Chapitre 3

Le cercle dans le plan

Pour ce chapitre, nous considérerons toujours un repère $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ orthonormé du plan ($\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$)

3.1 Rappels en géométrie vectorielle plane

— $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$

— $A(a_1;a_2) \iff \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

— $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vecteurs non nuls : $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ colinéaires $\iff$ $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{v}$, avec $k \in \mathbb{R}$

— M milieu du segment AB :
- $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
- $M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$ si $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$

— G centre de gravité du triangle ABC :
- $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
- $G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3};\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$ si $A(a_1;a_2;a_3)$, $B(b_1;b_2;b_3)$ et $C(c_1;c_2;c_3)$

Droites

Equation de la droite	**Points**	**Vecteur directeur**	**Vecteur normal**	**Pente**
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$				
$y = mx + h$				

Equation de la droite	Points	Vecteur directeur	Vecteur normal	Pente
$ax + by + c = 0$				

Droites perpendiculaires

Equation de la droite	Equation d'une droite perpendiculaire
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	
$y = mx + h$	
$ax + by + c = 0$	

Exemple 3.1.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $D(3; -5)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x + 3y - 7 = 0$

Norme

Norme (longueur) du vecteur $\overrightarrow{v}$: $\|\overrightarrow{v}\| = \left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

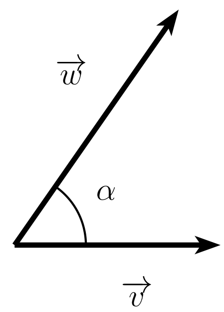
Produit scalaire

Produit scalaire $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

a) Condition d'orthogonalité : $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$

b) $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \ \cos(\alpha)$

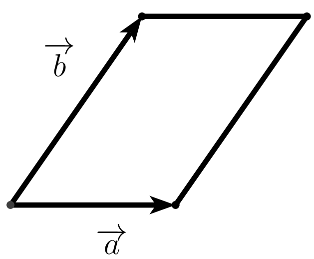
où α est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (angle, compris entre 0° et 180°, formé par les vecteurs placés à la même origine).



Aire à l'aide d'un déterminant

Si $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, l'aire σ d'un parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donnée par :

$$\sigma = \left|\det\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$



Exemple 3.2.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(3;-1)$, $B(-5;3)$ et $C(0;2)$.

a) Calculer la mesure de l'angle α du triangle ABC.

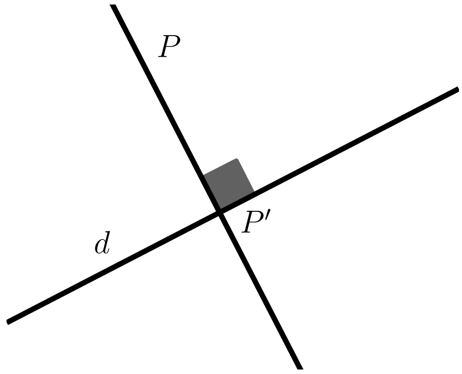
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Calculer les coordonnées du pied K de la hauteur issue de B dans le triangle ABC et recalculer l'aire du triangle ABC à l'aide de ce point.

Distance d'un point à une droite

Soit la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. La distance d'un point $P(p_1;p_2)$ à la droite d est donnée par

$$\delta(P;d)=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Bissectrices

Soient d et e deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$ qui se coupent en P.

a) Si $\|\overrightarrow{d}\|=\|\overrightarrow{e}\|$:

$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{d}-\overrightarrow{e}$ sont des vecteurs directeurs des bissectrices

b) Si $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$ sont des équations cartésiennes de d et de e :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

sont des équations des deux bissectrices.

Exemple 3.3.

