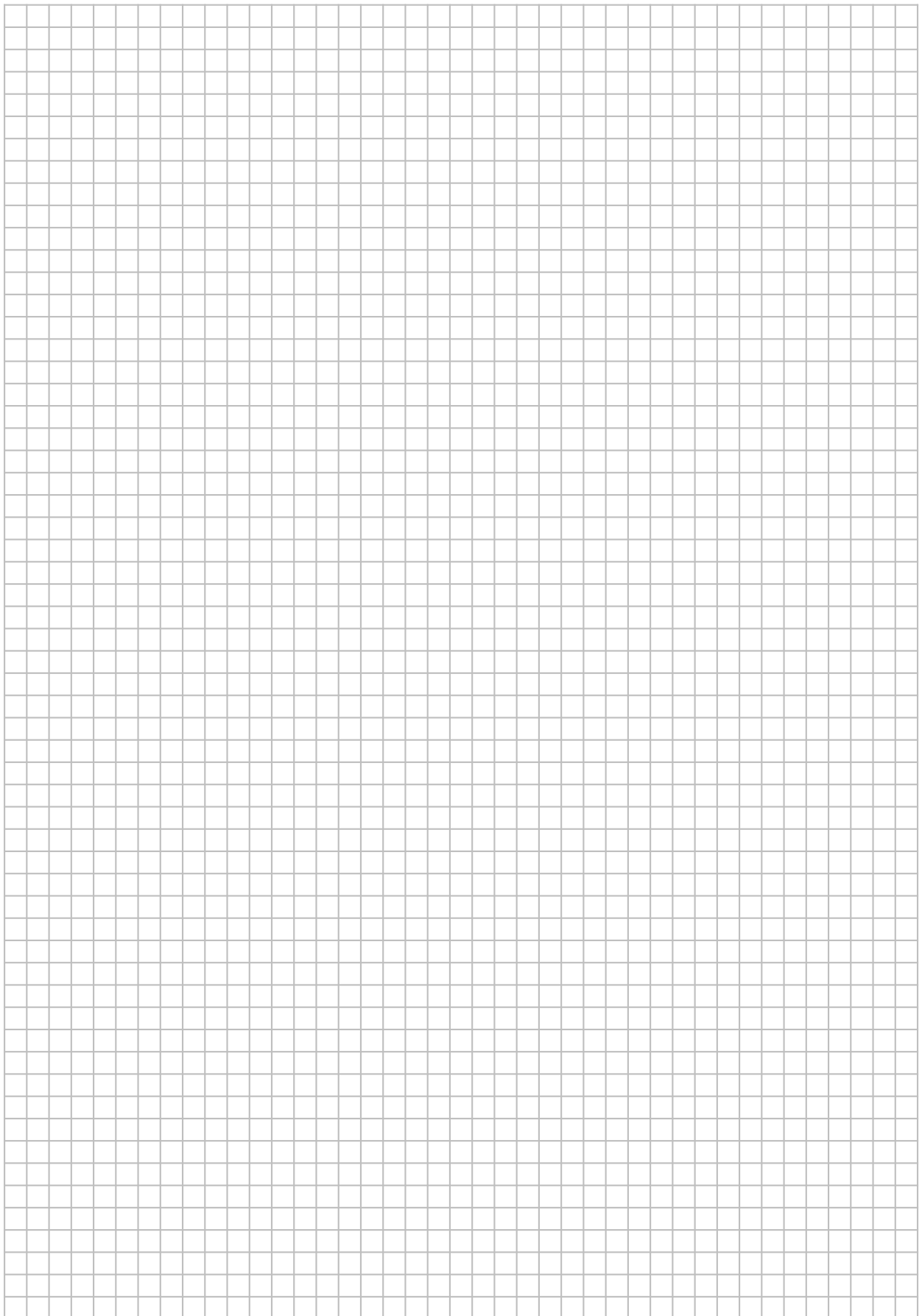
- Un **événement**  $A$  est un **sous-ensemble de cas possibles**, donc un sous-ensemble de  $U$ .
- L'événement est dit **élémentaire** s'il n'est formé que d'une **seule issue**.
- $U$  est l'événement **certain**
- $\emptyset$  est l'événement **impossible**
- Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue commune, donc si  $A \cap B = \emptyset$ .

### Exemple 2.3.

a) *Lancer d'un dé*

Soit l'événement  $A$  : *obtenir un nombre premier*

Enumérer  $A$ .



b) *Lancer de deux pièces de monnaie*

Soit l'événement  $B$  : *obtenir au moins une pièce avec un côté face*

Enumérer  $B$ .

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Soit l'événement  $C$  : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans*

Enumérer  $C$ .

## Notion intuitive de probabilité

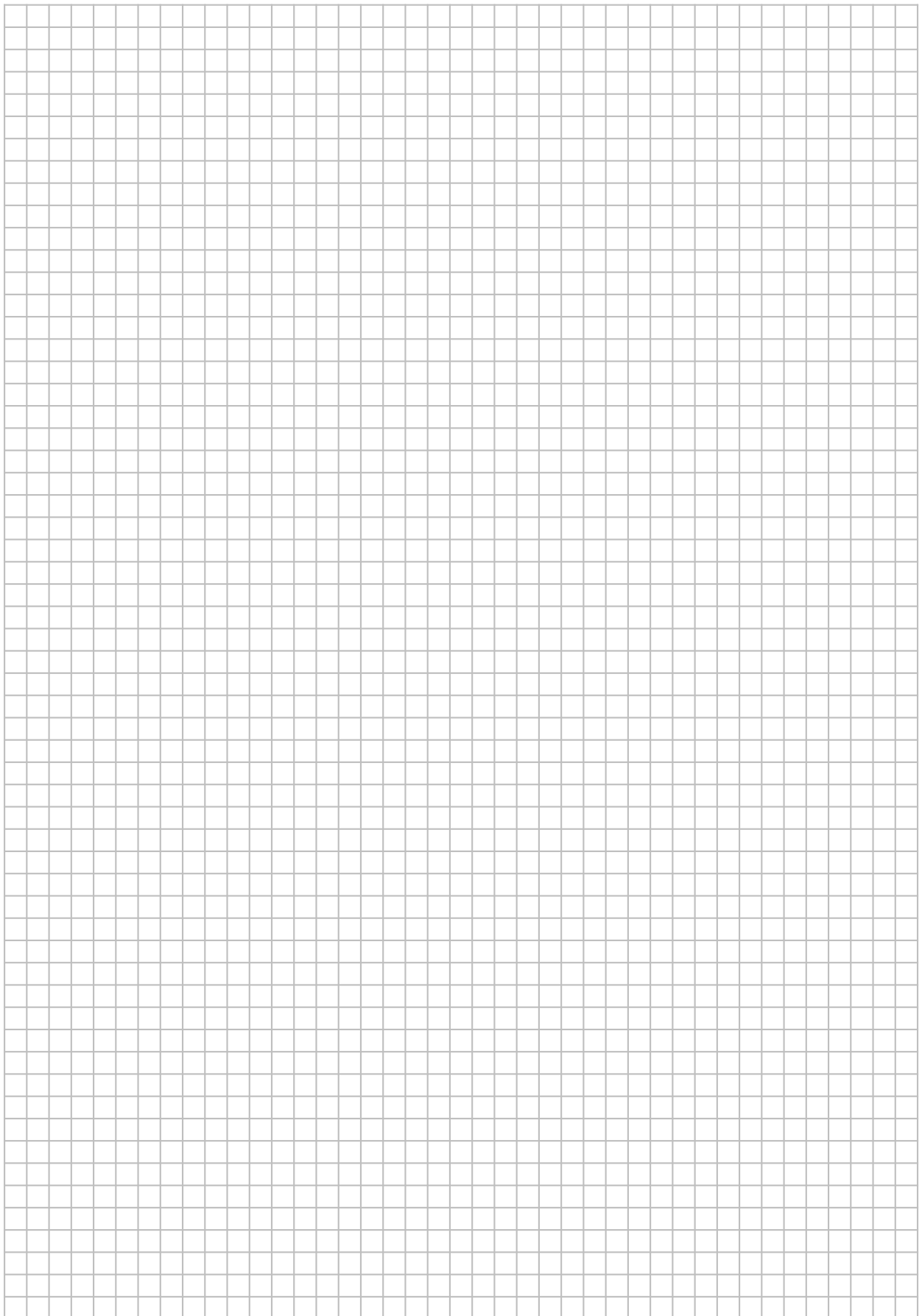
- La probabilité d'un événement est un nombre sans unité compris entre 0 et 1 (100%) exprimant les « chances » que l'événement se réalise.

### Exemple 2.4.

a) *Lancer d'un dé équilibré*

Quelle est la probabilité de l'événement  $A$  : *obtenir un nombre premier* ?



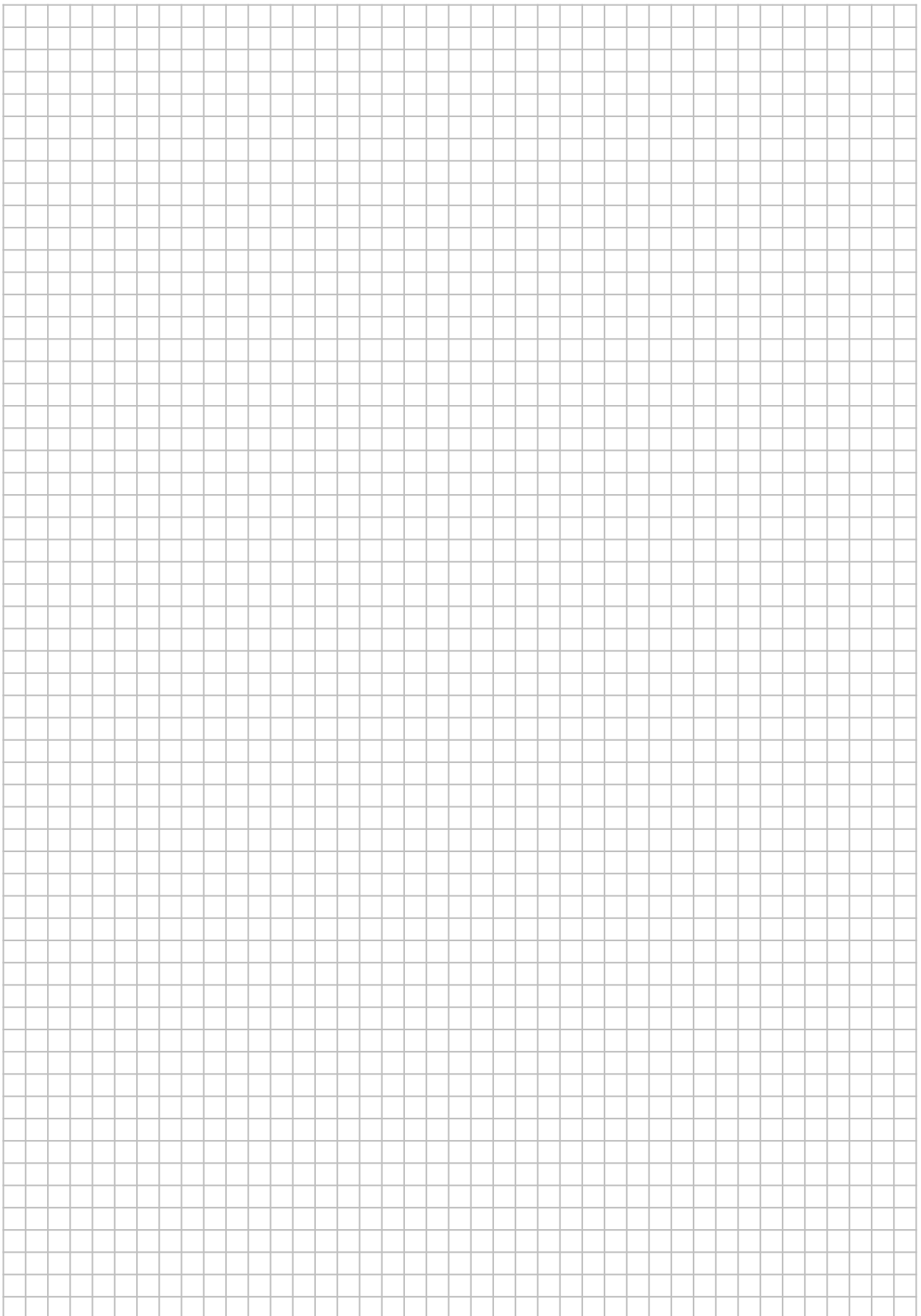


b) *Lancer de deux pièces de monnaie équilibrées*

Quelle est la probabilité de l'événement  $B$  : *obtenir au moins une pièce avec un côté face* ?

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Quelle est la probabilité de l'événement  $C$  : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans* ?



## 2.2 Situation d'équiprobabilité

- On se trouve dans une **situation d'équiprobabilité** si l'on peut décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un univers  $U$  dont tous les cas ont les mêmes « chances » de se réaliser.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement  $A$  vaut :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas contenus dans } A}{\text{nombre de cas contenus dans } U} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$$

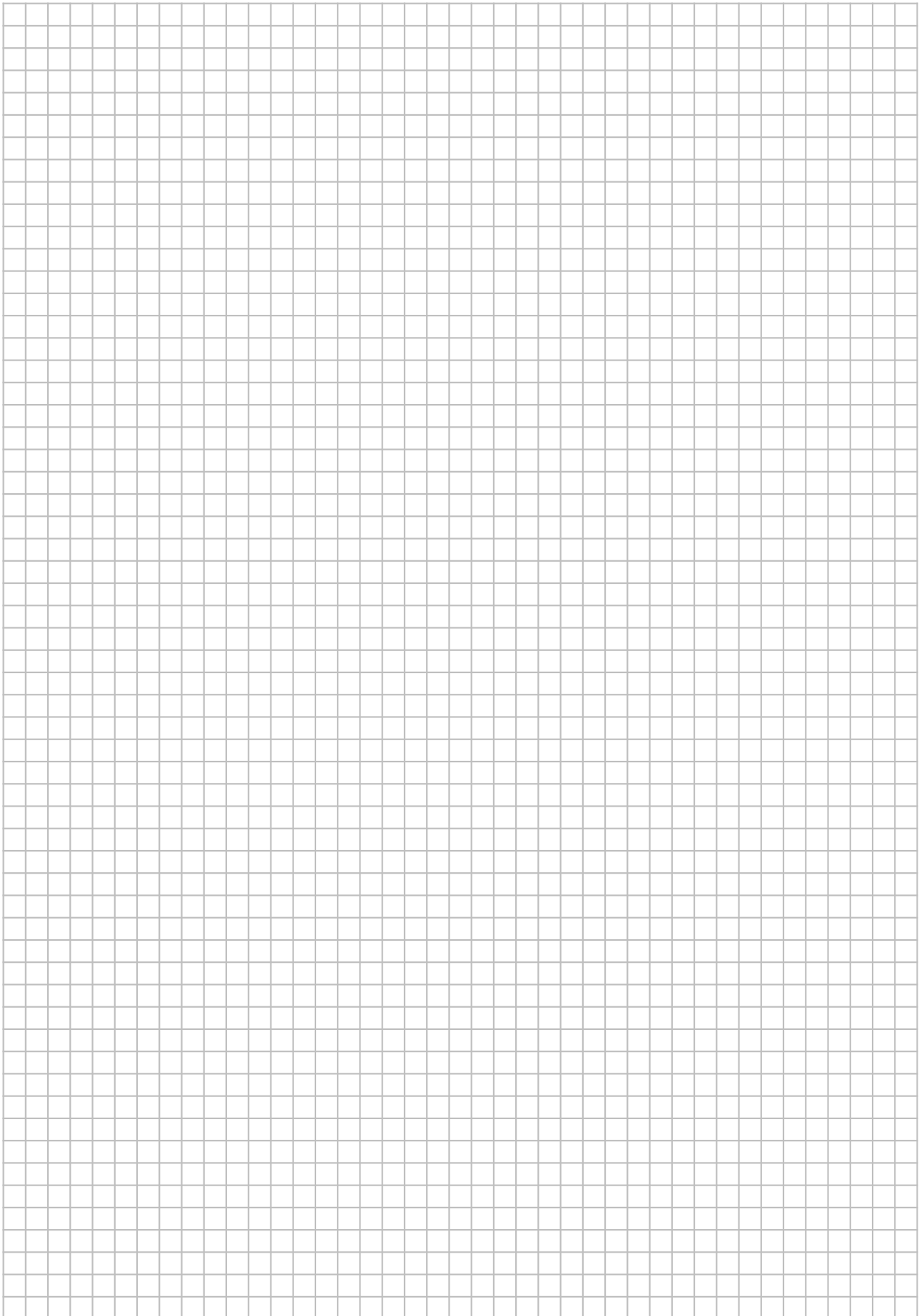
### Exemple 2.5.

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 36 cartes.

Quelles sont les probabilités des événements suivants :

$A$  : tirer deux cartes noires

$B$  : tirer une figure (valets, dames, rois) exactement



## Propriétés dans une situation d'équiprobabilité

Soient  $A$  et  $B$  deux événements.

### 1) Valeur d'une probabilité

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

En particulier,  $p(U) = 1$ , où  $U$  est l'univers des cas possibles

### 2) Probabilité d'un événement contraire

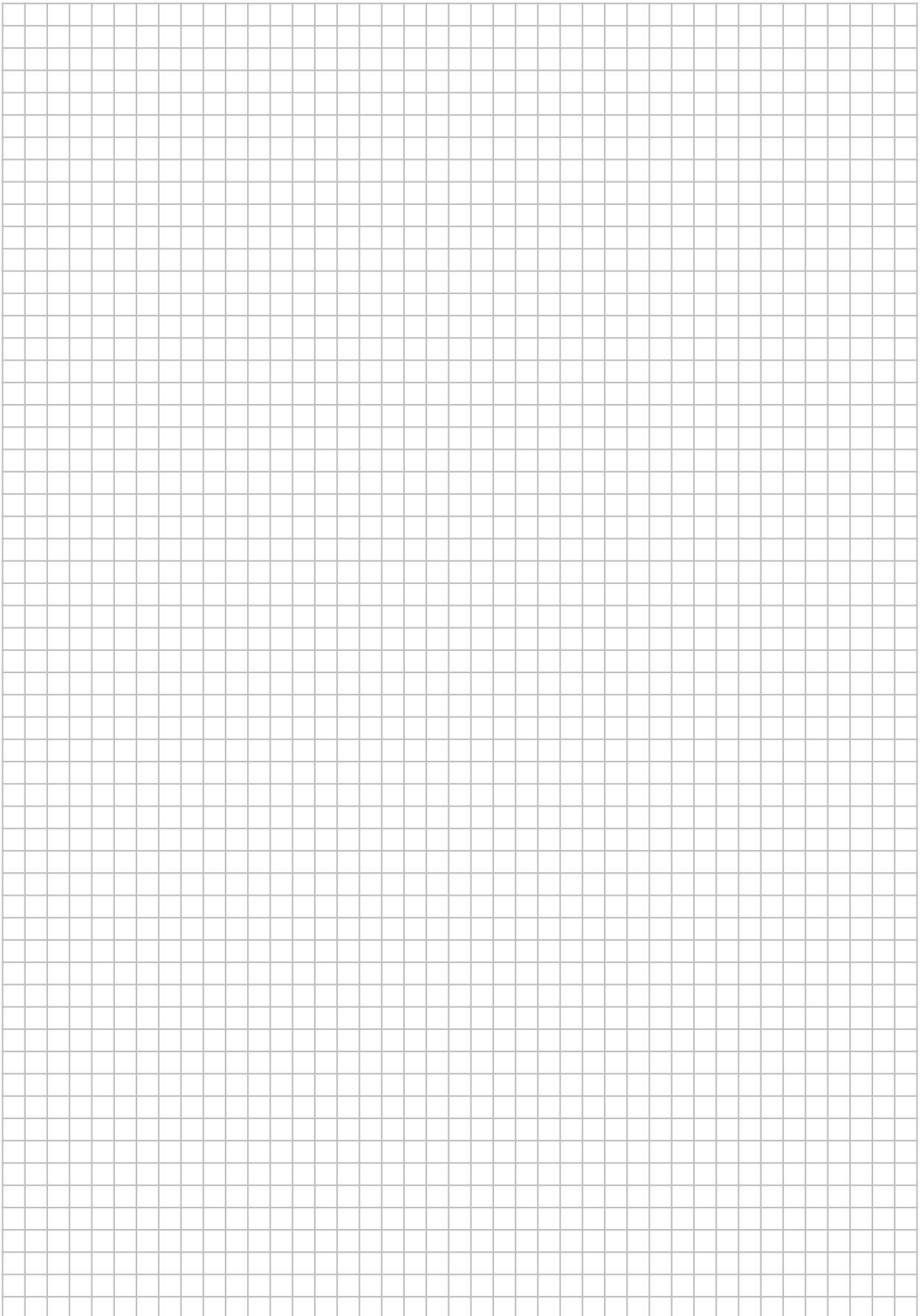
Soit  $\bar{A} = U - A$  l'événement comportant les cas non compris dans l'événement  $A$ .

