Chapitre 1

Combinatoire

1.1 Exemples d'introduction

Exemple 1.1.

Pour un match, Rodger constate qu'il possède six tee-shirts, cinq shorts, huit paires de basket et quatre bandeaux différents. Combien de tenues différentes peut-il agencer si l'on admet qu'une tenue comporte un tee-shirt, un short, une paire de basket et un bandeau ?

Exemple 1.2.

24 équipes ont participé au tournoi final du championnat d'Europe 2012 de football. Si l'on admet que toutes les équipes peuvent terminer aux trois premières places, calculer le nombre de manières différentes d'attribuer ces trois places.

Exemple 1.3.

Une assemblée se compose de 60 filles et 40 garçons. On doit choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier. La présidence doit être assumée par une fille, le secrétariat par un garçon et un élève ne peut exercer plus d'une charge à la fois.

De combien de manières peut-on le faire ?

Exemple 1.4.

Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents strictement inférieurs à 1'250 ?

Exemple 1.5.

Nicolas et Willy disputent un match de tennis à deux sets gagnants. Quel est le nombre de déroulements possibles du match ?

1.2 Principes généraux

1.2.1 Règle du produit

Soit une épreuve composée de n opérations $E_1, E_2, \cdots E_n$ successives qui sont **indépendantes les unes des autres** (le nombre d'issues possibles de E_{k+1} ne dépend pas des issues obtenues successivement dans $E_1, E_2, \cdots, E_k$).

Si l'opération E_k peut amener à m_k issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

manières différentes.

1.2.2 Règle d'addition

Soit une épreuve dont les issues peuvent être séparées en n sous-groupes d'issues $S_1, S_2, \ldots, S_n$ **incompatibles deux à deux** (sans possibilité commune).

Si le groupe S_k peut amener s_k issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

manières différentes.

Remarque 1.1.

1) La **règle du produit** est utilisée lorsque l'on compte le nombre de cas en parcourant l'arbre des issues possibles des branches principales jusqu'aux feuilles, les **branches d'un niveau donné devant avoir toutes le même nombre de sous-branches**.
2) La **règle d'addition** est utilisée lorsque l'on divise l'arbre des issues possibles en plusieurs sous–arbres et que l'on somme les nombres des issues des différents sous–arbres.
3) En général, la règle du produit correspond à la conjonction « et » et la règle d'addition à la conjonction « ou ».

Exemple 1.6.

Dans une classe comportant 12 garçons et 8 filles, on doit choisir une personne responsable du courrier et une autre personne déléguée de classe.

a) De combien de manières peut-on le faire ?

b) Parmi ces choix combien sont formés de deux élèves du même sexe ?

1.3 Factorielles

- $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \ldots$
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$

Exemple 1.7.

Calculer.

a) $\dfrac{8!}{5!} =$

b) $\dfrac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4!} =$

c) $\dfrac{100!}{98!} =$

d) $7! \cdot 8 =$

e) Ecrire $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ comme un produit de facteurs.

Remarque 1.2.

On calcule $n!$ avec la calculatrice en pressant successivement sur sur $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{=}$

1.4 Permutations

Par définition, une **Anagramme** d'un mot est un mot de même longueur qui mélange les lettres du mot donné.

Exemple 1.8.

Déterminer le nombre d'anagrammes de PARIS.

Exemple 1.9.

Déterminer le nombre d'anagrammes de ALMA.

Exemple 1.10.

Déterminer le nombre d'anagrammes de GENEVE.

Exemple 1.11.

Déterminer le nombre d'anagrammes de VILLENEUVE.

Formule des permutations

<table>
<tr><th colspan="2">Placer n objets à n places</th></tr>
<tr><td>Permutations simples</td><td>Permutations avec répétitions</td></tr>
<tr><td>Exemples de référence
a) Classements possibles de 5 personnes.

b) Anagrammes de GYMNASE.</td><td>Exemples de référence
a) Manières d’aligner trois billes rouges et 4 billes vertes.

b) Anagrammes de FILOZOFI.</td></tr>
<tr><td>Formule

$P_n =$</td><td>Formule

$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_r) =$</td></tr>
</table>

1.5 Arrangements

Exemple 1.12.

Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places.

De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

Exemple 1.13.

Une course de chevaux compte 15 partants.

Combien y a-t-il de possibilités de jouer un quarté (pronostiquer l'ordre d'arrivée des 4 premiers de la course) ?

Exemple 1.14.

Les plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactement quatre lettres de l'alphabet latin.

Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ?

Exemple 1.15.

Un bulletin de sport-toto compte 13 matches. Un joueur doit cocher « 1 » s'il pense que l'équipe jouant à domicile va gagner, « 2 » s'il pense que c'est l'autre qui va gagner et « x » s'il pense que les deux équipes vont faire match nul.

Combien de bulletins différents de sport-toto peut-on remplir ?

Formule des arrangements

Choix successifs (en tenant compte de l'ordre) de k éléments (distincts ou non) parmi n	
Arrangements simples	**Arrangements avec répétitions**
Exemple de référence Codes de quatre lettres différentes	**Exemple de référence** Codes de quatre lettres (non nécessairement distinctes)
Formule $A_k^n =$	**Formule** $\overline{A}_k^n =$

Remarque 1.3.

Avec la calculatrice, on calcule A_k^n à l'aide de la touche **nPr** soit en pressant successivement sur : $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{9}$, $\boxed{k}$ et $\boxed{=}$.

1.6 Combinaisons

Exemple 1.16.

Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

Exemple 1.17.

Combien de mains différentes (choix de 5 cartes) y a-t-il dans un jeu de poker ?

Exemple 1.18.

Une grille de loto compte 45 numéros. Un joueur doit en cocher 6.

Combien y a-t-il de façons de remplir cette grille ?

Formule des combinaisons

Choix de k objets parmi n objets, les objets choisis ayant tous le même rôle, l'ordre de choix n'étant pas considéré
Combinaisons simples (sans répétition)
Exemple de référence Nombre de manières de choisir un groupe de 3 personnes pour la préparation d'un voyage d'étude parmi une classe de 20 élèves
Formule $C_k^n =$

Remarque 1.4.

1) $C_k^n = \dfrac{A_k^n}{k!}$
2) Avec la calculatrice, on calcule C_k^n à l'aide de la touche **nCr** soit en pressant successivement sur : $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{8}$, $\boxed{k}$ et $\boxed{=}$.

1.7 Coefficients binomiaux

$C_k^n = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ est appelé un **coefficient binomial**, noté également $\dbinom{n}{k}$.

Propriétés des coefficients binomiaux

1) C_k^n représente le nombre de choix simultanés de k objets parmi n (choix d'un sous-groupe de k objets distincts sans tenir compte de l'ordre).

2)
$$C_k^n = C_{n-k}^n$$
A chaque choix simultané de k objets parmi n correspond le choix simultané des $n-k$ objets restants.

3)
$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$
L'ensemble des choix simultanés de k objets parmi n objets $O_1, O_2, \ldots, O_n$ peut être divisé en deux groupes :
   - Les C_k^{n-1} choix simultanés qui ne contiennent pas l'objet O_n (donc les choix de k objets parmi $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$)
   - Les C_{k-1}^{n-1} choix simultanés qui contiennent l'objet O_n (donc les choix, outre de O_n, de $k-1$ objets parmi $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$)

Exemple 1.19.

Dans un groupe de 20 personnes dont Jacques, calculer le nombre de commissions de trois personnes contenant Jacques et le nombre de commissions de trois personnes ne contenant pas Jacques.

1.8 Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & C_0^0 & & & & & \\ & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & \\ & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & \\ & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & & \\ & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & \\ C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5 \end{array}$$

binôme de Newton

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b = 1\cdot a + 1\cdot b$
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$
- $\ldots$
- $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^{n-k}b^k$

Exemple 1.20.

Développer.