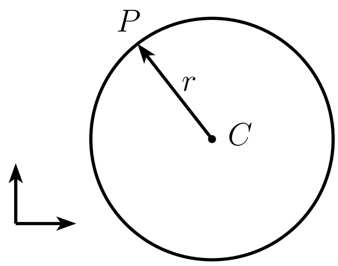
Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(1;7)$, $B(0;0)$ et $C(8;8)$.

a) Vérifier que le triangle ABC est isocèle en A.

b) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure b_B issue de B dans le triangle ABC.

c) Déterminer le centre I et le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC.

3.2 Equation cartésienne d'un cercle



Le cercle γ de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r est le lieu géométrique des points P du plan situés à la distance r du point C.
On a donc

$$P(x; y) \in \gamma \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r$$

Et comme $\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$ on obtient, en élevant au carré :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Equation cartésienne d'un cercle

Une **équation cartésienne** du cercle γ de centre $C(\alpha; \beta)$ et de rayon r est donnée par

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Cette équation est appelée **forme normale** de l'équation cartésienne du cercle γ.

Remarque 3.1.
Tout cercle γ du plan, de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r possède une équation cartésienne du deuxième degré en x et y du type

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

satisfaite par les coordonnées x et y de tous les points P du cercle γ et par eux seulement.

La réciproque n'est pas vraie ! Autrement dit, toute équation du deuxième degré en x et y ne représente pas nécessairement un cercle.

Exemple 3.4.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $C(3; -2)$ et de rayon $r = 4$.

b) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 29 = 0$ représente un cercle.
Donner le centre et le rayon de ce cercle.

Reconnaissance de l'équation cartésienne d'un cercle

Les points $P(x; y)$, dont les coordonnées satisfont une équation cartésienne du type

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0, \text{ où } a, b, c, d \text{ sont des nombres réels et } a \neq 0,$$

forment un cercle (éventuellement réduit à un seul point) ou la figure vide.

Si cette équation représente un cercle γ, elle est appelée **forme développée** de l'équation cartésienne du cercle.

Exemple 3.5.

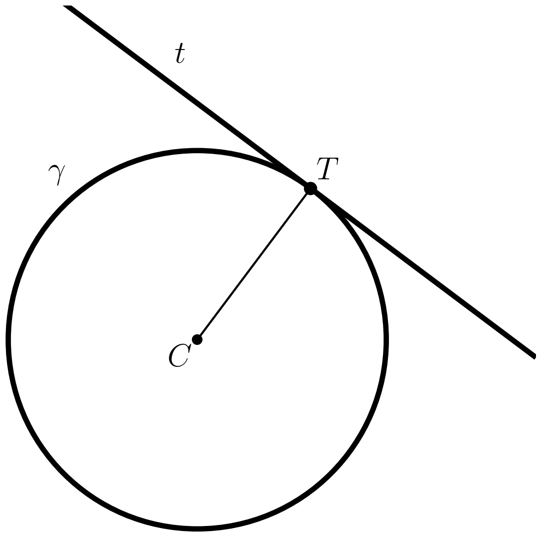
a) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ n'est satisfaite que par un seul point.

b) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 15 = 0$ n'est satisfaite par aucun point.

c) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$ est celle d'un cercle dont on donnera les coordonnées du centre C et le rayon r en valeur exacte simplifiée.

3.3 Tangente à un point du cercle

3.3.1 Equation cartésienne de la tangente à un point du cercle



Soit T un point du cercle γ de centre C et de rayon r.

La **tangente** t au cercle γ au point T est la droite passant par T qui est **perpendiculaire** au rayon CT.

Exemple 3.6.

Soit le cercle d'équation cartésienne $(x-2)^2 + y^2 = 25$, ainsi que $T(5;4)$ un point du plan.

Vérifier que T appartient au cercle γ et déterminer une équation cartésienne de la tangente t à γ en T.

3.3.2 Equation cartésienne d'une tangente par dédoublement

On peut également obtenir une équation cartésienne de la tangente par une méthode de **dédoublement**.