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

### 3) Probabilité d'une union d'événements

**Cas particulier :** Si  $A$  et  $B$  sont des événements **incompatibles** ( $A \cap B = \emptyset$ )

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$



**Cas général :** Si  $A$  et  $B$  sont des événements quelconques

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

**Exemple 2.6.**

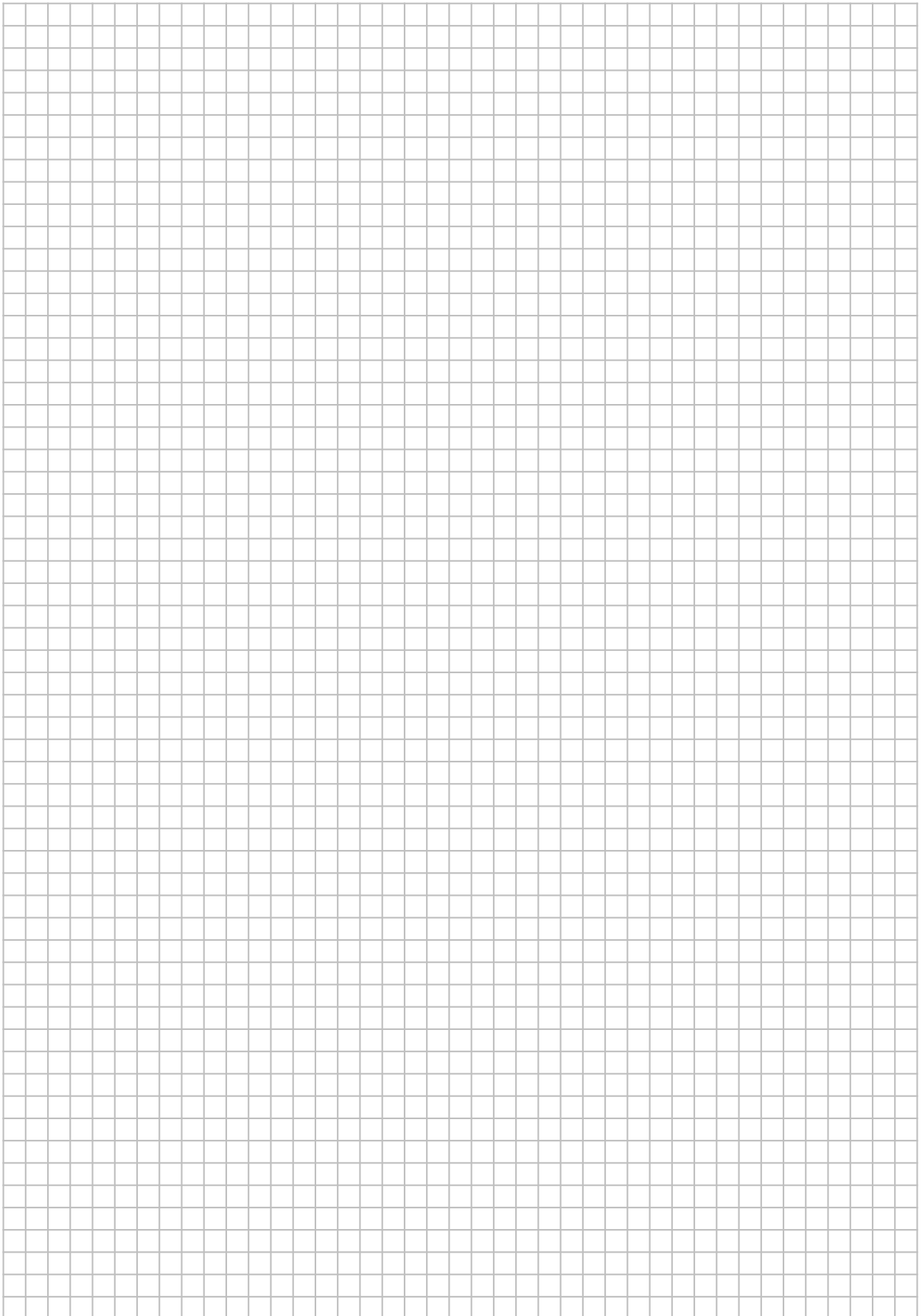
On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules blanches indistinguables au toucher. Calculer la probabilité des événements suivants :

$A$  : Tirer au moins une boule rouge

$B$  : Tirer deux boules de même couleur

Calculer ensuite  $p(A \cap B)$  et  $p(A \cup B)$ , puis vérifier la règle de la probabilité de l'union de deux événements.





## 2.3 Axiomes de probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers  $U$ .

A chaque événement  $A$ , une probabilité associe un nombre réel  $p(A)$  satisfaisant les axiomes suivants (dits **axiomes de Kolmogorov**) :

- 1)  $p(A) \geq 0$
- 2)  $p(U) = 1$
- 3) Si  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** ( $A \cap B = \emptyset$ )  
alors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

### Propriétés d'une probabilité

On retrouve les propriétés vues dans une situation d'équiprobabilité :

- 1) **Valeur de la probabilité d'un événement**

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

- 2) **Probabilité de l'événement contraire**

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

- 3) **Probabilité d'une union de deux événements**

Pour deux événements  $A$  et  $B$  quelconques

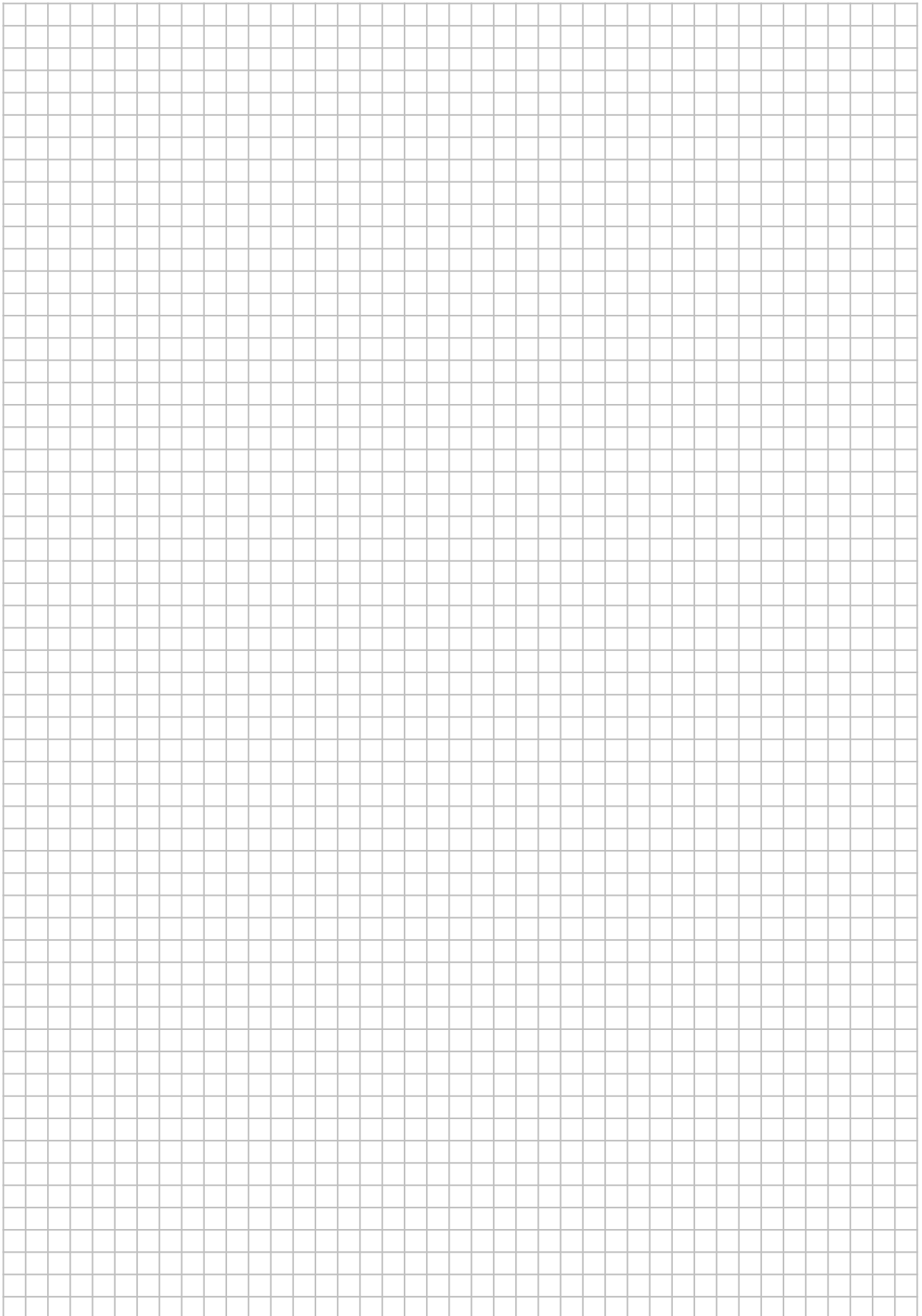
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

### Exemple 2.7.

Une course de chevaux compte trois partants : A, B et C.

Les pronostiqueurs estiment que A a deux fois plus de chances de gagner que B et que B a trois fois plus de chances de gagner que C.

Selon les pronostiqueurs, quelle est la probabilité que C gagne ?



## 2.4 Probabilité conditionnelle

### Exemple 2.8.

On considère un échantillon de 1500 élèves, dont 900 filles, qui ont effectué des études gymnasiales (avec obtention ou non d'une maturité)

On constate que 80 % des garçons ont obtenu leur maturité en trois ans, alors que cette proportion est de 90 % chez les filles.

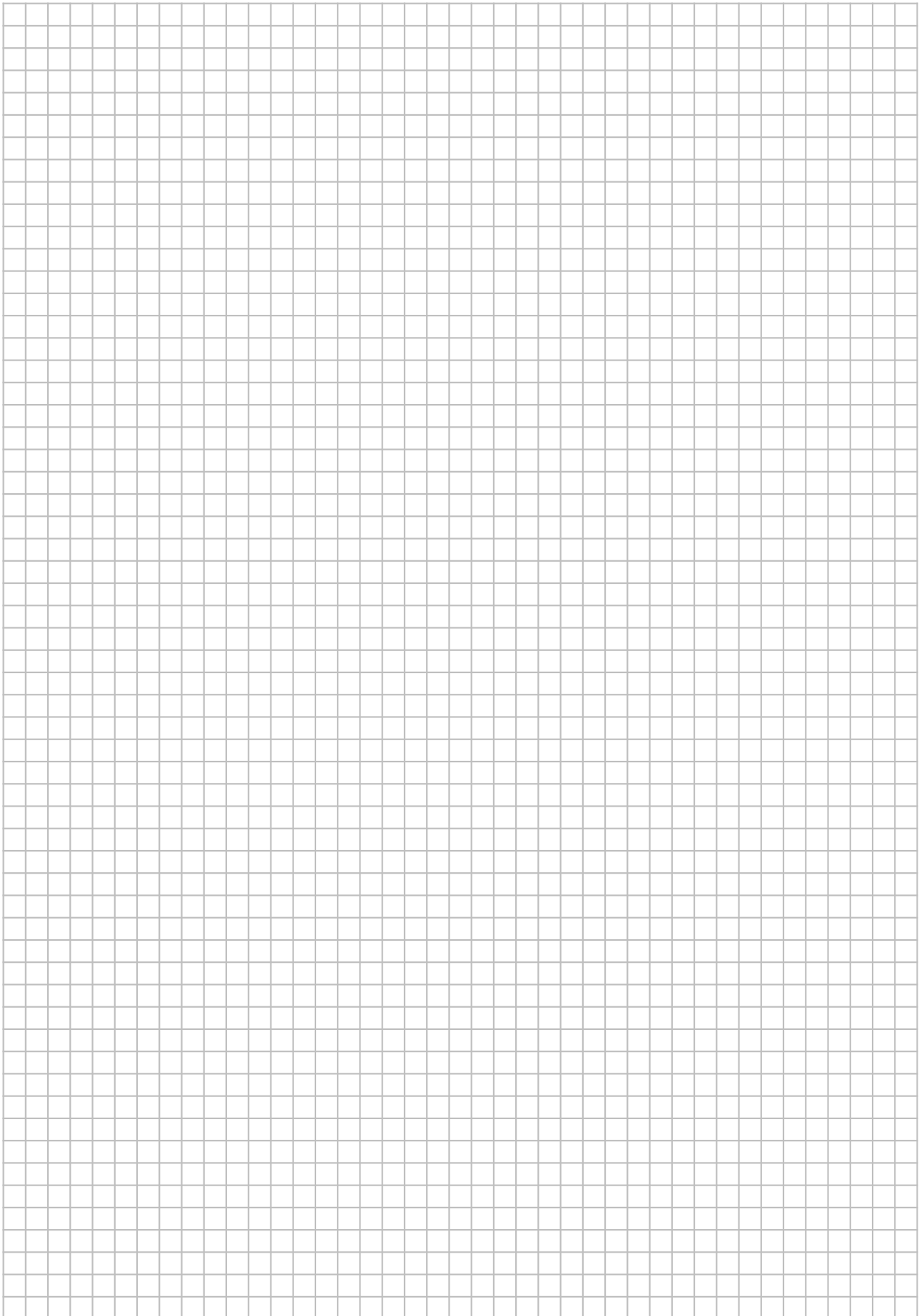
a) On choisit un élève au hasard

Quelle est la probabilité que ce soit un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

b) On a choisi un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans.

Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?



## Probabilité conditionnelle de « A sachant B »

Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $p(B) \neq 0$ .

- La **probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé** (plus simplement, probabilité de  $A$  sachant  $B$ ), notée  $p(A/B)$ , est définie par :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

### Remarque 2.1.

**Cas particulier :** si  $U$  est formé d'issues équiprobables, on a :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{cas communs à } A \text{ et à } B}{\text{cas contenus dans } B}$$

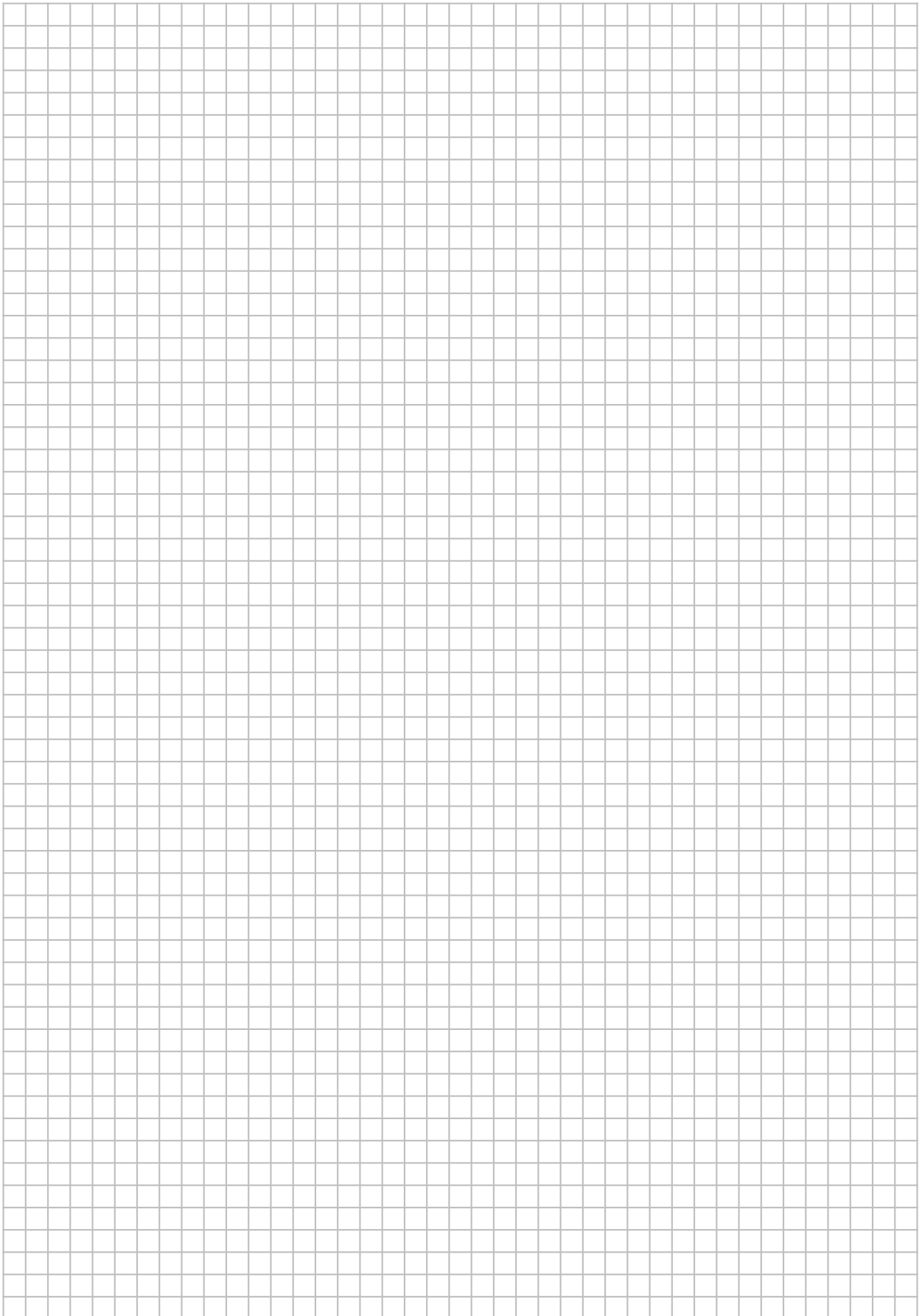
### Exemple 2.9.

Nicolas a deux enfants. Je sais qu'il a au moins un garçon.

Quelle est la probabilité qu'il ait deux garçons ?

### Exemple 2.10.

Lors du lancer de deux dés équilibrés, calculer la probabilité que la somme des deux dés valent 8 sachant que les deux dés indiquent des numéros différents.



## Propriétés d'une probabilité conditionnelle

1) La probabilité conditionnelle vérifie les propriétés d'une probabilité non conditionnelle; en particulier :

- $0 \leq p(A/B) \leq 1$
- $p(A/B) = 1 - p(\bar{A}/B)$

2) **Formule de Bays**

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$$

### Exemple 2.11.

Une urne contient 2 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge :

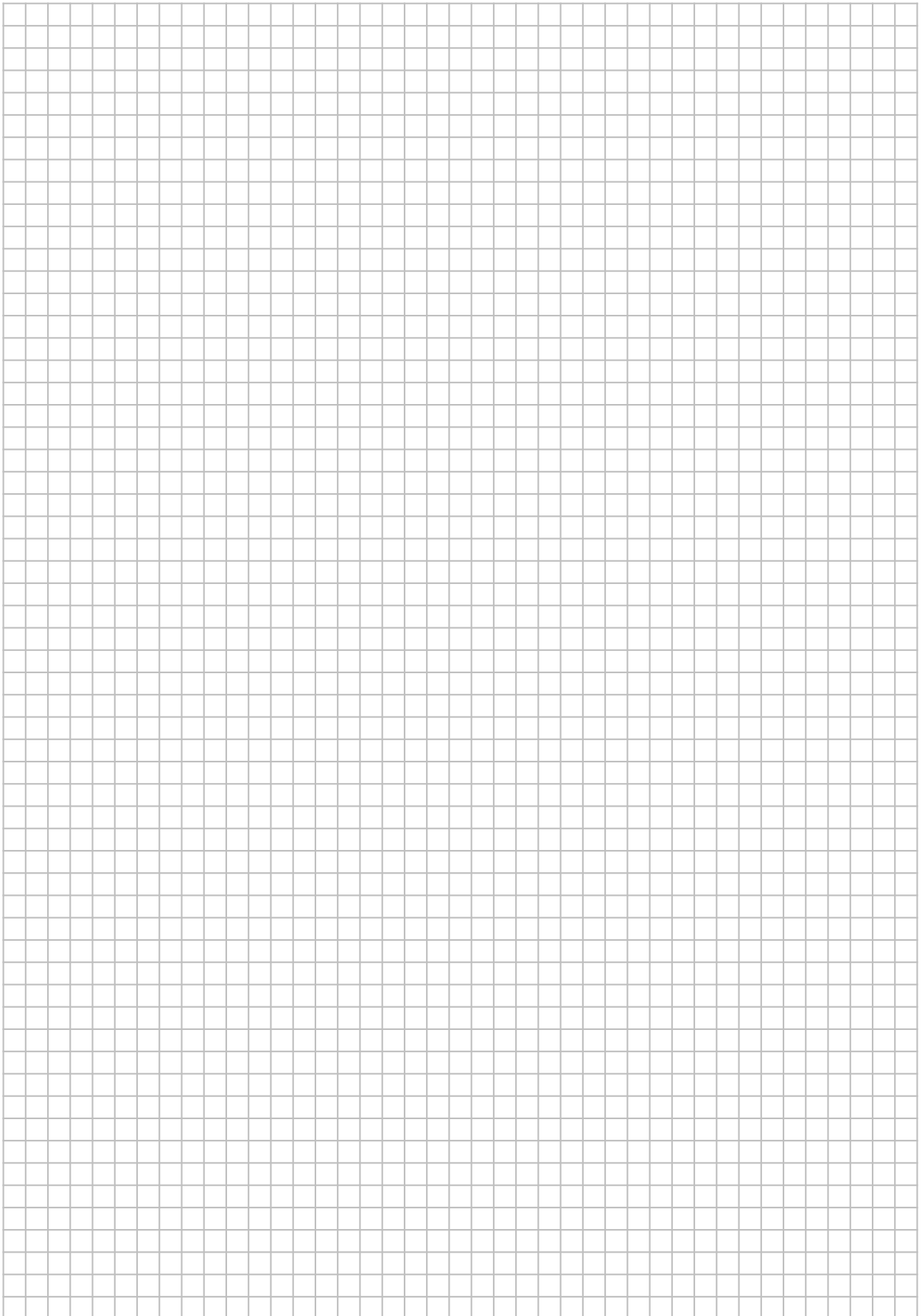
- En utilisant l'équiprobabilité.
- En utilisant un arbre.

### Exemple 2.12.

Une usine fabrique des pièces mécaniques. Chacune des pièces subit un contrôle de qualité qui décide d'accepter ou d'éliminer la pièce contrôlée. Lors de la fabrication, la probabilité qu'une pièce soit de bonne qualité est de 90 %; de plus, lors du contrôle de qualité, la probabilité d'une erreur de jugement (pièce de bonne qualité éliminée ou pièce défectueuse acceptée) est de 5 % quelle que soit la pièce contrôlée.

Pour une pièce prise au hasard dans la production de la fabrique, calculer la probabilité qu'elle soit de bonne qualité si elle a été acceptée lors du contrôle.





## 2.5 Événements indépendants

Un événement  $A$  est dit **indépendant** d'un événement  $B$  si le fait de savoir que l'événement  $B$  est réalisé ne modifie pas la probabilité que  $A$  se réalise :

$A$  est indépendant de  $B$  si  $p(A/B) = p(A)$

### Propriété de l'indépendance

- Si  $A$  est indépendant de  $B$ , alors  $B$  est indépendant de  $A$
- $A$  et  $B$  indépendants  $\iff p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

### Exemple 2.13.

On tire une carte dans un jeu de poker.

a) Soient les événements suivants :

$A$  : *obtenir un as*

$C$  : *obtenir un cœur*

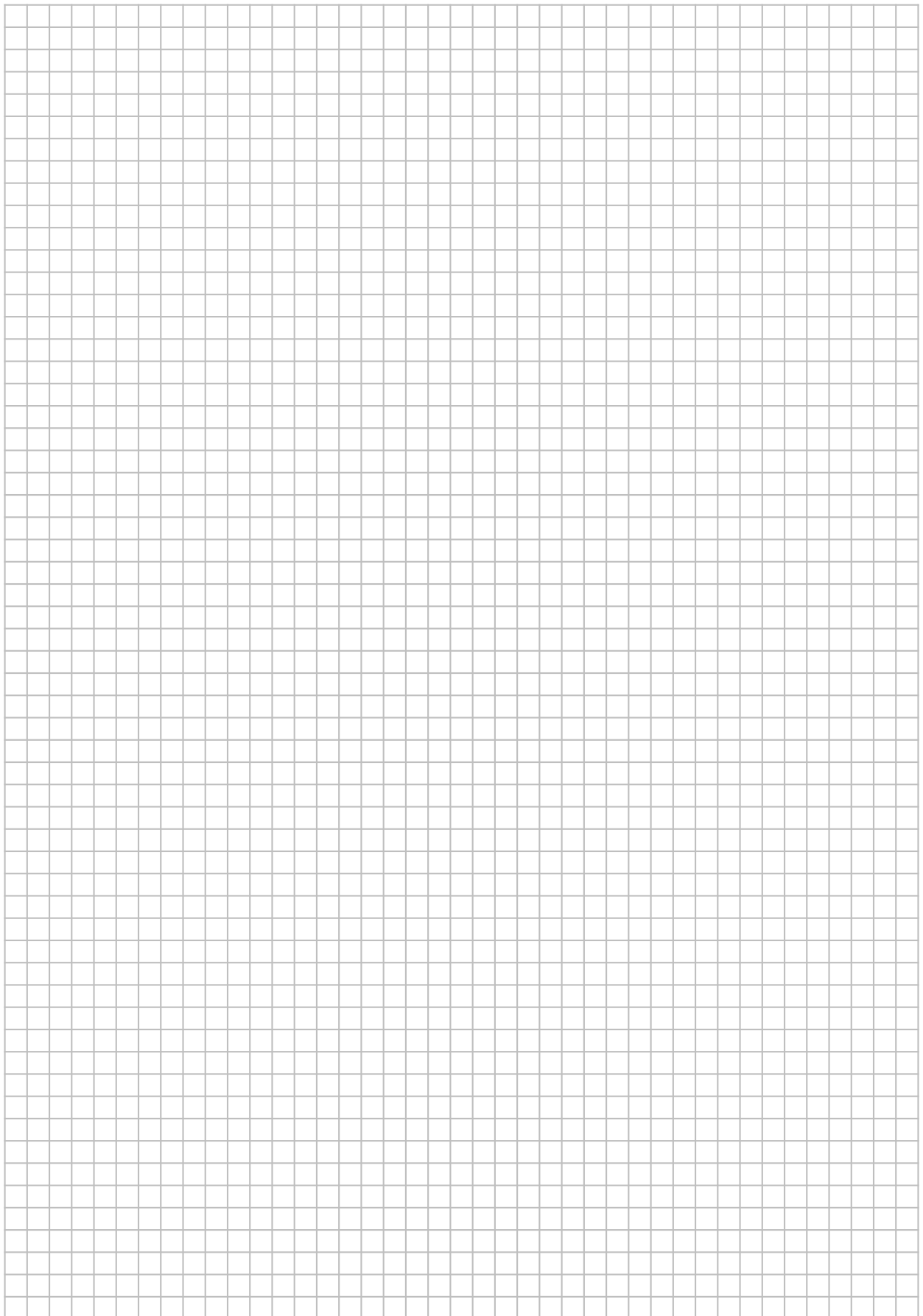
Les événements  $A$  et  $C$  sont-ils indépendants ?

b) Soient les événements suivants :

$R$  : *obtenir un roi*

$F$  : *obtenir une figure (valet, dame ou roi)*

Les événements  $R$  et  $F$  sont-ils indépendants ?



## 2.6 Expérience binomiale

### Exemple 2.14.

On lance un dé équilibré 8 fois de suite.

- a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six
- b) Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois six exactement.

### Expérience binomiale

On répète  $n$  fois, dans les mêmes conditions et de manière indépendante, une épreuve à deux issues (notées 0 et 1) dont la probabilité d'obtenir 1 vaut  $p$ .

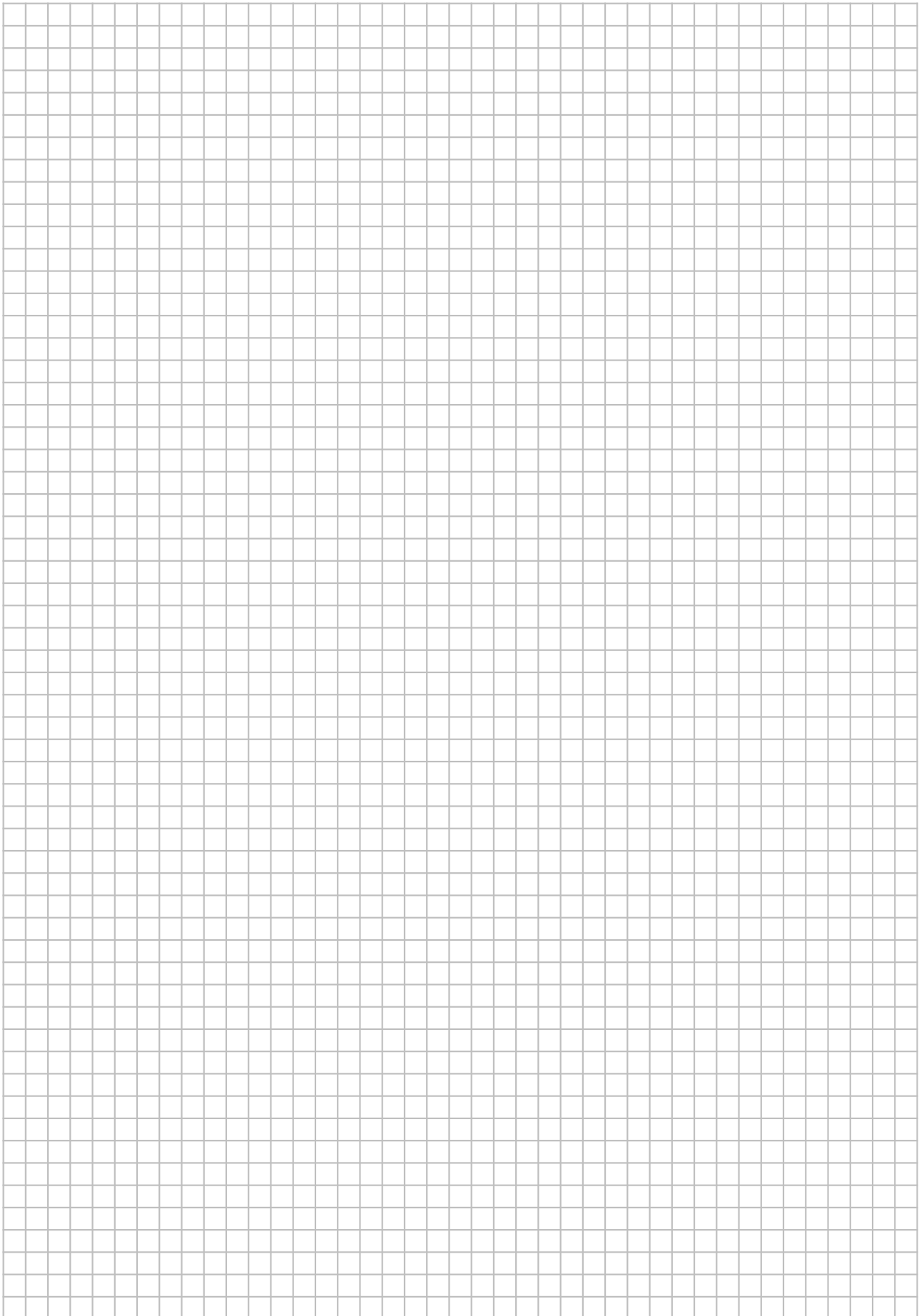
**Probabilité d'obtenir  $k$  fois « 1 » (et donc  $n - k$  fois « 0 »)**

$$p(k \text{ fois « 1 »}) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

où  $C_k^n$  est le coefficient binomial  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

### Remarque 2.2.

Le coefficient binomial  $C_k^n$  compte dans l'arbre d'une expérience binomiale le nombre de branches qui comptent  $k$  fois « 1 » et  $n - k$  fois « 0 »



## 2.7 Exercices

### 2.1

Une école de 200 élèves compte 80 filles, 50 porteurs de lunettes et 30 filles à lunettes.

- On choisit une fille au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes.
- On choisit un porteur de lunettes au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
- On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon sans lunettes ?
- On choisit deux élèves au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille sans lunettes et un garçon à lunettes ?

### 2.2

Pour connaître les intentions de vote d'une population, on a interrogé 100 personnes et on leur a demandé pour lequel des partis A, B et C elles voteraient. On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

	A	B	C
Hommes	13	21	19
Femmes	20	8	19

- On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Quelle est la probabilité que la personne vote pour le parti A ?
- On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle vote pour le parti A ?
- On choisit au hasard un homme. Quelle est la probabilité qu'il vote pour le parti B ou C ?
- On choisit au hasard une personne qui vote pour le parti B. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
- On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle ne vote pas pour le parti B ?
- On choisit au hasard une personne qui ne vote pas pour le parti A. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

### 2.3

Un sac contient trois objets rouges, quatre objets bleus et cinq objets jaunes. On tire simultanément trois objets au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : Les trois objets tirés sont jaunes,
- B : Il y a un objet de chaque couleur ;
- C : Aucun objet n'est rouge ;
- D : Il y a au moins un objet rouge ;
- E : Il y a au moins un objet bleu ;
- F : Il y a au plus un objet bleu.

**2.4**

On tire simultanément au hasard 8 cartes d'un jeu de 32 cartes (on a retiré les six d'un jeu de 36 cartes). Calculer la probabilité des événements :

- A : Parmi les 8 cartes, il y a l'as de cœur ;
- B : Il n'y a aucun as parmi les 8 cartes ;
- C : Il y a au moins un as parmi les 8 cartes.

**2.5**

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire au hasard simultanément 5 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : On tire 2 rois, 2 dames et 1 valet ;
- B : On tire les quatre rois ;
- C : Le roi de cœur se trouve dans le tirage.

**2.6**

On obtient un nombre de trois chiffres en jetant un dé équilibré trois fois de suite.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : On obtient un nombre formé de trois chiffres différents ;
- B : On obtient un nombre qui se termine par 6 ;
- C : On obtient un nombre qui contient exactement un chiffre 6 ;
- D : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut 15 ;
- E : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut au moins 15.

**2.7**

On sort d'un jeu les quatre as et les quatre rois. On tire ensuite au hasard simultanément deux cartes parmi ces huit cartes.

- a) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as ?
- b) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as rouges ?
- c) Quelle probabilité a-t-on de tirer un as au moins ?
- d) Quelle probabilité a-t-on de tirer un roi et un as rouge ?
- e) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux cartes de couleurs différentes ?

**2.8**

On dispose d'un sac contenant 10 lettres différentes, soit 6 consonnes et 4 voyelles. Pour former un mot de quatre lettres, on tire successivement quatre fois une lettre du sac en remettant dans le sac à chaque fois la lettre tirée.

Calculer la probabilité d'obtenir un mot qui :

- a) ne contient aucune voyelle ;
- b) contient au moins une consonne ;
- c) contient deux consonnes et deux voyelles ;
- d) contient au moins une voyelle et au moins une consonne.

**2.9**

On lance un dé pipé à six faces. Les nombres pairs ont la même probabilité d'apparition. Les nombres impairs ont la même probabilité d'apparition. La probabilité d'obtenir l'un des nombres pairs est égale aux 75% de celle d'obtenir l'un des nombres impairs.

Quelle est la probabilité des événements :

A : On obtient 1 ?

B : On obtient 1 ou 6 ?

**2.10**

Les 8 faces d'un dé octaédrique sont numérotées de 1 à 8 et on a observé que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \text{ et } p(6) = p(7) = p(8) = 2 \cdot p(1)$$

On lance ce dé irrégulier. Quelle est la probabilité des événements :

A : On obtient 2 ?

B : On obtient 8 ?

C : On obtient l'un des chiffres 3 , 5 ou 8 ?

**2.11**

Arnaud, Buck et Charles participent à une course de natation. Arnaud et Buck ont la même probabilité de gagner et chacun d'eux a deux fois plus de chances de gagner que Charles. Calculer la probabilité pour que Buck ou Charles gagne la course.

**2.12**

En 1983, la Suisse avait une population de 6'410'000 habitants dont 947'000 étrangers. La même année les tribunaux prononcent 22'055 condamnations dont 6'615 concernaient des étrangers. On tire au hasard une personne dans la population. Quelle probabilité y a-t-il que la personne choisie :

- ait été condamnée si elle est suisse ?
- ait été condamnée si elle est étrangère ?
- soit suisse et ait été condamnée ?
- soit étrangère et ait été condamnée ?
- soit suisse si l'on sait qu'elle a été condamnée ?
- soit étrangère si l'on sait qu'elle a été condamnée ?

**2.13**

Une urne contient 10 boules blanches et 7 noires. On en extrait simultanément 2 boules.

- Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?
- Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
- Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
- Les deux boules tirées sont de même couleur ; quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux noires ?



**2.14**

On répartit sur les faces d'un dé vert et d'un dé rouge (les deux dés sont parfaitement équilibrés) les numéros de 1 à 12 de la manière suivante :

- sur chacune des 6 faces du dé vert, on a noté un des numéros suivants : 1, 3, 7, 8, 10, 11 ;
- sur chacune des 6 faces du dé rouge, on a noté un des numéros suivants : 2, 4, 5, 6, 9, 12.

- a) On lance les deux dés simultanément. Calculer la probabilité :
  - i) d'obtenir deux nombres pairs ;
  - ii) d'obtenir au moins un nombre pair ;
  - iii) d'obtenir un nombre pair et un nombre impair.
- b) Jean décide de jouer avec le dé vert et Pierre avec le dé rouge. Jean et Pierre lancent chacun leur dé ; le joueur qui a obtenu le plus grand numéro a gagné la partie.
  - i) Calculer la probabilité que Jean gagne la partie.
  - ii) Sachant que Jean a gagné la partie, calculer la probabilité qu'il ait obtenu un 10.

**2.15**

Les billets d'une loterie sont émis par séries de dix. Chaque série contient trois billets gagnants.

- a) Une personne achète trois billets d'une même série. Quelle est la probabilité que l'un des billets au moins soit gagnant ?
- b) A présent, chaque billet acheté provient d'une série différente de dix billets. On achète trois billets. Quelle est la probabilité que l'un des trois billets au moins soit gagnant ? Quelle est la probabilité qu'un billet exactement soit gagnant ?
- c) On signale qu'un billet coûte 2 francs. Si le billet est gagnant, on obtient un prix de 5 francs. On se propose de jouer de la façon suivante sur une même série de dix billets : on achète un billet ; s'il est perdant, on arrête. S'il est gagnant, on en rachète un et ainsi de suite (le joueur sait qu'il n'y a que 3 billets gagnants dans une série de 10).
  - i) Décrire l'ensemble des événements à l'aide d'un arbre avec les probabilités correspondantes.
  - ii) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 francs de plus après avoir joué qu'avant ?

**2.16**

On dispose d'un paquet de douze cartes contenant les quatre valets, les quatre dames et les quatre rois (les figures) de pique, carreau, trèfle et cœur (les familles). On tire simultanément trois cartes de ce paquet. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) trois valets ;
- b) trois figures différentes ;
- c) trois cartes de trois familles différentes ;
- d) trois rois sachant que l'on a tiré trois mêmes figures ;
- e) la dame de pique sachant que l'on a tiré deux rois exactement.

**2.17**

Une boîte A contient 8 pièces dont 3 sont défectueuses et une boîte B en contient 5 dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce dans chaque boîte.

- a) Calculer la probabilité qu'aucune des pièces ne soit défectueuse.
- b) Calculer la probabilité qu'une seule pièce soit défectueuse.
- c) Si une seule pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte A ?

**2.18**

Trois marques A, B et C de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43 %, 34 % et 23 %. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple (S) ou à trois vitesses (V) : 35 % des tétines de la marque A sont simples, ainsi que 25 % de la marque B et 47 % de la marque C. Un jeune père paniqué achète au hasard un biberon. Il constate que ce biberon a une tétine simple. Quelle est la probabilité qu'il soit de marque C ?

**2.19**

Deux urnes notées  $U_1$  et  $U_2$  contiennent 3 boules rouges, 2 boules vertes pour  $U_1$  et 1 boule rouge, 1 boule verte pour  $U_2$ .

On tire une boule de  $U_1$ , puis on met les boules restantes dans  $U_2$ . On tire alors une boule de  $U_2$ . Calculer la probabilité :

- a) que cette boule soit rouge,
- b) que cette boule soit rouge sachant que la première boule tirée était rouge,
- c) que la première boule tirée ait été rouge si, au second tirage, on a tiré une boule rouge.

**2.20**

Dans un atelier, il y a trois machines. Pendant une journée, la première tombe en panne avec une probabilité de 5 %, la deuxième avec une probabilité de 10 % et la troisième avec une probabilité de 15 %. Quelle est la probabilité :

- a) d'avoir au cours d'une journée exactement une machine en panne ?
- b) d'avoir au cours d'une journée exactement deux machines en panne ?
- c) de n'avoir au cours d'une journée aucune machine en panne ?

**2.21**

Pour faire une enquête dans un quartier d'une ville, on envoie par la poste à 10 personnes un questionnaire à remplir.

On estime à 30 % la probabilité que le questionnaire soit retourné. Calculer la probabilité de recevoir en retour :

- a) 10 questionnaires ;
- b) au plus un questionnaire ;
- c) plus de 7 questionnaires.

**2.22**

Marco est un joueur de basket-ball qui réussit 90 % de ses lancers francs. Calculer la probabilité qu'il réussisse :

- a) ses 10 prochains lancers francs ;
- b) exactement 5 des 10 prochains lancers francs ;
- c) au moins 7 de ses 10 prochains lancers francs.

**2.23**

Un test sanguin assure avec une fiabilité de 95 % la détection d'une certaine maladie lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, le test indique aussi un résultat positif pour 1 % des personnes saines. Si 0,5 % de la population porte effectivement cette maladie, quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif ?

**2.24**

Dans un village de 150 habitants, 100 ont été vaccinés contre la grippe. Lors d'une épidémie, on constate que 10 personnes ont été malades alors qu'elles avaient été vaccinées et que 10 autres ont aussi été malades alors qu'elles n'avaient pas été vaccinées.

- a) Calculer la probabilité qu'une personne vaccinée attrape la grippe.
- b) Calculer la probabilité qu'un habitant de ce village attrape la grippe.
- c) Calculer la probabilité qu'une personne ait été vaccinée si elle a la grippe.

**2.25**

Trois machines A, B et C produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces d'une usine. Chacune de ces machines fabrique respectivement 3 %, 4 % et 5 % de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce fabriquée par cette usine : elle est défectueuse. Calculer la probabilité que cette pièce ait été produite par la machine A.