Si le cercle γ est donné par la forme normale $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ et le point T de γ par $T(t_1; t_2)$, alors la tangente t à γ en T est d'équation :

$$(t) : (t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2$$

Exemple 3.7.

a) Utiliser la méthode du dédoublement pour recalculer une équation cartésienne de la tangente au cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ au point $T(5; 4)$ (exemple 3.6).

b) Soit le cercle γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$, ainsi que $T(7; 1)$ un point du plan. Vérifier que T appartient au cercle γ et déterminer une équation cartésienne de la tangente t à γ en T.

3.4 Tangentes à un cercle de pente donnée

On obtient les tangentes de pente m à un cercle γ de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r en utilisant le théorème suivant :

Equation des tangentes à un cercle de pente donnée

Soit le cercle γ d'équation $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
Les tangentes de pente m sont les droites d'équations

$$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Exemple 3.8.
Déterminer les équations des tangentes au cercle γ donné par $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$ sachant que $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de ces tangentes.

3.5 Position d'une droite relativement à un cercle

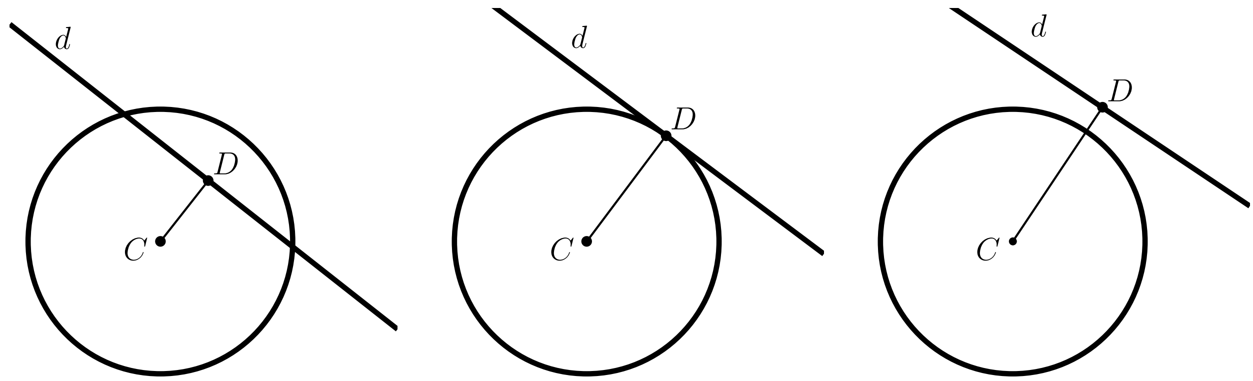
Exemple 3.9.

On donne un cercle $(\gamma) : (x-2)^2 + y^2 = 25$ et une droite $(d) : 12x - 5y + 41 = 0$.

Démontrer que la la droite d est tangente au cercle γ et calculer les coordonnées du point de contact T.

Position d'une droite relativement à un cercle

Relativement à un cercle γ, une droite d se trouve dans l'une des trois positions suivantes.



On teste la position d'une droite relativement à un cercle en utilisant l'une des deux méthodes proposées ci-dessous.

Position d'une droite et d'un cercle

Soit le cercle γ de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r, ainsi qu'une droite d d'équation $ax+by+c=0$.

Méthode 1

On calcule la distance $\delta(C; d)$ du centre C à la droite d. On conclut sachant que :

- d coupe γ en deux points $\iff \delta(C; d) < r$
- d coupe γ en un seul point (d est tangente à γ) $\iff \delta(C; d) = r$
- d ne coupe pas γ $\iff \delta(C; d) > r$

Méthode 2

On résout par substitution S le système d'équations

$$\begin{cases} (x-c_1)^2+(y-c_2)^2 & = & r^2 \\ ax+by+c & = & 0 \end{cases}$$

Et on conclut sachant que :