**2.26**

- a) Chez un marchand de fruits, un avocat sur 10 en moyenne est pourri. Une cliente en achète 10.
  - i) Calculer la probabilité qu'elle ait au moins un avocat pourri.
  - ii) Calculer la probabilité qu'elle ait exactement un avocat pourri.
- b) Les avocats de ce marchand proviennent de trois pays A, B et C à raison de respectivement 50 %, 30 % et 20 %. Il constate que 1 % des avocats fournis par le pays A sont pourris, 5 % pour B et 10 % pour C. Une cliente achète un avocat.
  - i) Calculer la probabilité qu'il soit pourri.
  - ii) Il est pourri. Calculer la probabilité qu'il provienne du pays A.

**2.27**

Lors d'un test d'adresse, on dispose de 3 fléchettes que l'on doit lancer en direction d'une cible. On réussit le test (et on arrête de lancer) dès qu'une fléchette a atteint le centre de la cible ou que deux fléchettes ont atteint la cible. Une personne se présente au test. Pour celle-ci, on estime la probabilité d'atteindre le centre de la cible avec une fléchette à

0,25 alors que la probabilité d'atteindre la cible ailleurs qu'au centre est estimée à 0,50 (la probabilité de rater la cible est donc estimée à 0,25).

- a) Quelle est la probabilité de réussir le test ?
- b) Si cette personne réussit le test, quelle est la probabilité qu'une seule fléchette ait atteint la cible ?
- c) Trois personnes pour lesquelles on estime les probabilités comme pour celle ci-dessus se présentent au test. Quelle est la probabilité
  - i) qu'aucune d'entre elles ne le réussisse ?
  - ii) qu'au moins l'une d'entre elles ne le réussisse pas ?

## Exercices de révision

### 2.28

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2014]

Un boulanger fait une étude sur sa clientèle. Il constate que 30 % de ses clients sont des enfants, 20 % des adolescents, le reste étant composé d'adultes.

Un dixième des adolescents qui entrent dans la boulangerie repartent avec une baguette à la main. La proportion d'acheteurs de baguette est, quant à elle, de 80 % chez les adultes et de 65 % chez les enfants.

- a) Etablir l'arbre représentant la situation.
- b) Un client entre dans la boulangerie. Montrer que la probabilité qu'il achète une baguette est de 61,5 % .
- c) Un client est reparti sans acheter de baguette. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un adolescent ?
- d) Un groupe de sept enfants entre dans la boulangerie. Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux achètent une baguette ?
- e) Combien de clients la boulangerie doit-elle accueillir pour que la probabilité qu'au moins une baguette se vende soit supérieure à 99,9 % ?

Le boulanger s'intéresse de plus près aux achats des adultes qui constituent une grande part de sa clientèle. Il constate que les deux articles les plus achetés par ces derniers sont les baguettes et les croissants. Il estime que 56 % des adultes repartent avec à la fois une baguette et un croissant, alors que seulement 3 % des adultes repartent sans croissant, ni baguette.

- f) Etablir le diagramme de Venn représentant la situation.
- g) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète un croissant sans acheter de baguette ?
- h) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète une baguette, sachant qu'il achète un croissant ?

**2.29**

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2013]

Un client désirant louer une voiture auprès de la société Bonoto doit formuler sa requête en précisant deux critères :

- la puissance du véhicule : deux catégories possibles A ou B ;
- l'équipement : avec climatisation ou sans climatisation.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % choisissent la climatisation. Par ailleurs, 24 % des clients optent pour une voiture de catégorie B climatisée.

- a) Etablir l'arbre traduisant la situation.
- b) Un client loue une voiture de catégorie B. Quelle est la probabilité qu'elle soit climatisée ?

On choisit un client au hasard :

- c) Montrer que la probabilité qu'il choisisse une voiture climatisée est égale à 36 %.
- d) Quelle est la probabilité que la voiture choisie soit de catégorie A sachant qu'elle est climatisée ?

On choisit à présent au hasard trois clients simultanément :

- e) Déterminer la probabilité que les trois clients aient loué une voiture climatisée.
- f) Déterminer la probabilité que deux clients exactement aient choisi une voiture climatisée.
- g) Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait loué une voiture climatisée.

**2.30**

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2014]

**Les parties A et B sont indépendantes.**

Une urne contient 6 boules vertes numérotées de 1 à 6, 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 7 boules bleues numérotées de 1 à 7.

- A) On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.
  - a) Combien y a-t-il de tirages ordonnés contenant 3 boules de la même couleur ?
  - b) Combien de tirages ordonnés donnent une somme de 4, en additionnant la valeur des trois boules ?
  - c) Combien de tirages ordonnés donnent une somme supérieure ou égale à 5, en additionnant la valeur des trois boules ?

- B) Toutes les boules sont ensuite replacées dans l'urne.

On tire une boule de cette urne. Si elle est verte, on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si elle est rouge, on lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. Si elle est bleue, on lance un dé à 20 faces, numérotées de 1 à 20.

- d) Quelle est la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?
- e) Sachant que le dé a montré 5, quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
- f) Si on répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois la boule dans l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le nombre 5 ?
- g) Un daltonien réalise l'expérience une fois. Comme il ne voit pas la différence entre le rouge et le vert, si la boule tirée est de l'une de ces deux couleurs, il choisit au hasard entre le dé à 6 faces et celui à 12 faces. Quelle est alors la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?

**2.31**

[Problème de baccalauréat, Gymnase de la Cité, 2013]

Nous disposons d'un dé cubique bien équilibré et de deux boîtes  $B_1$ ,  $B_2$  contenant des boules indiscernables au toucher. La boîte  $B_1$  contient 3 boules rouges et 2 boules noires, tandis que la boîte  $B_2$  contient 6 boules rouges et 4 boules noires.

On jette le dé. Si le dé indique un nombre strictement supérieur à 4, on extrait de la boîte  $B_1$  *simultanément* 3 boules. Dans le cas contraire on extrait *successivement et avec remise* 3 boules de la boîte  $B_2$ . Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) Les trois boules sont rouges ;
- b) Les trois boules sont de la même couleur ;
- c) Au moins une boule est rouge ;
- d) Deux boules sont noires et une boule est rouge ;
- e) Le dé indique un nombre strictement supérieur à 4 sachant que les trois boules sont rouges.

**2.32**

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2012]

Un jeu est constitué de questions qui portent sur les thèmes « Musique » et « Cinéma ». Le quart des questions portent sur le thème « Musique », les autres portent sur le thème « Cinéma ». La probabilité que Julien réponde correctement à une question « Musique » est de 60 %, alors que la probabilité qu'il réponde correctement à une question « Cinéma » est de 70 %. On pose à Julien une question choisie au hasard. Si Julien répond correctement à cette question, on lui pose une deuxième question qui porte sur le même thème ; une deuxième réponse juste lui permet de doubler son gain. Représenter la situation par un arbre et calculer la probabilité que :

- a) Julien réponde correctement à la première et à la deuxième question.
- b) Julien réponde correctement à la deuxième question s'il a répondu correctement à la première.
- c) Les deux questions aient porté sur la musique sachant que Julien a doublé son gain ?

Ce jeu est proposé chaque matin avant 8 heures à la radio. Julien y participe 5 jours de suite.

- d) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question trois des cinq jours.
- e) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question au moins l'un des cinq jours.

**2.33**

Le jeu de la boule noire se joue à deux. Avant chaque partie, on place dans une urne 5 boules blanches et 2 boules noires. Les joueurs tirent alors alternativement une boule de l'urne, jusqu'à ce que l'un des deux tire une boule noire. Ce joueur perd la partie et le jeu s'arrête. Une partie peut se jouer avec ou sans remise.

Paul et Jeanne décident de jouer au jeu de la boule noire. Paul effectue le premier tirage.

- a) On suppose qu'ils jouent sans remise.
  - i) Quelle probabilité chaque joueur a-t-il de gagner la partie ?

- ii) Si Paul perd, quelle est la probabilité que ce soit à son troisième tirage ?
- b) On suppose qu'ils jouent avec remise. Trouver la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle la probabilité de voir la partie se terminer en  $n$  tirages ou moins est plus grande que 0,99.

## 2.8 Réponses

2.1 a)  $\frac{3}{8}$ ; b)  $\frac{3}{5}$ ; c)  $\frac{1}{2}$ ; d)  $\frac{10}{199}$ .

2.2 a) 33 %; b) 42,55 %; c) 75,47 %; d) 27,59 %; e) 82,98 %; f) 59,70 %.

2.3 A : 4,55 %; B : 27,27 %; C : 38,18 %; D : 61,82 %; E : 74,55 %; F : 76,36 %.

2.4 A : 25 %; B : 29,55 %; C : 70,45 %.

2.5 A : 18,18 %; B : 1,01 %; C : 41,67 %.

2.6 A : 55,56 %; B : 16,67 %; C : 34,72 %; D : 4,63 %; E : 9,26 %.

2.7 a) 21,43 %; b) 3,57 %; c) 78,57 %; d) 28,57 %; e) 57,14 %

2.8 a) 12,96 %; b) 97,44 %; c) 34,56 %; d) 84,48 % .

2.9 19,05 %; 33,33 %.

2.10  $\frac{1}{11}$ ;  $\frac{2}{11}$ ;  $\frac{4}{11}$ .

2.11  $\frac{3}{5}$ .

2.12 a) 0,28 %; b) 0,70 %; c) 0,24 %; d) 0,10 %; e) 70,01 %; f) 29,99 % .

2.13 a) 51,47 %; b) 33,08 %; c) 15,44 %; d) 31,82 %.

2.14 a) i) 22,22 %; ii) 77,78 %; iii) 55,56 %; b) i) 52,78 %; ii) 26,32 %.

2.15 a) 70,83 %; b) 65,7 %, 44,1 %; c) ii) 6,67 %.

2.16 a) 1,82 %; b) 29,09 %; c) 49,09 %; d) 33,33 %; e) 12,5 % .

2.17 a) 37,5 %; b) 47,5 %; c) 47,37 % .

2.18 31,46 %.

2.19 a) 56,67 %; b) 50 %; c) 52,94 %.

2.20 a) 24,73 %; b) 2,53 %; c) 72,68 %.

2.21 a) 0,00059 %; b) 14,93 %; c) 0,16%.



**2.22** a) 34.87 %; b) 0.15 %; c) 98.72 %.

**2.23** 32.31 %.

**2.24** a)  $\frac{1}{10}$ ; b)  $\frac{2}{15}$ ; c)  $\frac{1}{2}$ .

**2.25** 40.54 %.

**2.26** a) i) 65.13 %; ii) 38.74 %; b) i) 4 %; ii) 12.5 %.

**2.27** a)  $\frac{57}{64}$ ; b)  $\frac{7}{19}$ ; c) i) 0.13 %; ii) 29.35 %.

**2.28** c) 46.75 %; d) 4.66 %; e) 8 clients; g) 17 %; h)  $\frac{56}{73}$ .

**2.29** b) 60 %; c) 36 %; d) 33.33 %; e) 4.67 %; f) 24.88 %; g) 73.79 %.

**2.30** a) 336; b) 54; c) 3300; d) 10 %; e) 15.63 %; f) 0.81 %; g) 9.22 %.

**2.31** a) 17.73 %; b) 22 %; c) 95.73 %; d) 29.2 %; e) 18.80 %.

**2.32** a) 45.75 %; b) 67.78 %; c) 19.67 %; d) 15.64 %; e) 85.99 %.

**2.33** a) i) Paul :  $\frac{3}{7}$ ; Jeanne :  $\frac{4}{7}$ ; ii)  $\frac{1}{6}$ ; b) 14 tirages.

# Chapitre 3

## Le cercle dans le plan

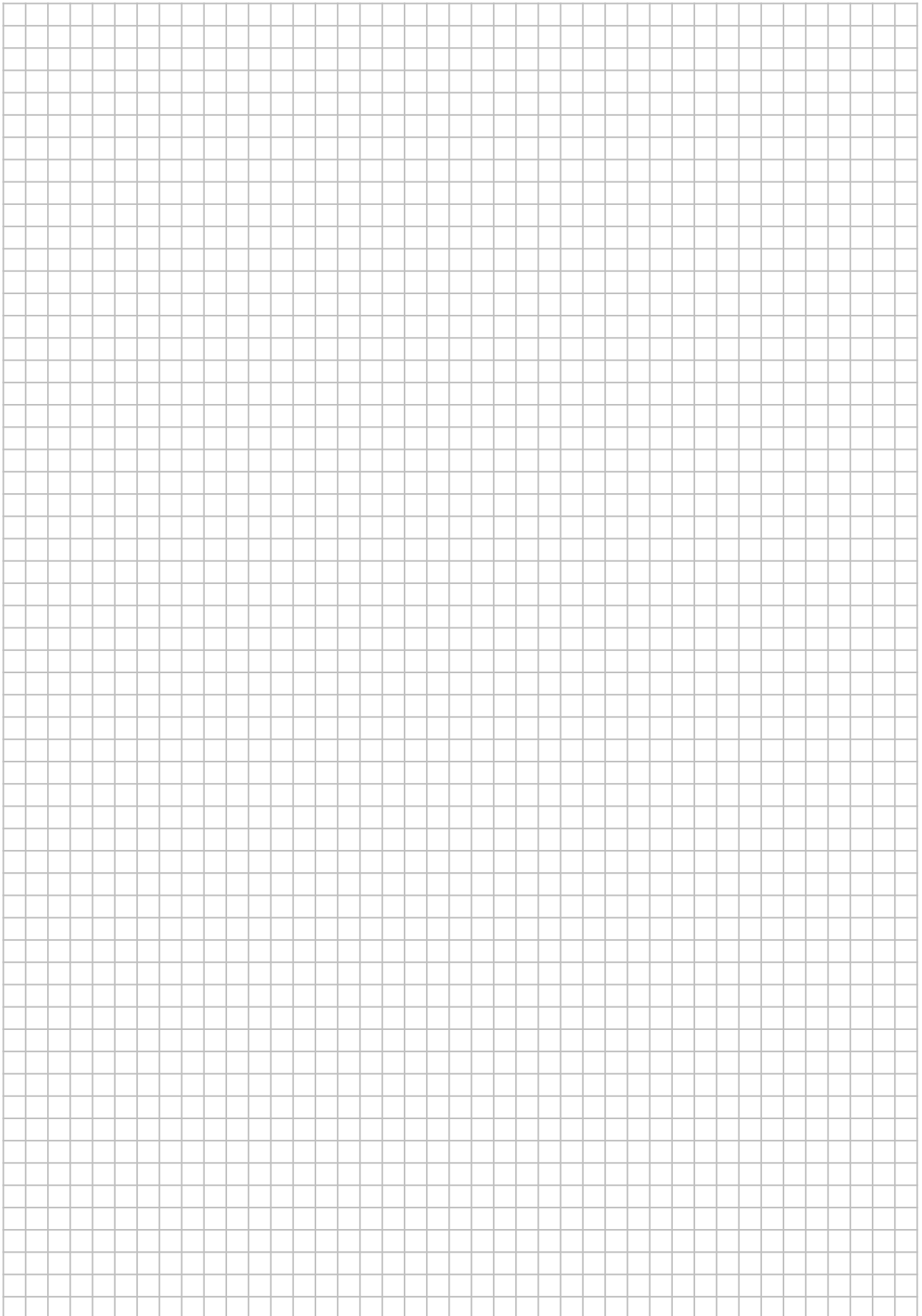
Pour ce chapitre, nous considérerons toujours un repère  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  orthonormé du plan ( $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$  et  $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ )

### 3.1 Rappels en géométrie vectorielle plane

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$
- $A(a_1; a_2) \iff \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$  et  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$
- $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  vecteurs non nuls :  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  colinéaires  $\iff \vec{w} = k \vec{v}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$
- $M$  milieu du segment  $AB$  :
  - $\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$
  - $M \left( \frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$  si  $A(a_1; a_2)$  et  $B(b_1; b_2)$
- $G$  centre de gravité du triangle  $ABC$  :
  - $\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC}$
  - $G \left( \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}; \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3} \right)$  si  $A(a_1; a_2; a_3)$ ,  $B(b_1; b_2; b_3)$  et  $C(c_1; c_2; c_3)$

### Droites

Equation de la droite	Points	Vecteur directeur	Vecteur normal	Pente
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$				
$y = mx + h$				



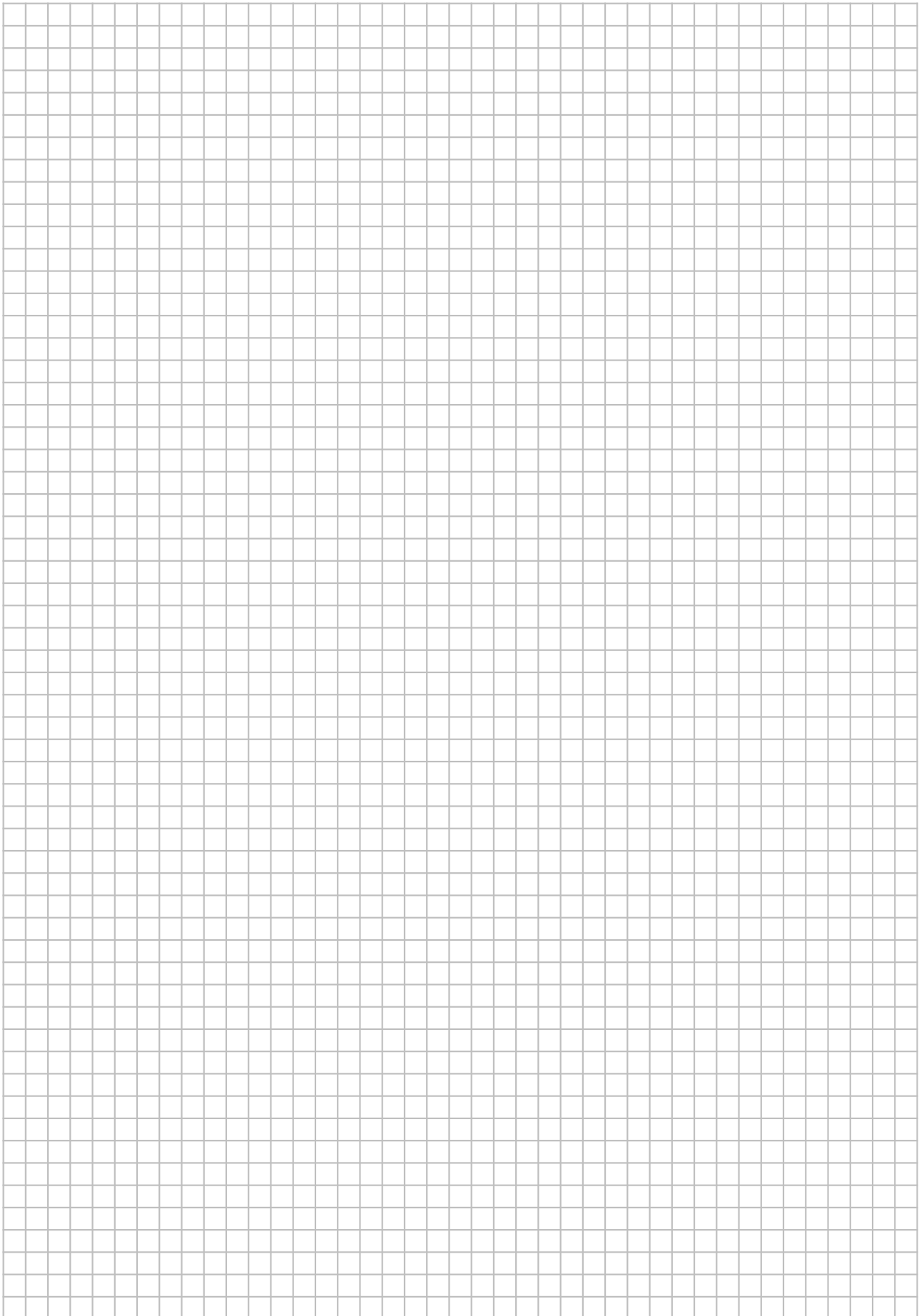
Equation de la droite	Points	Vecteur directeur	Vecteur normal	Pente
$ax + by + c = 0$				

### Droites perpendiculaires

Equation de la droite	Equation d'une droite perpendiculaire
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	
$y = mx + h$	
$ax + by + c = 0$	

#### Exemple 3.1.

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par le point  $D(3; -5)$  et perpendiculaire à la droite d'équation  $2x + 3y - 7 = 0$



## Norme

Norme (longueur) du vecteur  $\vec{v}$  :  $\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

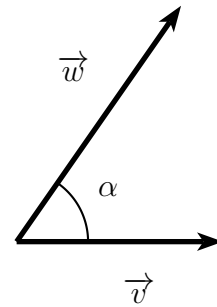
## Produit scalaire

Produit scalaire  $\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

a) Condition d'orthogonalité :  $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$

b)  $\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$

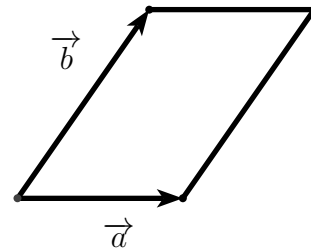
où  $\alpha$  est l'angle formé par les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  (angle, compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , formé par les vecteurs placés à la même origine).



## Aire à l'aide d'un déterminant

Si  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , l'aire  $\sigma$  d'un parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  est donnée par :

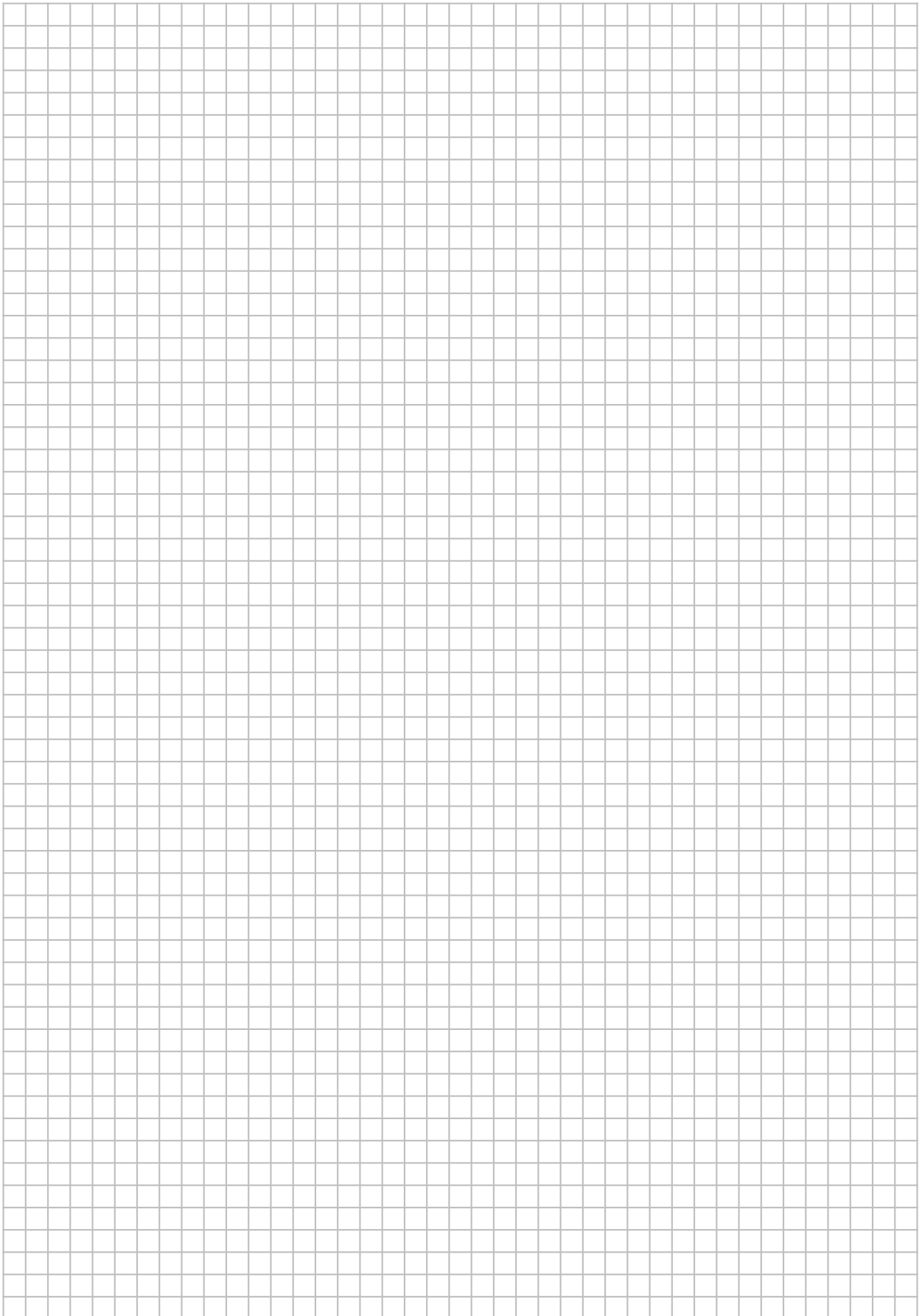
$$\sigma = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$



### Exemple 3.2.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points  $A(3; -1)$ ,  $B(-5; 3)$  et  $C(0; 2)$ .

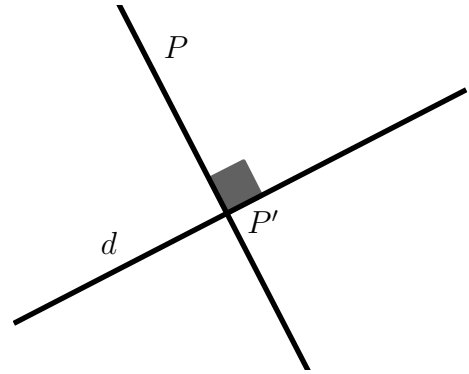
- Calculer la mesure de l'angle  $\alpha$  du triangle  $ABC$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
- Calculer les coordonnées du pied  $K$  de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$  et recalculer l'aire du triangle  $ABC$  à l'aide de ce point.



## Distance d'un point à une droite

Soit la droite  $d$  d'équation cartésienne  $ax+by+c=0$ .  
 La distance d'un point  $P(p_1;p_2)$  à la droite  $d$  est donnée par

$$\delta(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



## Bissectrices

Soient  $d$  et  $e$  deux droites de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{d}$  et  $\vec{e}$  qui se coupent en  $P$ .

a) Si  $\|\vec{d}\| = \|\vec{e}\|$  :

$\vec{v}_1 = \vec{d} + \vec{e}$  et  $\vec{v}_2 = \vec{d} - \vec{e}$  sont des vecteurs directeurs des bissectrices

b) Si  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  et  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  sont des équations cartésiennes de  $d$  et de  $e$  :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

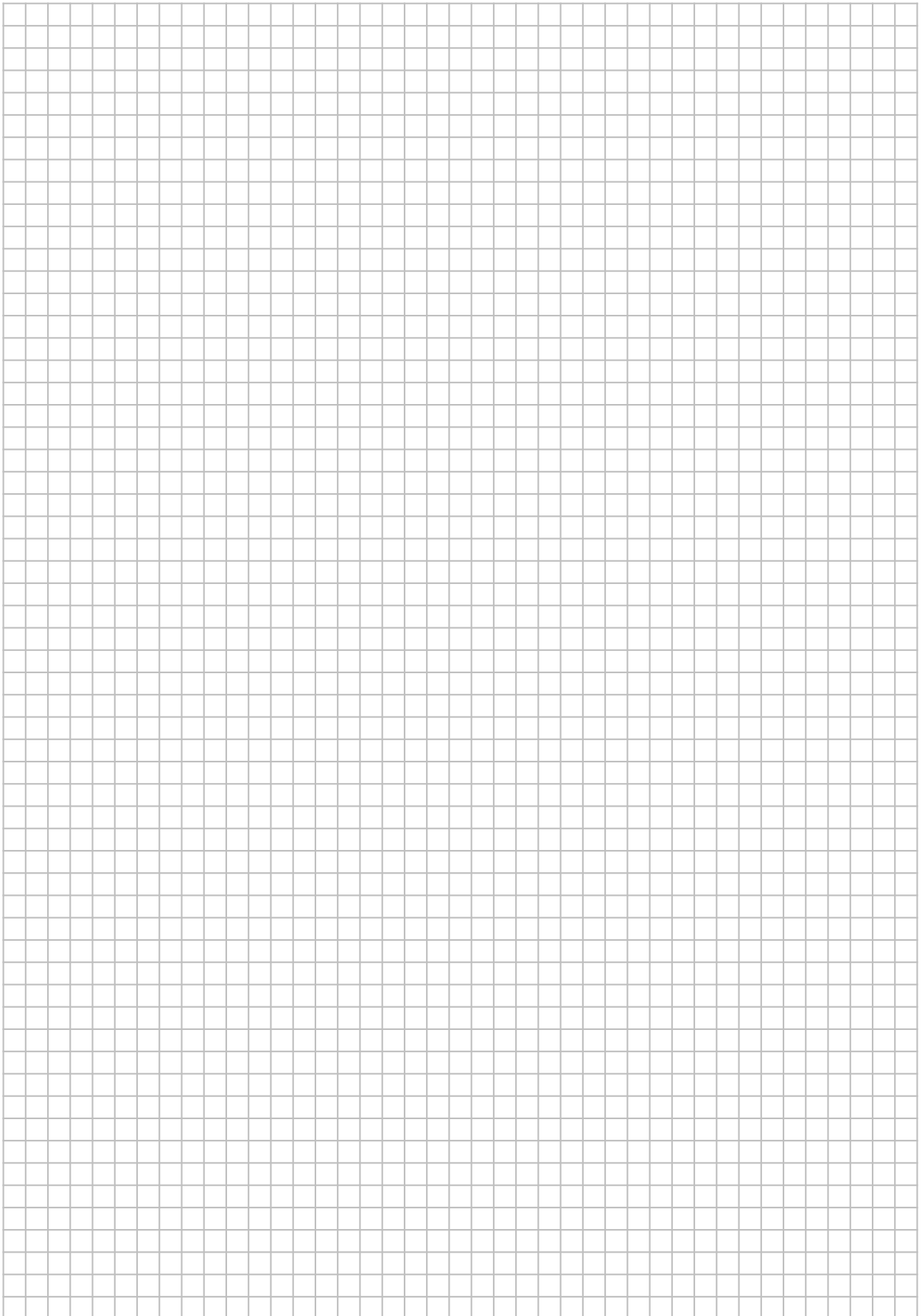
sont des équations des deux bissectrices.

### Exemple 3.3.

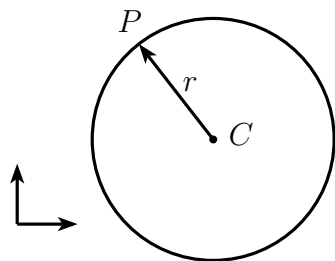
Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points  $A(1; 7)$ ,  $B(0; 0)$  et  $C(8; 8)$ .

- Vérifier que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure  $b_B$  issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .
- Déterminer le centre  $I$  et le rayon  $r$  du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ .





## 3.2 Equation cartésienne d'un cercle



Le cercle  $\gamma$  de centre  $C(c_1; c_2)$  et de rayon  $r$  est le lieu géométrique des points  $P$  du plan situés à la distance  $r$  du point  $C$ .

On a donc

$$P(x; y) \in \gamma \iff \|\vec{CP}\| = r$$

Et comme  $\|\vec{CP}\| = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$  on obtient, en élevant au carré :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

### Equation cartésienne d'un cercle

Une **équation cartésienne** du cercle  $\gamma$  de centre  $C(\alpha; \beta)$  et de rayon  $r$  est donnée par

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Cette équation est appelée **forme normale** de l'équation cartésienne du cercle  $\gamma$ .

### Remarque 3.1.

Tout cercle  $\gamma$  du plan, de centre  $C(c_1; c_2)$  et de rayon  $r$  possède une équation cartésienne du deuxième degré en  $x$  et  $y$  du type

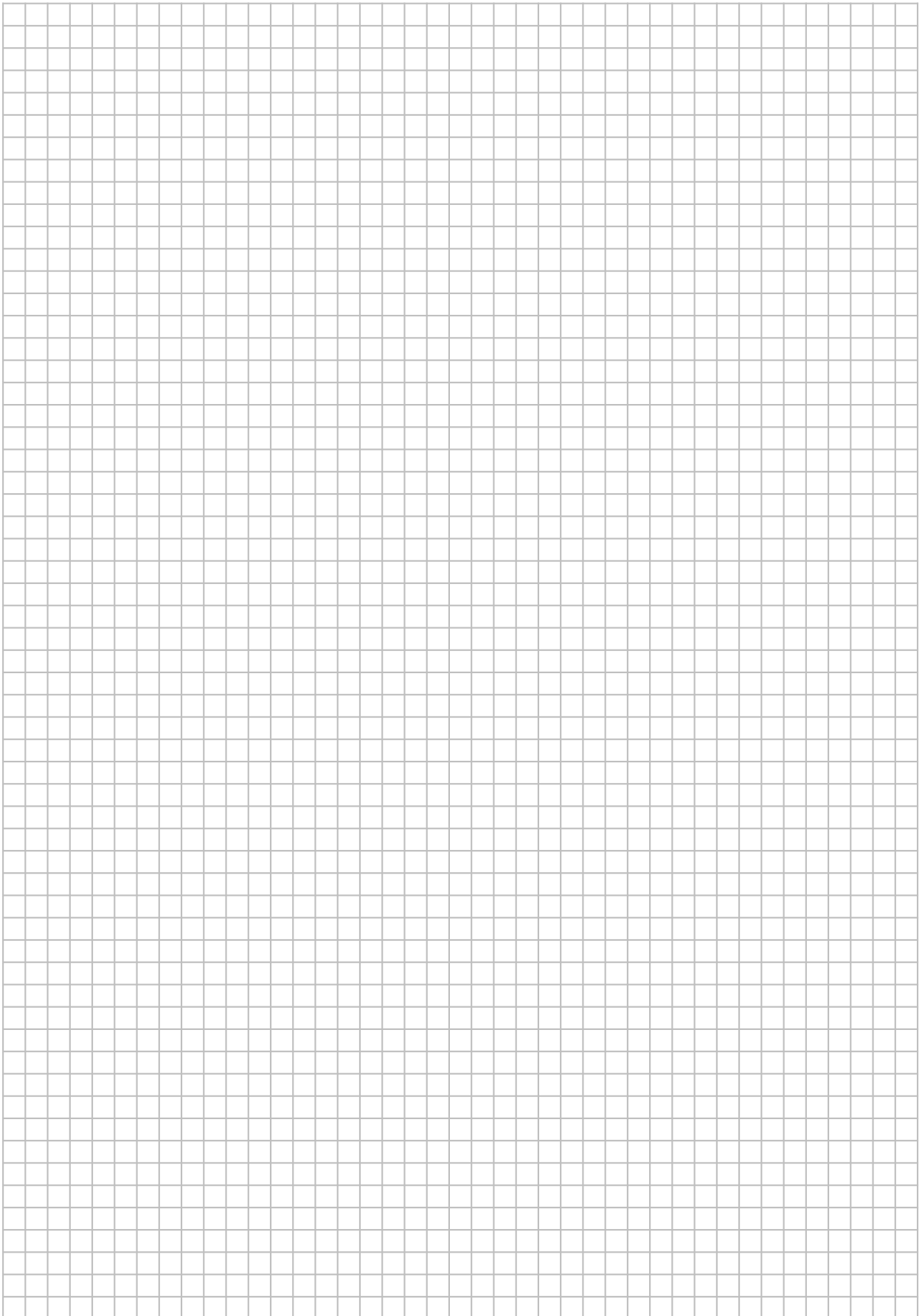
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

satisfaite par les coordonnées  $x$  et  $y$  de tous les points  $P$  du cercle  $\gamma$  et par eux seulement.

La réciproque n'est pas vraie! Autrement dit, toute équation du deuxième degré en  $x$  et  $y$  ne représente pas nécessairement un cercle.

### Exemple 3.4.

- a) Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre  $C(3; -2)$  et de rayon  $r = 4$ .



- b) Démontrer que l'équation  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 29 = 0$  représente un cercle.  
Donner le centre et le rayon de ce cercle.

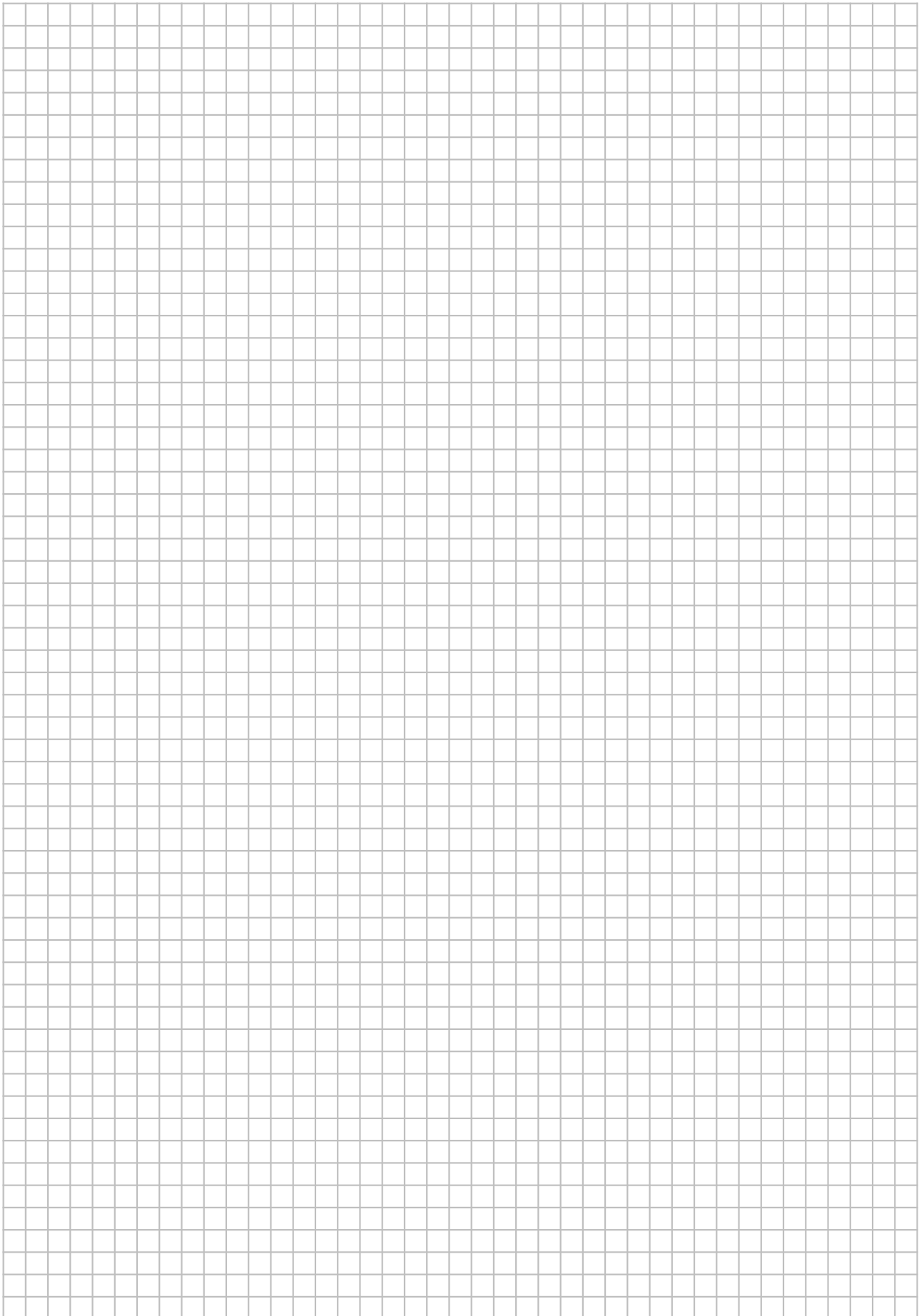
## Reconnaissance de l'équation cartésienne d'un cercle

Les points  $P(x; y)$ , dont les coordonnées satisfont une équation cartésienne du type

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0, \text{ où } a, b, c, d \text{ sont des nombres réels et } a \neq 0,$$

forment un cercle (éventuellement réduit à un seul point) ou la figure vide.

Si cette équation représente un cercle  $\gamma$ , elle est appelée **forme développée** de l'équation cartésienne du cercle.

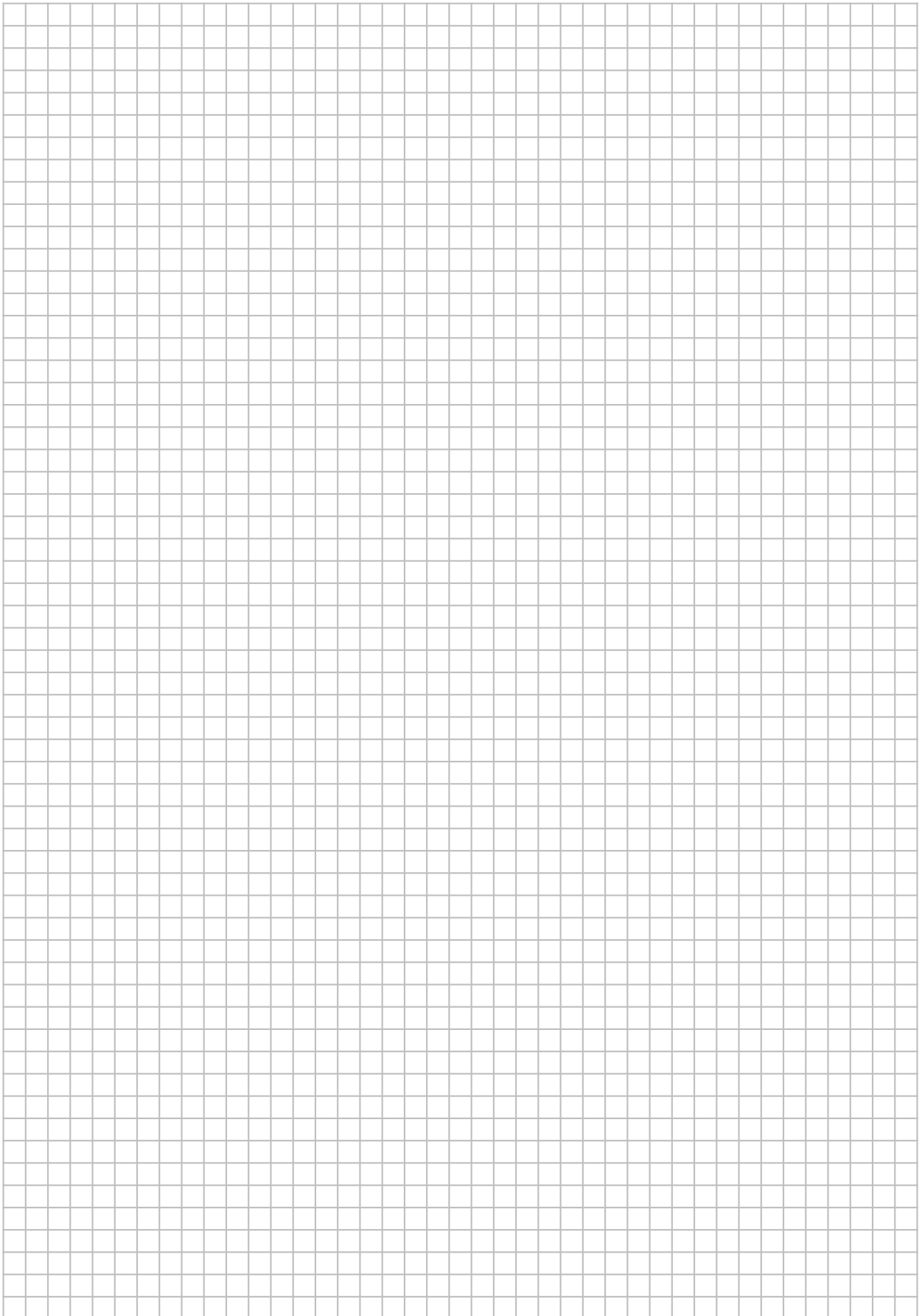


**Exemple 3.5.**

a) Démontrer que l'équation  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$  n'est satisfaite que par un seul point.