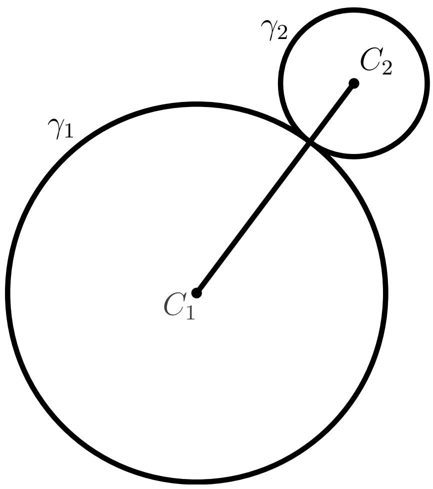
- d coupe γ en deux points $\iff$ S admet exactement deux solutions
- d coupe γ en un seul point (d est tangente à γ) $\iff$ S admet exactement une solution
- d ne coupe pas γ $\iff$ S n'admet aucune solution

3.6 Position entre deux cercles

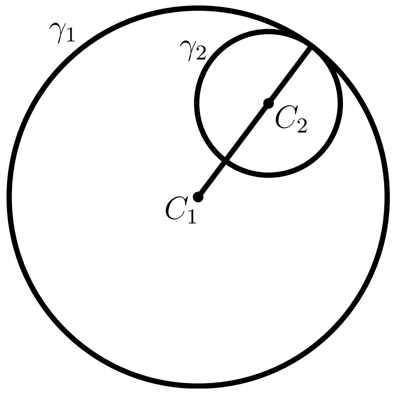
3.6.1 Cercles tangents

Deux cercles sont tangents s'ils ont exactement un point commun.

Tangence extérieure



Tangence intérieure



Propriété de deux cercles tangents

Soit γ_1 et γ_2 les cercles de centres et de rayons respectifs C_1, C_2 et r_1, r_2.
Les cercles γ_1 et γ_2 sont tangents si et seulement si

$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 + r_2 \quad \text{(tangence extérieure)} \quad \text{ou}$$

$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = |r_1 - r_2| \quad \text{(tangence intérieure)}$$

Exemple 3.10.
Prouver que les cercles d'équations respectives

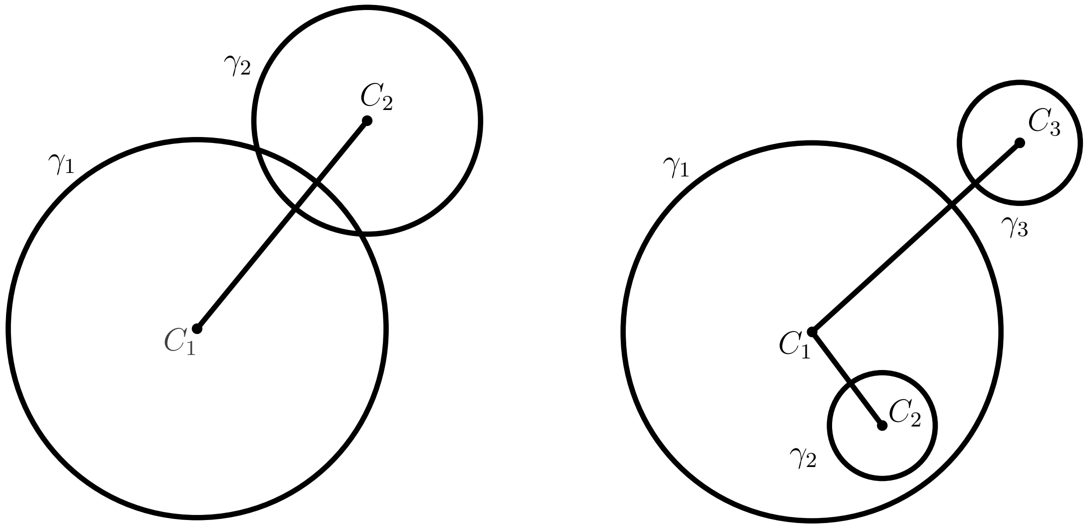
$$(\gamma_1) \quad x^2 + y^2 - 4x - 46 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma_2) \quad x^2 + y^2 + 10x + 14y + 66 = 0$$

sont tangents en un point T. Donner les coordonnées de T.