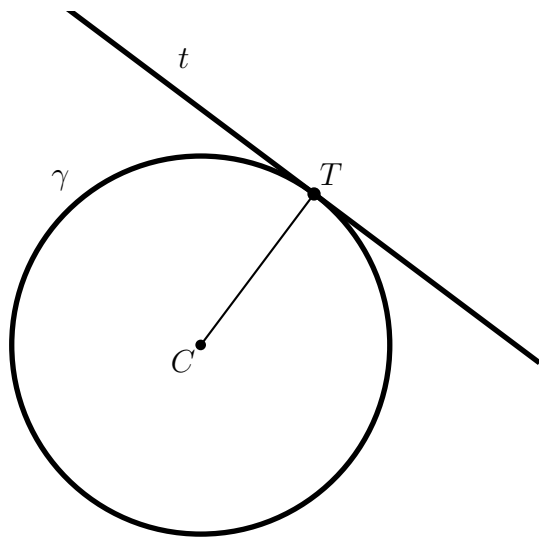
b) Démontrer que l'équation  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 15 = 0$  n'est satisfaite par aucun point.

c) Démontrer que l'équation  $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$  est celle d'un cercle dont on donnera les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $r$  en valeur exacte simplifiée.



### 3.3 Tangente à un point du cercle

#### 3.3.1 Equation cartésienne de la tangente à un point du cercle



Soit  $T$  un point du cercle  $\gamma$  de centre  $C$  et de rayon  $r$ .

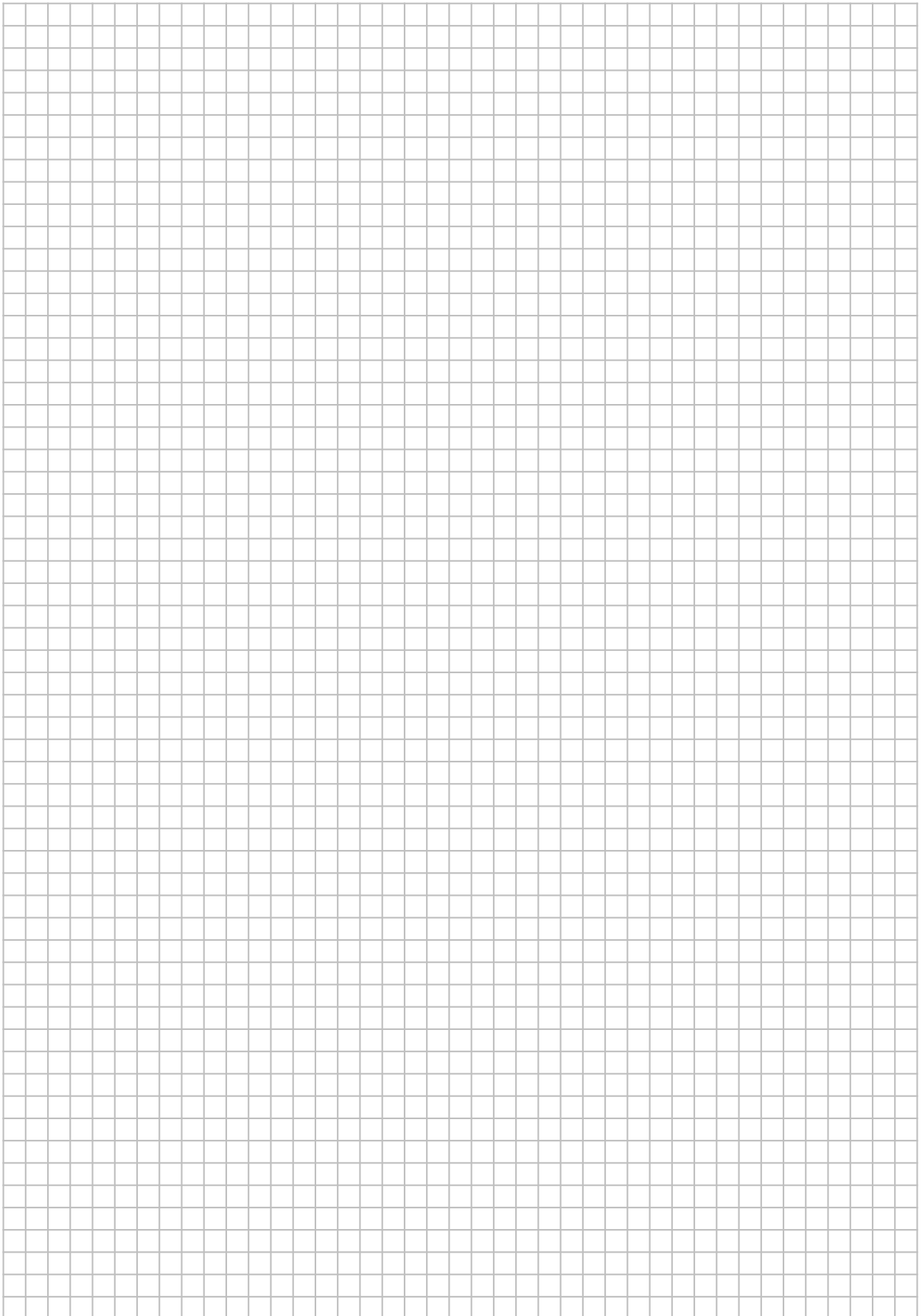
La **tangente**  $t$  au cercle  $\gamma$  au point  $T$  est la droite passant par  $T$  qui est **perpendiculaire** au rayon  $CT$ .

#### Exemple 3.6.

Soit le cercle d'équation cartésienne  $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ , ainsi que  $T(5; 4)$  un point du plan.

Vérifier que  $T$  appartient au cercle  $\gamma$  et déterminer une équation cartésienne de la tangente  $t$  à  $\gamma$  en  $T$ .





### 3.3.2 Equation cartésienne d'une tangente par dédoublement

On peut également obtenir une équation cartésienne de la tangente par une méthode de **dédoublement**.

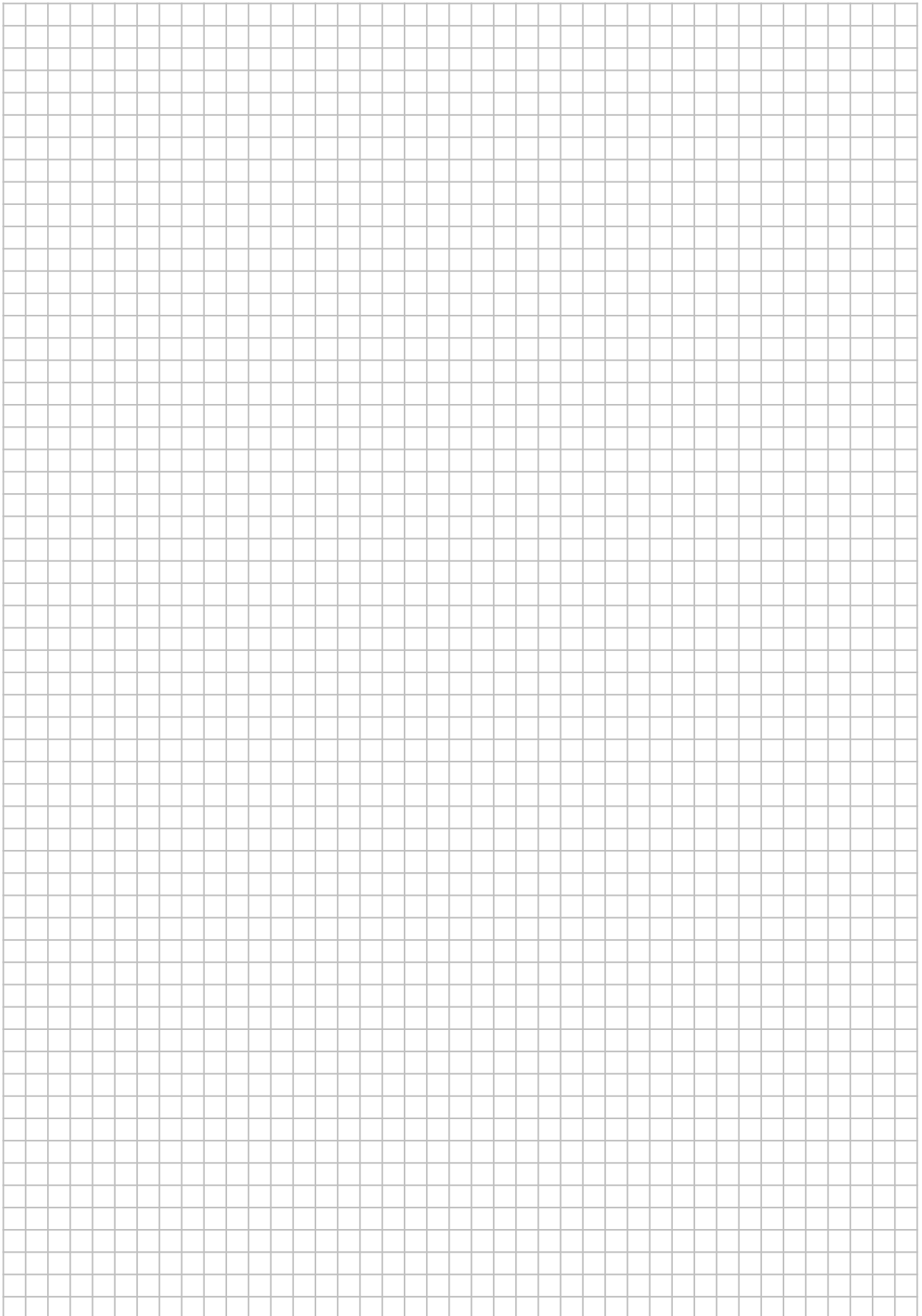
Si le cercle  $\gamma$  est donné par la forme normale  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$  et le point  $T$  de  $\gamma$  par  $T(t_1; t_2)$ , alors la tangente  $t$  à  $\gamma$  en  $T$  est d'équation :

$$(t) : (t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2$$

#### Exemple 3.7.

- a) Utiliser la méthode du dédoublement pour recalculer une équation cartésienne de la tangente au cercle  $(x - 2)^2 + y^2 = 25$  au point  $T(5; 4)$  (exemple 3.6).

- b) Soit le cercle  $\gamma$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ , ainsi que  $T(7; 1)$  un point du plan. Vérifier que  $T$  appartient au cercle  $\gamma$  et déterminer une équation cartésienne de la tangente  $t$  à  $\gamma$  en  $T$ .



### 3.4 Tangentes à un cercle de pente donnée

On obtient les tangentes de pente  $m$  à un cercle  $\gamma$  de centre  $C(c_1; c_2)$  et de rayon  $r$  en utilisant le théorème suivant :

#### Equation des tangentes à un cercle de pente donnée

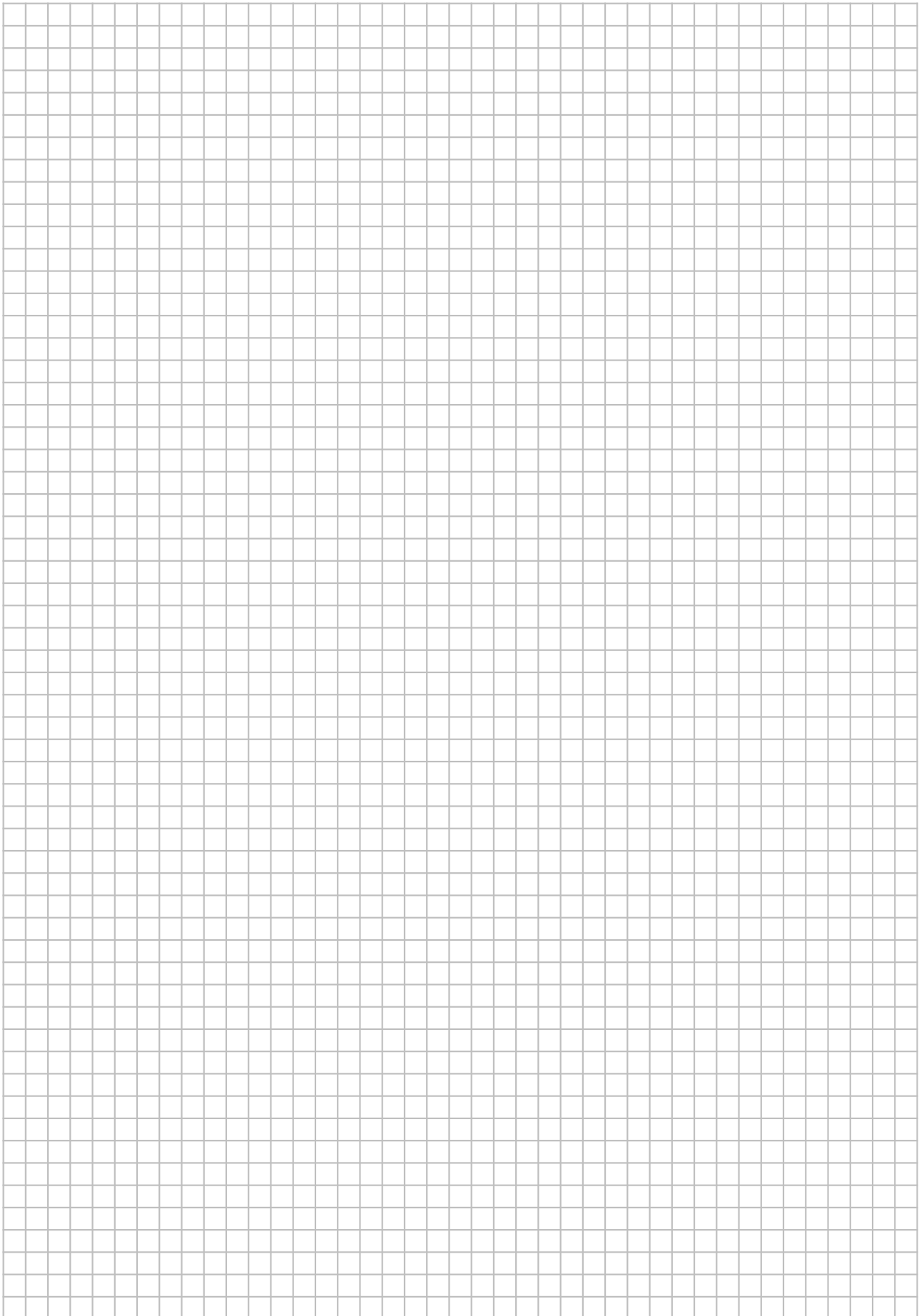
Soit le cercle  $\gamma$  d'équation  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ .

Les tangentes de pente  $m$  sont les droites d'équations

$$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

#### Exemple 3.8.

Déterminer les équations des tangentes au cercle  $\gamma$  donné par  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$  sachant que  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de ces tangentes.

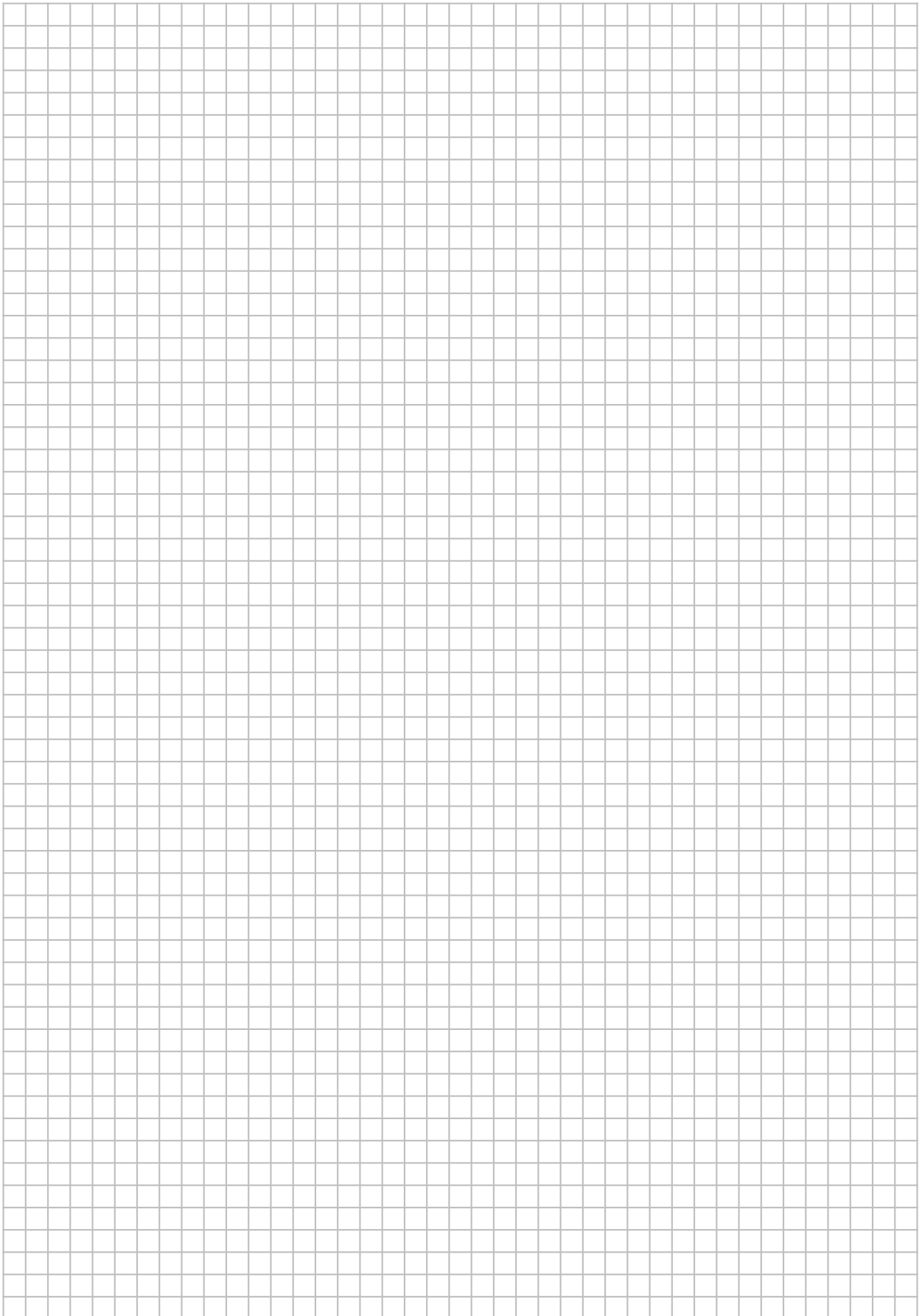


### 3.5 Position d'une droite relativement à un cercle

**Exemple 3.9.**

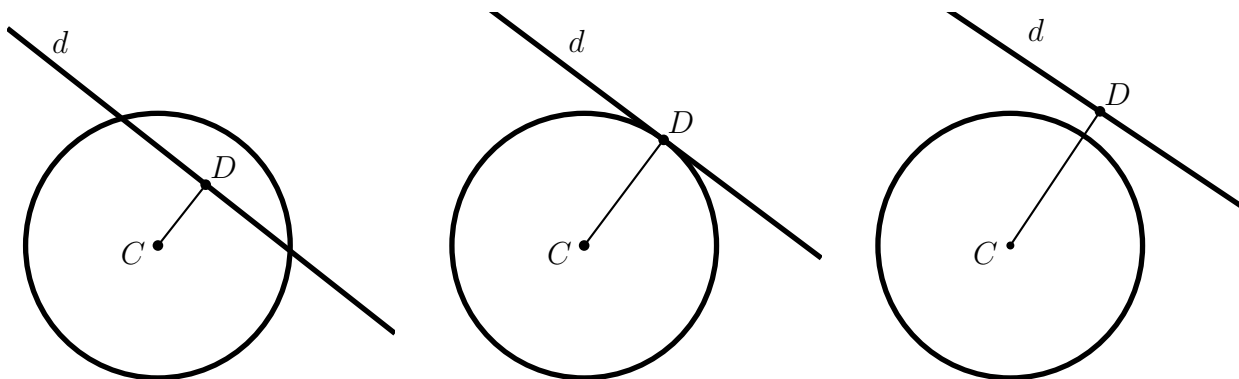
On donne un cercle  $(\gamma) : (x - 2)^2 + y^2 = 25$  et une droite  $(d) : 12x - 5y + 41 = 0$ .