3.6.2 Cercles sécants ou sans point commun

Deux cercles non tangents possèdent deux points d'intersection ou sont sans point commun.

Cercles sécants **Cercles sans point commun**



Propriété de deux cercles sécants ou sans point commun

Soit γ_1 et γ_2 les cercles de centres et de rayons respectifs C_1, C_2 et r_1, r_2.

- Les cercles γ_1 et γ_2 sont sans point commun si

$$\delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1 + r_2 \qquad \text{ou} \qquad \delta(C_1; C_2) = \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < |r_1 - r_2|$$

- Les cercles γ_1 et γ_2 sont sécants si

$$|r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1 + r_2$$

Remarque 3.2.

Pour déterminer les éventuels points d'intersection de deux cercles, on résout le système non linéaire formé par les équations cartésiennes des deux cercles.

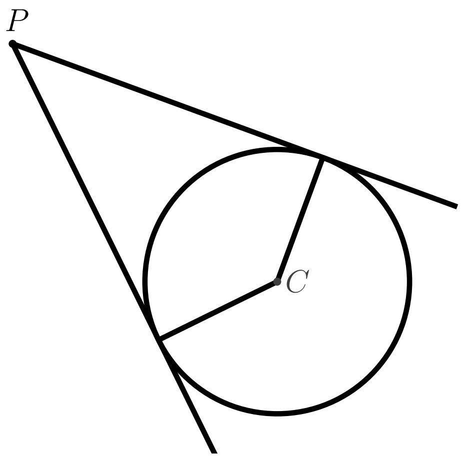
Exemple 3.11.

On considère les cercles

$$(\gamma_1) \quad x^2 + y^2 - 25 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\gamma_2) \quad x^2 + y^2 - 10x - 20y + 75 = 0$$

Déterminer les coordonnées des points éventuels d'intersection de γ_1 et γ_2.

3.7 Tangentes issues d'un point situé hors du cercle



Pour obtenir les équations des tangentes issues d'un point $P(p_1; p_2)$ extérieur au cercle γ d'équation

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2,$$

on utilise la méthode des tangentes de pente donnée.

- On pose l'équation des tangentes de pente m sous forme inconnue

$$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

- On teste dans cette équation l'appartenance du point P à cette droite, soit

$$p_2 - c_2 = m(p_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

En résolvant cette équation en m, nous avons deux cas possibles :

- Cette équation est, après réduction, du deuxième degré en m. Les deux solutions sont alors les pentes des deux tangentes issues de P.
- Cette équation est, après réduction, du premier degré en m. La solution de cette équation fournit la pente d'une tangente issue de P, la deuxième tangente étant de pente $m = +\infty$ (tangente verticale).

Exemple 3.12.

Déterminer les équations des tangentes au cercle γ de centre $C(-2; 0)$ et de rayon $r = 5$ issues du point $P(5; 1)$.

Exemple 3.13.

Déterminer les équations des tangentes au cercle γ de centre $C(-3;2)$ et de rayon $r=4$ issues du point $Q(1;-6)$.

3.8 Exercices

Exercices de révision

3.1

Un quadrilatère $ABCD$ est donné par

- les coordonnées de trois de ses sommets sommets $A(-1;8), B(7;0)$ et $C(2;-1)$
- la pente de son côté AD : $m_{AD} = 5$
- des équations paramétriques de la droite CD : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les coordonnées du sommet D du trapèze.
2) Prouver que $ABCD$ est un trapèze isocèle.
3) Prouver que les diagonales du trapèze se coupent en point Q, dont on donnera les coordonnées.
4) Vérifier par calculs que Q est situé aux deux-tiers des diagonales du trapèze.

3.2

Un triangle ABC est donné par les coordonnées de ses sommets :

$$A(-4;2), \quad B(-4;-3) \quad \text{et} \quad C(4;-4)$$

Calculer les coordonnées du point d'intersection P entre la bissectrice intérieure b_A issue du sommet A et la médiatrice m_{AC} du côté AC.

3.3

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le trapèze $ABCD$ rectangle en A et D (les angles en A et D sont droits) donné par :

- Les coordonnées du sommet A : $A(-3;-5)$;
- Un vecteur directeur du côté AB : $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- Une équation cartésienne de la droite BC : $x + 2y - 17 = 0$.

On sait de plus que la diagonale AC est la bissectrice de l'angle $\alpha = \angle(BAD)$ et que les ordonnées des sommets C et D sont plus grandes que celle de A.

a) Calculer les coordonnées du sommet B et prouver que la droite AD est d'équation cartésienne $4x + 3y + 27 = 0$.
b) Représenter graphiquement les sommets A et B, ainsi que les droites BC et AD (unité 1 « carré »).
c) Déterminer une équation cartésienne de la diagonale AC du trapèze $ABCD$.
d) Calculer les coordonnées des sommets C et D du trapèze $ABCD$.

Exercices sur les cercles

3.4

Relativement à un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne sous forme développée des cercles dans les cas suivants :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.
b) Le centre est $C(2;-3)$ et le rayon du cercle est égal à 7.
c) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.
d) Les points $A(3;2)$ et $B(-1;6)$ sont les extrémités d'un diamètre du cercle.
e) De centre $C(1;-1)$ et tangent à la droite d'équation $5x-12y+9=0$.
f) Le cercle passe par l'origine et le centre est en $C(6;-8)$.
g) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à la droite $d: 3x-4y+20=0$.
h) Le cercle passe par les points $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et le centre est sur la droite $d: 3x-y-2=0$.
i) Le cercle passe par les points $A(1;1)$, $B(1;-1)$ et $C(2;0)$.

3.5

Que représentent les équations ci-dessous ? Dans le cas où il s'agit de l'équation d'un cercle, préciser le centre et le rayon.

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$
b) $(x+4)^2+(y-1)^2=0$
c) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$
d) $x^2+y^2-2x+4y=20$
e) $80x^2+80y^2-120x+80y+17=0$
f) $x^2+y^2+y=0$
g) $x^2-2x=0$

3.6

Calculer la plus courte distance du cercle $x^2+y^2-26x+30y=-313$ au point $B(3;9)$.

3.7

Déterminer une équation de la droite support du diamètre du cercle $x^2+y^2+4x-6y=17$ qui est perpendiculaire à la droite d'équation cartésienne $5x+2y=13$.

3.8

Déterminer une équation du cercle Δ' symétrique du cercle Δ d'équation $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ relativement à la droite d'équation $x-y-3=0$.

3.9

Déterminer une équation du cercle (sous la forme développée) qui passe par $A(5;-3)$ et $B(0;6)$ et dont le centre est sur la droite d'équation $2x-3y-6=0$.

3.10

Après avoir vérifié que le point P est sur le cercle, déterminer une équation de la tangente au cercle au point P .

a) $x^2 + y^2 - 5 = 0,\ P(-1; 2)$

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25,\ P(-5; 7)$

c) $x^2 + y^2 = 3x - 7y,\ P(0; 0)$

d) $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 3,\ P(2; 3)$

e) $3x^2 + 3y^2 = 2x + 11,\ P(2; 1)$

3.11

Déterminer les équations des tangentes de pente m au cercle γ.

a) $(\gamma)\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25, \quad m = -\dfrac{3}{4}$

b) $(\gamma)\ x^2 + y^2 - 12x + 2y - 8 = 0, \quad m = \dfrac{1}{2}$

3.12

a) Déterminer l'équation des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$ qui sont parallèles à la droite d'équation $2x + y - 7 = 0$.

b) Déterminer l'équation des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ qui sont perpendiculaires à la droite d'équation $x - 2y - 11 = 0$.