Démontrer que la droite  $d$  est tangente au cercle  $\gamma$  et calculer les coordonnées du point de contact  $T$ .



## Position d'une droite relativement à un cercle

Relativement à un cercle  $\gamma$ , une droite  $d$  se trouve dans l'une des trois positions suivantes.



On teste la position d'une droite relativement à un cercle en utilisant l'une des deux méthodes proposées ci-dessous.

### Position d'une droite et d'un cercle

Soit le cercle  $\gamma$  de centre  $C(c_1; c_2)$  et de rayon  $r$ , ainsi qu'une droite  $d$  d'équation  $ax + by + c = 0$ .

#### Méthode 1

On calcule la distance  $\delta(C; d)$  du centre  $C$  à la droite  $d$ . On conclut sachant que :

- $d$  coupe  $\gamma$  en deux points  $\iff \delta(C; d) < r$
- $d$  coupe  $\gamma$  en un seul point ( $d$  est tangente à  $\gamma$ )  $\iff \delta(C; d) = r$
- $d$  ne coupe pas  $\gamma$   $\iff \delta(C; d) > r$

#### Méthode 2

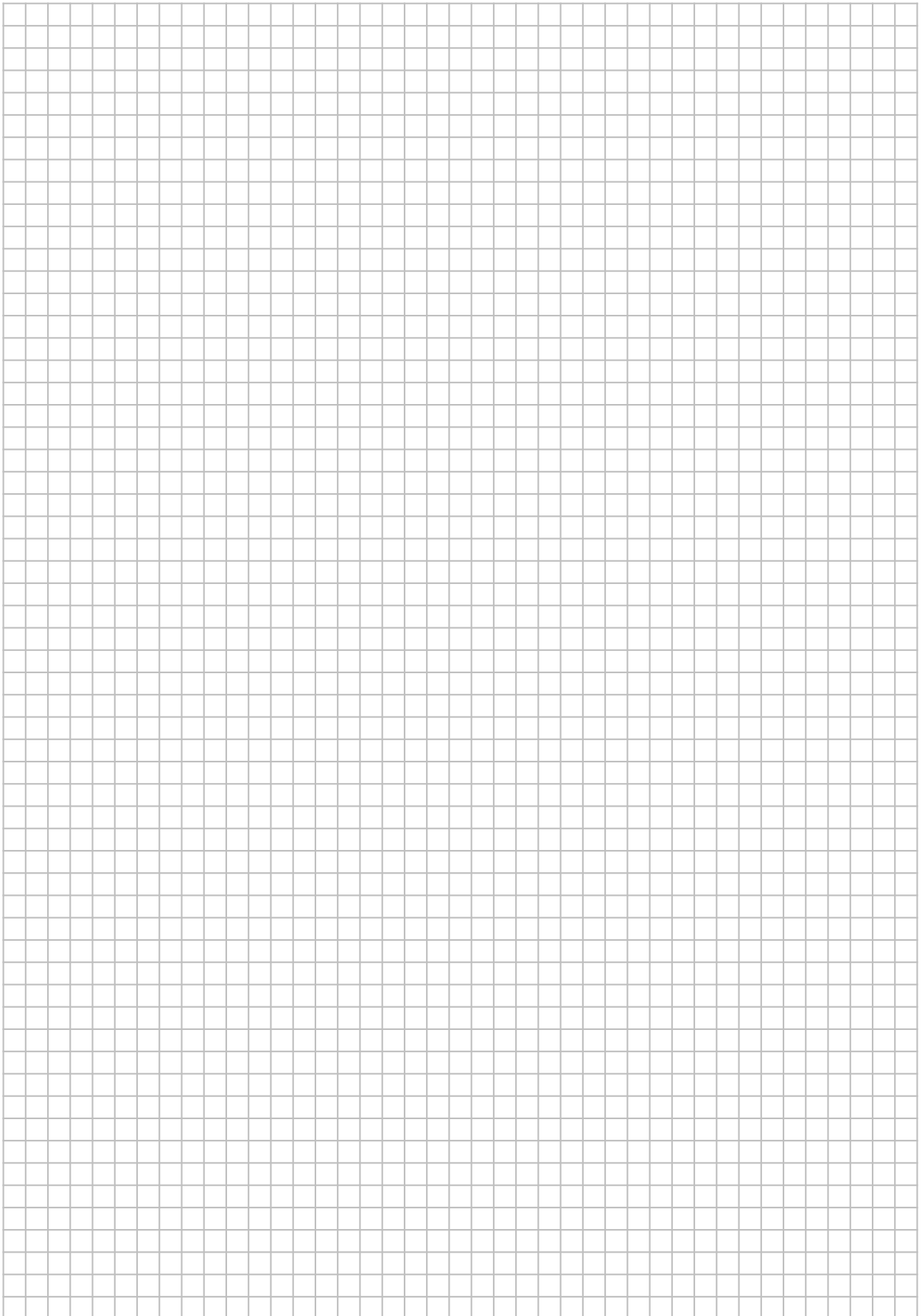
On résout par substitution  $S$  le système d'équations

$$\begin{cases} (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Et on conclut sachant que :

- $d$  coupe  $\gamma$  en deux points  $\iff S$  admet exactement deux solutions
- $d$  coupe  $\gamma$  en un seul point ( $d$  est tangente à  $\gamma$ )  $\iff S$  admet exactement une solution
- $d$  ne coupe pas  $\gamma$   $\iff S$  n'admet aucune solution



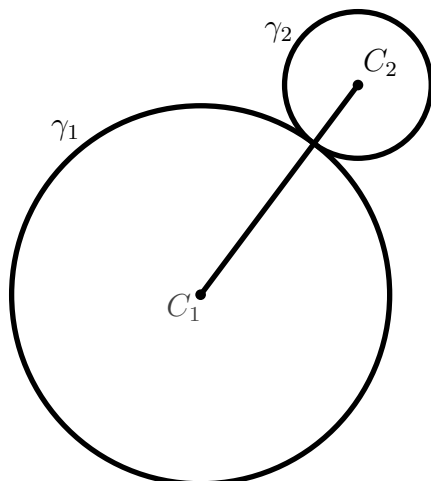


## 3.6 Position entre deux cercles

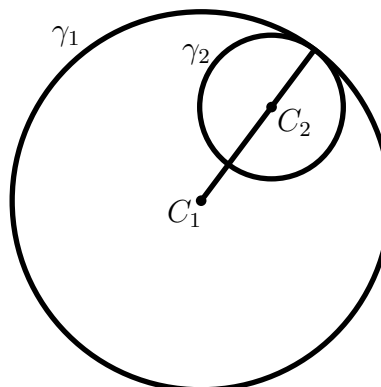
### 3.6.1 Cercles tangents

Deux cercles sont tangents s'ils ont exactement un point commun.

**Tangence extérieure**



**Tangence intérieure**



#### Propriété de deux cercles tangents

Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les cercles de centres et de rayons respectifs  $C_1, C_2$  et  $r_1, r_2$ .

Les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tangents si et seulement si

$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = r_1 + r_2 \quad (\text{tangence extérieure}) \quad \text{ou}$$

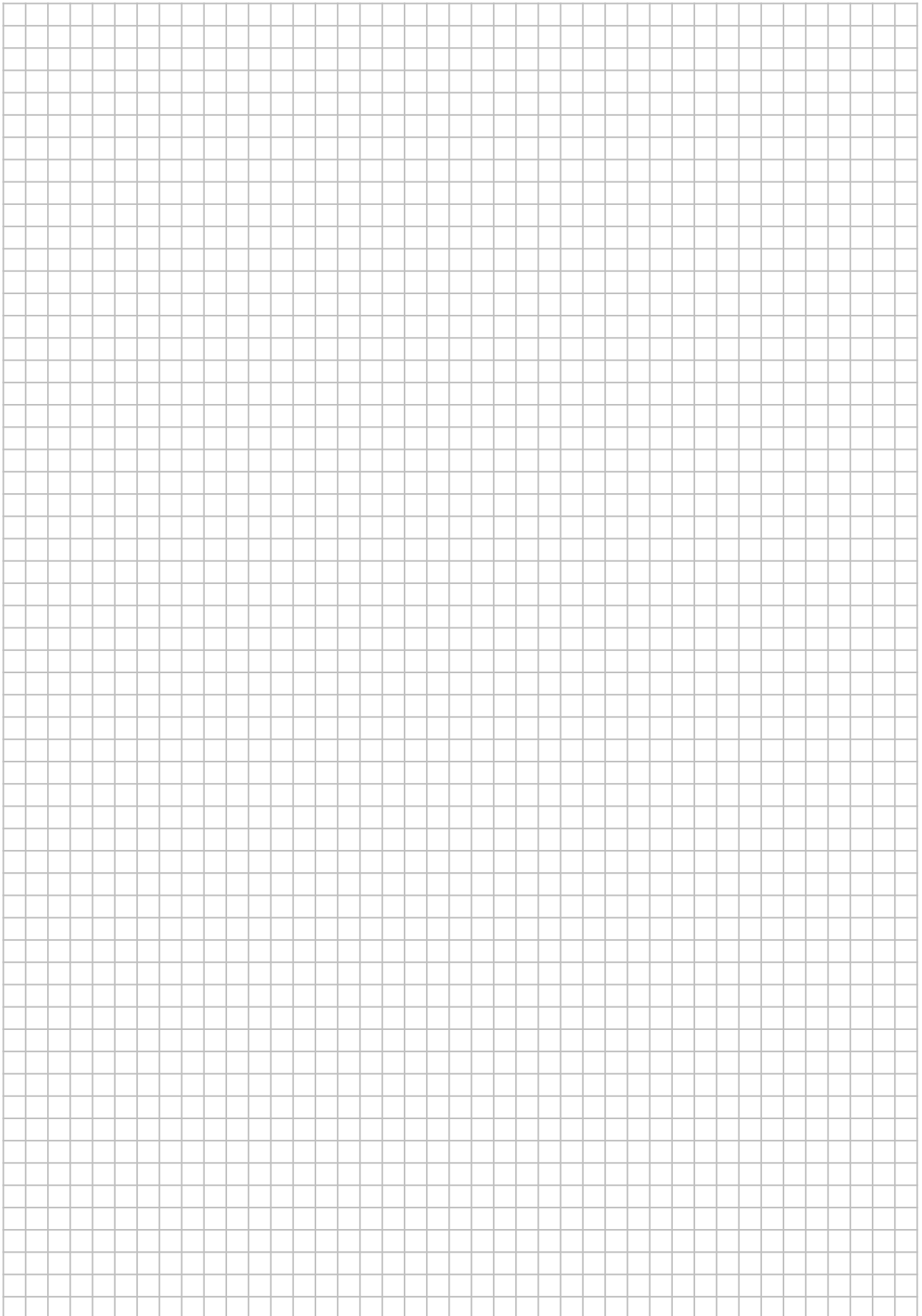
$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = |r_1 - r_2| \quad (\text{tangence intérieure})$$

#### Exemple 3.10.

Prouver que les cercles d'équations respectives

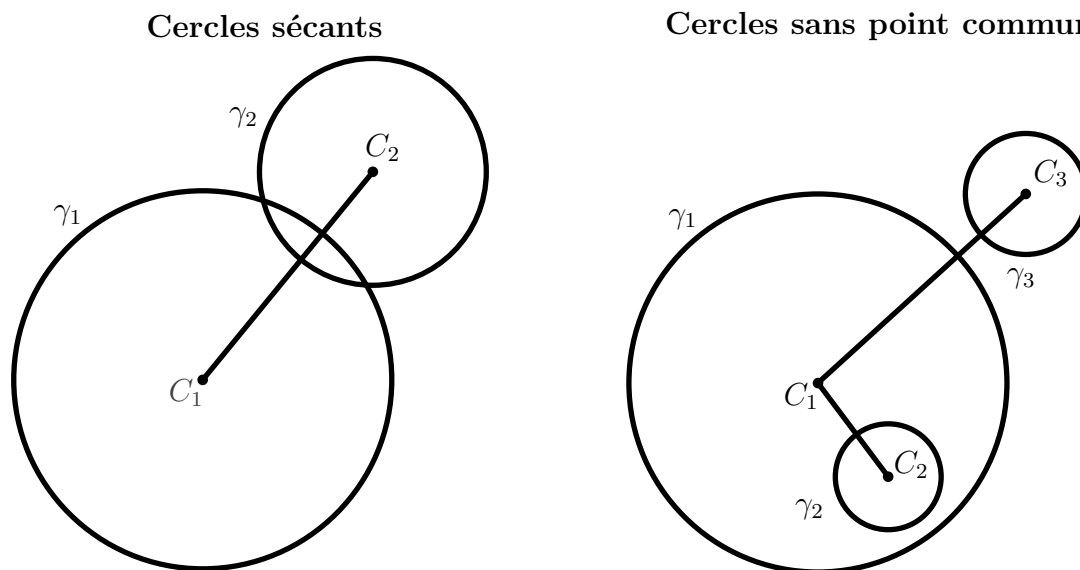
$$(\gamma_1) \quad x^2 + y^2 - 4x - 46 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma_2) \quad x^2 + y^2 + 10x + 14y + 66 = 0$$

sont tangents en un point  $T$ . Donner les coordonnées de  $T$ .



### 3.6.2 Cercles sécants ou sans point commun

Deux cercles non tangents possèdent deux points d'intersection ou sont sans point commun.



#### Propriété de deux cercles sécants ou sans point commun

Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les cercles de centres et de rayons respectifs  $C_1, C_2$  et  $r_1, r_2$ .

- Les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont sans point commun si

$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| > r_1 + r_2 \quad \text{ou} \quad \delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < |r_1 - r_2|$$

- Les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont sécants si

$$|r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < r_1 + r_2$$

#### Remarque 3.2.

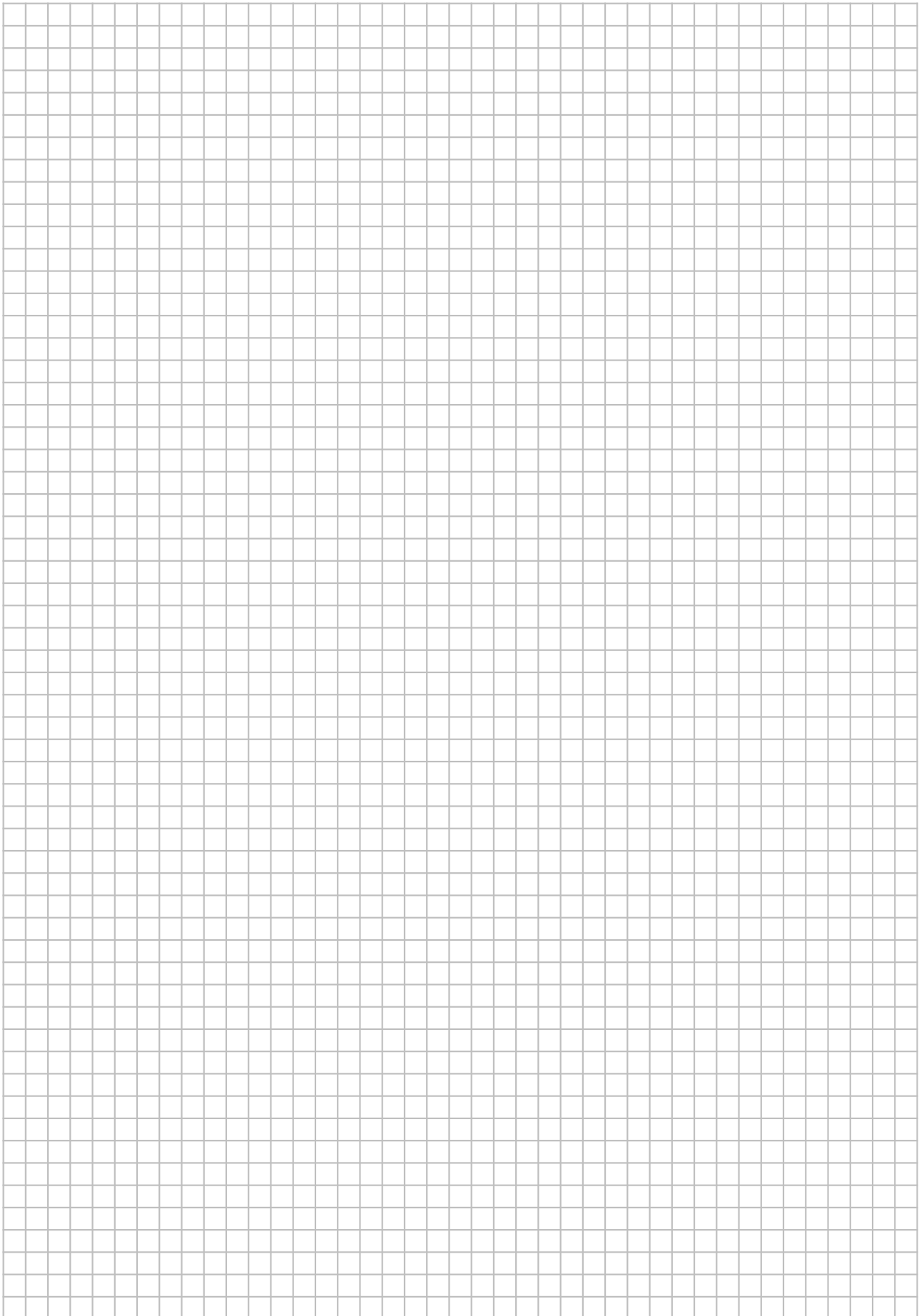
Pour déterminer les éventuels points d'intersection de deux cercles, on résout le système non linéaire formé par les équations cartésiennes des deux cercles.

#### Exemple 3.11.

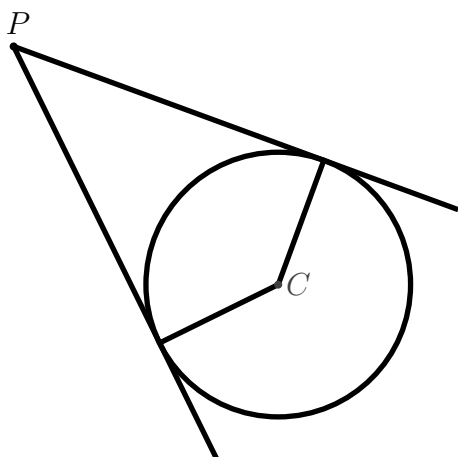
On considère les cercles

$$(\gamma_1) \quad x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma_2) \quad x^2 + y^2 - 10x - 20y + 75 = 0$$

Déterminer les coordonnées des points éventuels d'intersection de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .



### 3.7 Tangentes issues d'un point situé hors du cercle



Pour obtenir les équations des tangentes issues d'un point  $P(p_1; p_2)$  extérieur au cercle  $\gamma$  d'équation

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2,$$

on utilise la méthode des tangentes de pente donnée.