3.13

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le cercle Δ de centre $C(-3; 4)$ et de rayon $r = 5$, ainsi que la droite d d'équation $7x - y = 0$.

a) Calculer les coordonnées des points d'intersection R et T de la droite d et du cercle Δ.

b) Soit p et q les tangentes au cercle Δ en R et T. Calculer les équations cartésiennes de ces deux tangentes et les coordonnées de leur point d'intersection S.

3.14

Relativement à un repère orthonormé, on donne :

- le cercle γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 63 = 0$
- la droite d d'équation $3x + 4y + 8 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon R du cercle γ.

b) Prouver que la droite d ne coupe pas le cercle γ.

c) Déterminer la distance minimale entre le cercle γ et la droite d et calculer les coordonnées du point D de la droite d qui minimise cette distance.

3.15

Démontrer que les cercles d'équations

$$x^2 + y^2 - 16x - 20y + 64 = 0 \text{ et } x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$$

sont tangents. Calculer les coordonnées du point de tangence T, ainsi qu'une équation de la tangente commune t au deux cercles en ce point.

3.16

Relativement à un repère orthonormé, on donne les cercles $(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ et $(\gamma_2) : x^2 + y^2 - 30x - 14y + 174 = 0$.
Calculer les coordonnées des points éventuels d'intersection des cercles γ_1 et γ_2.

3.17

a) Déterminer une équation des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues de $E(1; 6)$.
b) Déterminer une équation des tangentes au cercle $x^2+y^2-2x+4y = 20$ issues de $E(6; 5)$.

3.18

Soit la droite (t_1) $4x - 3y - 12 = 0$, le point $A(0; 2)$, le cercle γ_1 de centre $C_1(-4; -1)$ et de rayon $r_1 = 5$, ainsi que le cercle γ_2 d'équation cartésienne $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

a) Vérifier par calcul que les cercles γ_1 et γ_2 se coupent en A.
b) Démontrer que la droite t_1 est tangente à γ_1 en $D(0; -4)$.
c) Démontrer que la droite t_1 est tangente à γ_2 et calculer les coordonnées du point de contact E.
d) Soit la droite d reliant les centres C_1 et C_2 des cercles γ_1 et γ_2 . Déterminer la valeur de l'angle aigu α formé par les droites d et t_1.

3.19

On donne deux droites (d_1) $3x - 4y + 19 = 0$ et (d_2) $4x + 3y - 58 = 0$ et un point $T(3; 7)$. Vérifier que T est un point de d_1 puis trouver les équations des cercles tangents à d_1 en T et tangents à d_2.

3.20

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère les points $P(-3; -2)$, le cercle γ d'équation $x^2+y^2-2x-2y-23 = 0$, ainsi que la droite d d'équation $\begin{cases} x = k \\ y = 4 + 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle γ.
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d.
c) Vérifier que la droite d coupe le cercle γ au point P donné et en un deuxième point Q dont on calculera les coordonnées.
d) On considère le triangle PQR tel que :
   - Le triangle PQR est isocèle en P.
   - Le cercle γ est le cercle circonscrit du triangle PQR (il passe par P, Q et R).

a) Représenter graphiquement le cercle γ, la droite d, ainsi que le triangle PQR (page A4 verticale ; 1 carré d'unité)

b) Calculer les coordonnées du sommet R du triangle PQR.

3.21

Relativement à un repère orthonormé, on donne le cercle γ_1, la droite b et les points A et B suivants :

$(\gamma_1) : x^2 + y^2 + 8x + 20y + 16 = 0 \qquad (b) : 4x + 3y - 4 = 0 \qquad A\,(-10\,;-2)$ et $B\,(6\,;-10)$

a) Calculer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle γ_1.

b) La droite b est-elle tangente au cercle γ_1 ? Justifier par calculs.

c) Prouver algébriquement que le point A se trouve sur le cercle γ_1.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente a au cercle γ_1 au point A.

e) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A et B.

f) Déterminer l'équation d'un cercle γ_2 de rayon 7, centré sur la droite d et passant par l'origine O du repère orthonormé.