- On pose l'équation des tangentes de pente  $m$  sous forme inconnue

$$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

- On teste dans cette équation l'appartenance du point  $P$  à cette droite, soit

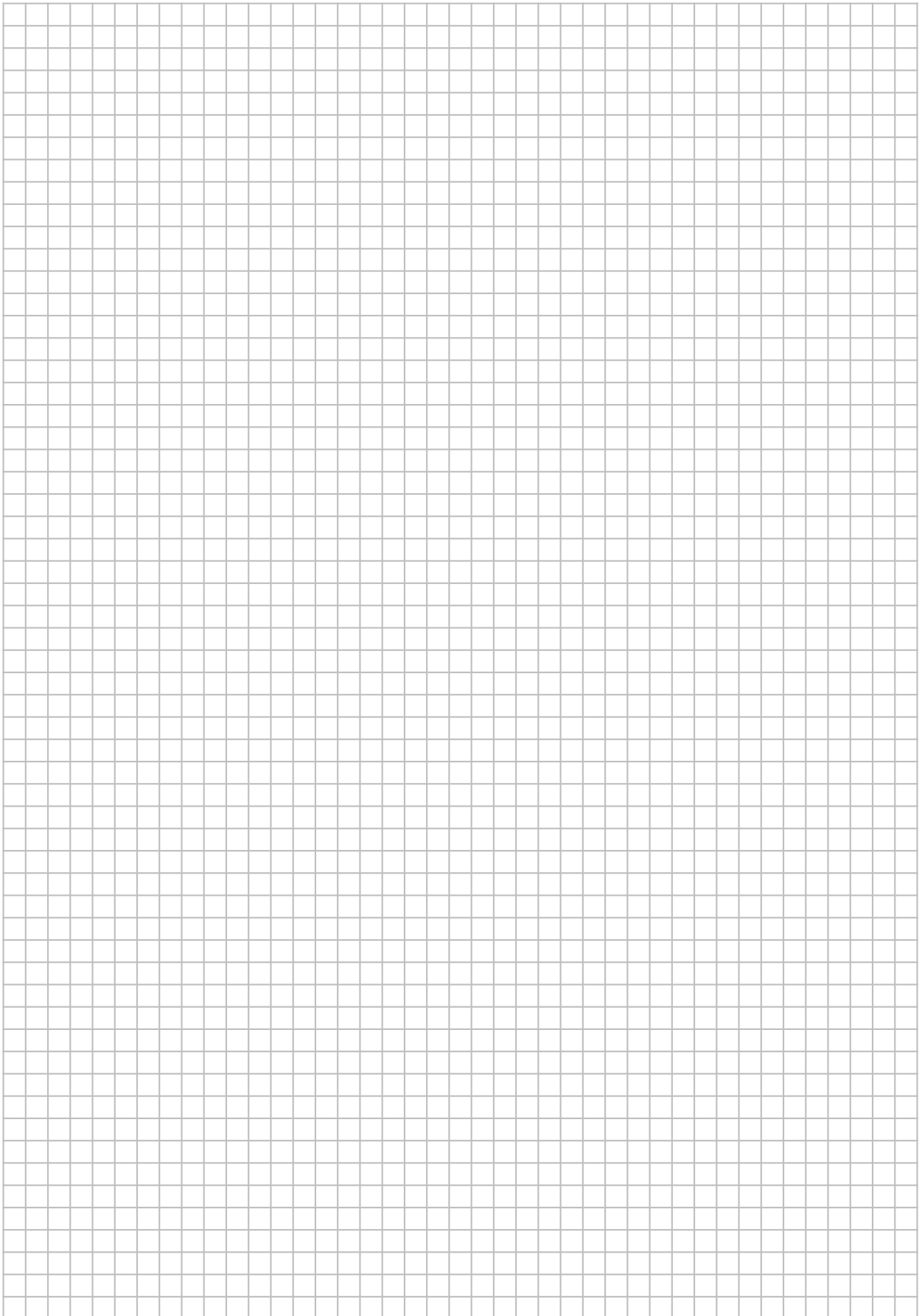
$$p_2 - c_2 = m(p_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

En résolvant cette équation en  $m$ , nous avons deux cas possibles :

- Cette équation est, après réduction, du deuxième degré en  $m$ . Les deux solutions sont alors les pentes des deux tangentes issues de  $P$ .
- Cette équation est, après réduction, du premier degré en  $m$ . La solution de cette équation fournit la pente d'une tangente issue de  $P$ , la deuxième tangente étant de pente  $m = +\infty$  (tangente verticale).

#### Exemple 3.12.

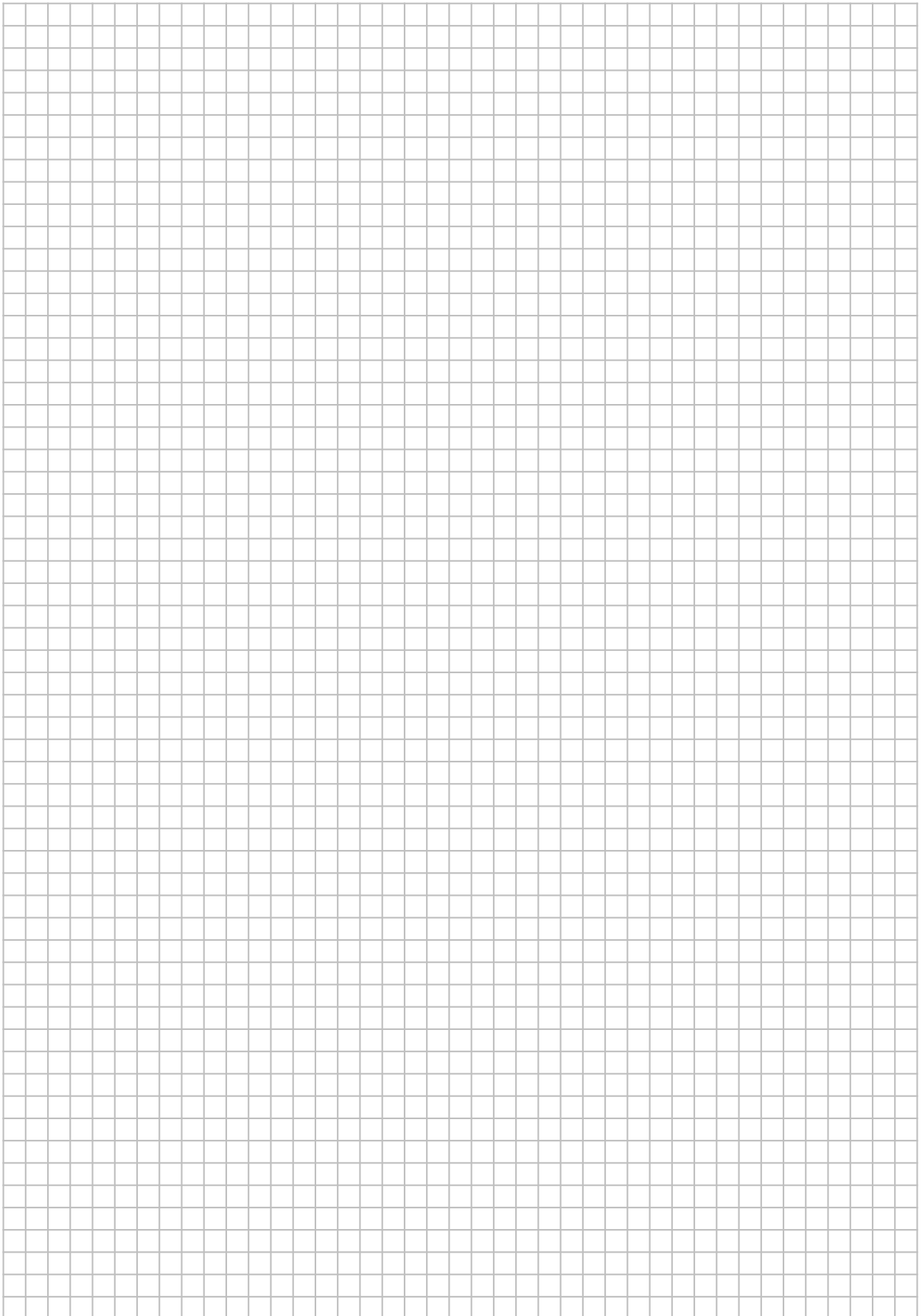
Déterminer les équations des tangentes au cercle  $\gamma$  de centre  $C(-2; 0)$  et de rayon  $r = 5$  issues du point  $P(5; 1)$ .



**Exemple 3.13.**

Déterminer les équations des tangentes au cercle  $\gamma$  de centre  $C(-3; 2)$  et de rayon  $r = 4$  issues du point  $Q(1; -6)$ .





## 3.8 Exercices

### Exercices de révision

#### 3.1

Un quadrilatère  $ABCD$  est donné par

- les coordonnées de trois de ses sommets  $A(-1; 8)$ ,  $B(7; 0)$  et  $C(2; -1)$
- la pente de son côté  $AD$  :  $m_{AD} = 5$
- des équations paramétriques de la droite  $CD$  :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les coordonnées du sommet  $D$  du trapèze.
- 2) Prouver que  $ABCD$  est un trapèze isocèle.
- 3) Prouver que les diagonales du trapèze se coupent en point  $Q$ , dont on donnera les coordonnées.
- 4) Vérifier par calculs que  $Q$  est situé aux deux-tiers des diagonales du trapèze.

#### 3.2

Un triangle  $ABC$  est donné par les coordonnées de ses sommets :

$$A(-4; 2), \quad B(-4; -3) \quad \text{et} \quad C(4; -4)$$

Calculer les coordonnées du point d'intersection  $P$  entre la bissectrice intérieure  $b_A$  issue du sommet  $A$  et la médiatrice  $m_{AC}$  du côté  $AC$ .

#### 3.3

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le trapèze  $ABCD$  rectangle en  $A$  et  $D$  (les angles en  $A$  et  $D$  sont droits) donné par :

- Les coordonnées du sommet  $A$  :  $A(-3; -5)$  ;
- Un vecteur directeur du côté  $AB$  :  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  ;
- Une équation cartésienne de la droite  $BC$  :  $x + 2y - 17 = 0$ .

On sait de plus que la diagonale  $AC$  est la bissectrice de l'angle  $\alpha = \angle(BAD)$  et que les ordonnées des sommets  $C$  et  $D$  sont plus grandes que celle de  $A$ .

- a) Calculer les coordonnées du sommet  $B$  et prouver que la droite  $AD$  est d'équation cartésienne  $4x + 3y + 27 = 0$ .
- b) Représenter graphiquement les sommets  $A$  et  $B$ , ainsi que les droites  $BC$  et  $AD$  (unité 1 « carré »).
- c) Déterminer une équation cartésienne de la diagonale  $AC$  du trapèze  $ABCD$ .
- d) Calculer les coordonnées des sommets  $C$  et  $D$  du trapèze  $ABCD$  .

## Exercices sur les cercles

### 3.4

Relativement à un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne sous forme développée des cercles dans les cas suivants :

- Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.
- Le centre est  $C(2; -3)$  et le rayon du cercle est égal à 7.
- Le cercle passe par  $A(2; 6)$  et son centre est  $C(-1; 2)$ .
- Les points  $A(3; 2)$  et  $B(-1; 6)$  sont les extrémités d'un diamètre du cercle.
- De centre  $C(1; -1)$  et tangent à la droite d'équation  $5x - 12y + 9 = 0$ .
- Le cercle passe par l'origine et le centre est en  $C(6; -8)$ .
- Le centre est l'origine et le cercle est tangent à la droite  $d : 3x - 4y + 20 = 0$ .
- Le cercle passe par les points  $A(3; 1)$  et  $B(-1; 3)$  et le centre est sur la droite  $d : 3x - y - 2 = 0$ .
- Le cercle passe par les points  $A(1; 1)$ ,  $B(1; -1)$  et  $C(2; 0)$ .

### 3.5

Que représentent les équations ci-dessous ? Dans le cas où il s'agit de l'équation d'un cercle, préciser le centre et le rayon.

- $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$
- $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 0$
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$
- $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$
- $x^2 + y^2 + y = 0$
- $x^2 - 2x = 0$

### 3.6

Calculer la plus courte distance du cercle  $x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$  au point  $B(3; 9)$ .

### 3.7

Déterminer une équation de la droite support du diamètre du cercle  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$  qui est perpendiculaire à la droite d'équation cartésienne  $5x + 2y = 13$ .

### 3.8

Déterminer une équation du cercle  $\Delta'$  symétrique du cercle  $\Delta$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  relativement à la droite d'équation  $x - y - 3 = 0$ .

### 3.9

Déterminer une équation du cercle (sous la forme développée) qui passe par  $A(5; -3)$  et  $B(0; 6)$  et dont le centre est sur la droite d'équation  $2x - 3y - 6 = 0$ .

**3.10**

Après avoir vérifié que le point  $P$  est sur le cercle, déterminer une équation de la tangente au cercle au point  $P$ .

- $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ,  $P(-1; 2)$
- $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ,  $P(-5; 7)$
- $x^2 + y^2 = 3x - 7y$ ,  $P(0; 0)$
- $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 3$ ,  $P(2; 3)$
- $3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$ ,  $P(2; 1)$

**3.11**

Déterminer les équations des tangentes de pente  $m$  au cercle  $\gamma$ .

- $(\gamma) (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ,  $m = -\frac{3}{4}$
- $(\gamma) x^2 + y^2 - 12x + 2y - 8 = 0$ ,  $m = \frac{1}{2}$

**3.12**

- Déterminer l'équation des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$  qui sont parallèles à la droite d'équation  $2x + y - 7 = 0$ .
- Déterminer l'équation des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  qui sont perpendiculaires à la droite d'équation  $x - 2y - 11 = 0$ .

**3.13**

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le cercle  $\Delta$  de centre  $C(-3; 4)$  et de rayon  $r = 5$ , ainsi que la droite  $d$  d'équation  $7x - y = 0$ .

- Calculer les coordonnées des points d'intersection  $R$  et  $T$  de la droite  $d$  et du cercle  $\Delta$ .
- Soit  $p$  et  $q$  les tangentes au cercle  $\Delta$  en  $R$  et  $T$ . Calculer les équations cartésiennes de ces deux tangentes et les coordonnées de leur point d'intersection  $S$ .

**3.14**

Relativement à un repère orthonormé, on donne :

- le cercle  $\gamma$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 63 = 0$
  - la droite  $d$  d'équation  $3x + 4y + 8 = 0$ .
- Déterminer les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $R$  du cercle  $\gamma$ .
  - Prouver que la droite  $d$  ne coupe pas le cercle  $\gamma$ .
  - Déterminer la distance minimale entre le cercle  $\gamma$  et la droite  $d$  et calculer les coordonnées du point  $D$  de la droite  $d$  qui minimise cette distance.

**3.15**

Démontrer que les cercles d'équations

$$x^2 + y^2 - 16x - 20y + 64 = 0 \text{ et } x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$$

sont tangents. Calculer les coordonnées du point de tangence  $T$ , ainsi qu'une équation de la tangente commune  $t$  au deux cercles en ce point.

**3.16**

Relativement à un repère orthonormé, on donne les cercles  $(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  et  $(\gamma_2) : x^2 + y^2 - 30x - 14y + 174 = 0$ .

Calculer les coordonnées des points éventuels d'intersection des cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

**3.17**

- Déterminer une équation des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 = 19 - 2x$  issues de  $E(1; 6)$ .
- Déterminer une équation des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$  issues de  $E(6; 5)$ .

**3.18**

Soit la droite  $(t_1) 4x - 3y - 12 = 0$ , le point  $A(0; 2)$ , le cercle  $\gamma_1$  de centre  $C_1(-4; -1)$  et de rayon  $r_1 = 5$ , ainsi que le cercle  $\gamma_2$  d'équation cartésienne  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

- Vérifier par calcul que les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  se coupent en  $A$ .
- Démontrer que la droite  $t_1$  est tangente à  $\gamma_1$  en  $D(0; -4)$ .
- Démontrer que la droite  $t_1$  est tangente à  $\gamma_2$  et calculer les coordonnées du point de contact  $E$ .
- Soit la droite  $d$  reliant les centres  $C_1$  et  $C_2$  des cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Déterminer la valeur de l'angle aigu  $\alpha$  formé par les droites  $d$  et  $t_1$ .

**3.19**

On donne deux droites  $(d_1) 3x - 4y + 19 = 0$  et  $(d_2) 4x + 3y - 58 = 0$  et un point  $T(3; 7)$ . Vérifier que  $T$  est un point de  $d_1$  puis trouver les équations des cercles tangents à  $d_1$  en  $T$  et tangents à  $d_2$ .

**3.20**

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère les points  $P(-3; -2)$ , le cercle  $\gamma$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ , ainsi que la droite  $d$  d'équation  $\begin{cases} x = k \\ y = 4 + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$ .

- Déterminer les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $r$  du cercle  $\gamma$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d$ .
- Vérifier que la droite  $d$  coupe le cercle  $\gamma$  au point  $P$  donné et en un deuxième point  $Q$  dont on calculera les coordonnées.
- On considère le triangle  $PQR$  tel que :
  - Le triangle  $PQR$  est isocèle en  $P$ .
  - Le cercle  $\gamma$  est le cercle circonscrit du triangle  $PQR$  (il passe par  $P, Q$  et  $R$ ).

- a) Représenter graphiquement le cercle  $\gamma$ , la droite  $d$ , ainsi que le triangle  $PQR$  (page A4 verticale ; 1 carré d'unité)
- b) Calculer les coordonnées du sommet  $R$  du triangle  $PQR$ .

**3.21**

Relativement à un repère orthonormé, on donne le cercle  $\gamma_1$ , la droite  $b$  et les points  $A$  et  $B$  suivants :

$$(\gamma_1) : x^2 + y^2 + 8x + 20y + 16 = 0 \quad (b) : 4x + 3y - 4 = 0 \quad A(-10; -2) \text{ et } B(6; -10)$$

- a) Calculer les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $r$  du cercle  $\gamma_1$ .
- b) La droite  $b$  est-elle tangente au cercle  $\gamma_1$ ? Justifier par calculs.
- c) Prouver algébriquement que le point  $A$  se trouve sur le cercle  $\gamma_1$ .
- d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $a$  au cercle  $\gamma_1$  au point  $A$ .
- e) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par les points  $A$  et  $B$ .
- f) Déterminer l'équation d'un cercle  $\gamma_2$  de rayon 7, centré sur la droite  $d$  et passant par l'origine  $O$  du repère orthonormé.

**3.22**

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le quadrilatère  $ABCD$  de sommets

$$A(-1; 13), B(-7; 7), C(-4; -14) \text{ et } D(20; 10)$$

- a) Vérifier par calculs que le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze isocèle.
- b) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure  $b_A$  de l'angle  $\alpha = \widehat{BAD}$  dans le quadrilatère  $ABCD$ .
- c) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice  $m_{AB}$  du segment  $AB$  et vérifier qu'elle coupe la droite  $b_A$  en un point  $M$  de coordonnées  $M(2; 4)$ .
- d) Prouver que le point  $M$  est le centre d'un cercle  $\delta$  tangent à  $AB$  et à  $AD$ . En donner une équation cartésienne.

## 3.9 Réponses

### 3.1

1)  $D(-2; 3)$ ; 3)  $Q(1; 2)$ .

### 3.2

$P(-1.5; -3)$

### 3.3

a)  $B(9; 4)$

c)  $(AC) 7x - y + 16 = 0$

b) -

d)  $C(-1; 9)$  et  $D(-9; 3)$

### 3.4

a)  $x^2 + y^2 - 9 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

g)  $x^2 + y^2 - 16 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

h)  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

d)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$

i)  $x^2 + y^2 - 2x = 0$

e)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

### 3.5

a)  $C(5; -2), r = 5$

d)  $C(1; -2), r = 5$

f)  $C\left(0; -\frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{2}$

b) Point  $P(-4; 1)$

e)  $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right), r = \frac{\sqrt{15}}{5}$

g) Droites  $x = 0, x = 2$

c) Figure vide

### 3.6

17

### 3.7

$2x - 5y + 19 = 0$

### 3.8

$(\Delta') (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$  ou  $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 28 = 0$

### 3.9

$3x^2 + 3y^2 - 114x - 64y + 276 = 0$

### 3.10

a)  $x - 2y + 5 = 0$

c)  $3x - 7y = 0$

e)  $5x + 3y - 13 = 0$

b)  $3x - 4y + 43 = 0$

d)  $x + 2y - 8 = 0$

**3.11**

a)  $3x + 4y + 11 = 0$  ou  $3x + 4y - 39 = 0$       b)  $x - 2y + 7 = 0$  et  $x - 2y - 23 = 0$

**3.12**

a)  $2x + y - 1 = 0$  ou  $2x + y + 19 = 0$       b)  $2x + y - 5 = 0$  ou  $2x + y + 5 = 0$

**3.13**

a)  $R(0;0), T(1;7)$       b) (p)  $3x - 4y = 0$ , (q)  $4x + 3y = 25$ ,  $S(4;3)$

**3.14**

a)  $C(6;6); R = 3$       b) -      c)  $7; D(0;-2)$ .

**3.15**

$T(0;4)$ , (t)  $4x + 3y - 12 = 0$

**3.16**

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tangents en  $T(7;1)$ .

**3.17**

a)  $x - 2y + 11 = 0$  ou  $2x + y - 8 = 0$       b)  $x = 6$  ou  $12x - 35y + 103 = 0$

**3.18**

c)  $E(3.6;0.8)$       d)  $\alpha = 26.6^\circ$

**3.19**

$x^2 + (y - 11)^2 = 25$  et  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$

**3.20**

1)  $C(1;1), r = 5$ ; 2) (d) :  $2x - y + 4 = 0$ ; 3)  $Q(1;6)$ ; 4)  $R(5.8; -0.4)$ .

**3.21**

1)  $C(-4; -10), r = 10$ ; 2)  $b$  tangente à  $\gamma_1$ ; 4)  $3x - 4y + 22 = 0$ ; 5)  $x + 2y + 14 = 0$ ;  
6)  $(\gamma_2) : x^2 + (y + 7)^2 = 49$  ou  $(\gamma'_2) : (x + 5.6)^2 + (y + 4.2)^2 = 49$

**3.22**

2)  $b_A : 3x + y - 10 = 0$ ; 3)  $m_{AB} : x + y - 6 = 0$ ; 4)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$



# Bibliographie

- [1] E. W. Swokowski et J. A. Cole : *Algèbre*, Editions LEP, 1998.
- [2] Monographie de la commission romande de mathématique 26 : *Fundamentum de mathématique : Probabilités*, Editions du Tricorne, 2005.
- [3] Gérard Frugier : *Exercices ordinaires de probabilités* , Ellipses, Editions Marketing, 1992.
- [4] G. Ouellet, : *Statistiques et probabilités*, Editions Le Griffon d'Argile, 1998.
- [5] C. Simard, : *Notions de statistiques*, Groupe Modulo, Montréal 2015.
- [6] Hubert Bovet, Mireille Cherix : *Géométrie, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998.
- [7] Monographie de la commission romande de mathématique 23 : *Fundamentum de mathématique : Géométrie vectorielle et analytique plane* , Editions du Tricorne, 1997.