3.22

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le quadrilatère $ABCD$ de sommets

$$A(-1; 13), B(-7; 7), C(-4; -14) \text{ et } D(20; 10)$$

a) Vérifier par calculs que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

b) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure b_A de l'angle $\alpha = \widehat{BAD}$ dans le quadrilatère $ABCD$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice m_{AB} du segment AB et vérifier qu'elle coupe la droite b_A en un point M de coordonnées $M(2; 4)$.

d) Prouver que le point M est le centre d'un cercle δ tangent à AB et à AD. En donner une équation cartésienne.

3.9 Réponses

3.1

1) $D(-2;3)$; 3) $Q(1;2)$.

3.2

$P(-1.5;-3)$

3.3

a) $B(9;4)$
b) -
c) (AC) $7x-y+16=0$
d) $C(-1;9)$ et $D(-9;3)$

3.4

a) $x^2+y^2-9=0$
b) $x^2+y^2-4x+6y-36=0$
c) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$
d) $x^2+y^2-2x-8y+9=0$
e) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$
f) $x^2+y^2-12x+16y=0$
g) $x^2+y^2-16=0$
h) $x^2+y^2-4x-8y+10=0$
i) $x^2+y^2-2x=0$

3.5

a) $C(5;-2), r=5$
b) Point $P(-4;1)$
c) Figure vide
d) $C(1;-2), r=5$
e) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right), r=\frac{\sqrt{15}}{5}$
f) $C\left(0;-\frac{1}{2}\right), r=\frac{1}{2}$
g) Droites $x=0, x=2$

3.6

17

3.7

$2x-5y+19=0$

3.8

(Δ') $(x-5)^2+(y+2)^2=1$ ou $x^2+y^2-10x+4y+28=0$

3.9

$3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$

3.10

a) $x-2y+5=0$
b) $3x-4y+43=0$
c) $3x-7y=0$
d) $x+2y-8=0$
e) $5x+3y-13=0$

3.11

a) $3x + 4y + 11 = 0$ ou $3x + 4y - 39 = 0$

b) $x - 2y + 7 = 0$ et $x - 2y - 23 = 0$

3.12

a) $2x + y - 1 = 0$ ou $2x + y + 19 = 0$

b) $2x + y - 5 = 0$ ou $2x + y + 5 = 0$

3.13

a) $R(0;0), T(1;7)$

b) $(p)\ 3x - 4y = 0,\ (q)\ 4x + 3y = 25,\ S(4;3)$

3.14

a) $C(6;6); R = 3$

b) -

c) $7; D(0;-2)$.

3.15

$T\,(0;4)\,,\quad (t)\ 4x + 3y - 12 = 0$

3.16

γ_1 et γ_2 tangents en $T(7;1)$.

3.17

a) $x - 2y + 11 = 0$ ou $2x + y - 8 = 0$

b) $x = 6$ ou $12x - 35y + 103 = 0$

3.18

c) $E(3.6;0.8)$

d) $\alpha = 26.6°$

3.19

$x^2 + (y - 11)^2 = 25$ et $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$

3.20

1) $C(1;1), r = 5$; 2) $(d) : 2x - y + 4 = 0$; 3) $Q(1;6)$; 4) $R(5.8;-0.4)$.

3.21

1) $C(-4;-10), r = 10$; 2) b tangente à γ_1 ; 4) $3x - 4y + 22 = 0$; 5) $x + 2y + 14 = 0$;
6) $(\gamma_2) : x^2 + (y + 7)^2 = 49$ ou $(\gamma_2') : (x + 5.6)^2 + (y + 4.2)^2 = 49$

3.22

2) $b_A : 3x + y - 10 = 0$; 3) $m_{AB} : x + y - 6 = 0$; 4) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$