$(3-2x)^5 =$

1.9 Exercices

1.1

a) Déterminer le nombre d'entiers positifs à quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4.

b) Parmi les entiers du point a), combien ont des chiffres distincts ?

c) Parmi les entiers du point a), combien sont-ils inférieurs à 2'200 ?

1.2

Une personne a quatre pantalons, six chemises et trois pulls. Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter ? Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter si chaque pull peut être mis avec exactement 2 pantalons et chaque chemise avec exactement deux pulls ?

1.3

Dans un certain état, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet suivie de cinq chiffres (0, 1, 2, ... , 9). Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si :

a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut être 0 ;

b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0.

1.4

On place les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

a) Combien existe-t-il de classements différents ?

b) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

c) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

1.5

Un questionnaire comporte cinq questions à choix multiple ; pour chacune des questions, on propose trois réponses possibles.

a) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une seule réponse par question (il y a donc une seule réponse juste par question)

b) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une ou deux réponses par question (il peut donc y avoir une ou deux réponses justes par question).

1.6

Un **palindrome** est un nombre entier (ou un mot, voire une phrase) qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche sans le modifier ; par exemple, 21312 est un palindrome.

a) Déterminer le nombre de palindromes formés de 2 chiffres, 3 chiffres, 4 chiffres, 5 chiffres, 10 chiffres.

b) Le 20.02.2002 était une date palindrome ; le 11.02.2011 également. Quelles sont les deux dates palindromes suivantes ?

1.7

Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points qui sont disposés dans un tableau de trois lignes et deux colonnes. Chaque point peut être en relief ou non. Combien de signes distincts peut-on composer ?

1.8

On forme un nombre en utilisant les chiffres 2, 3, 5, 6, 7 ou 9 autant de fois que l'on veut.

a) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?

b) Parmi ceux-ci combien sont inférieurs à 550 ? pairs ? multiples de 5 ?

1.9

15 pilotes participent à une suite de grand prix ; on compte parmi eux 4 motos Yamaha, 9 motos Honda et 2 motos Suzuki.

a) Lors d'une course, combien y a-t-il de podiums (classements des 3 premiers) possibles ?

b) On s'intéresse aux vainqueurs des trois premières courses de la saison (un pilote peut gagner plusieurs courses).

   i) Combien y a-t-il de cas où ce sont trois pilotes de marques différentes qui gagnent les trois courses ?

   ii) Combien y a-t-il de cas où une course au moins est gagnée par un pilote Suzuki ?

1.10

De combien de façons différentes peut-on aligner 5 billes rouges, 2 billes bleues et 3 billes vertes ?

1.11

Combien d'anagrammes du mot TOULOUSE peut-on écrire si les consonnes doivent occuper les $1^{\text{ère}}$, $4^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$ positions ?

1.12

On jette vingt fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note le résultat sous la forme d'une suite de P ou de F.

a) Combien y a-t-il de suites différentes ?

b) Parmi celles-ci, combien contiennent exactement une fois pile ? quatre fois pile ? dix fois pile ? vingt fois pile ?

1.13

On dispose de 26 jetons gravés avec les lettres de l'alphabet. En tirant successivement au hasard trois jetons sans remise, on obtient un mot de trois lettres.

a) Quel est le nombre d'issues possibles ?

b) Dénombrer les événements suivants :

   i) On obtient un mot formé de trois consonnes.

   ii) On obtient un mot formé de trois voyelles.

   iii) On obtient le mot BAC.

   iv) On obtient une anagramme du mot BAC.

1.14

De combien de manières différentes peut-on aligner 5 dés à jouer de couleurs différentes ?

1.15

a) Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour un distributeur automatique de billets. Si le client a oublié l'ordre des chiffres, calculer le nombre maximum d'essais nécessaires pour obtenir le code correct.

b) Même problème que la question 1 avec les chiffres 2, 4 et 7 en sachant que l'un de ces trois chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

1.16

On considère les huit chiffres du nombre 73'293'372.

a) Combien de nombres peut-on écrire avec ces huit chiffres ?

b) Combien de nombres impairs peut-on écrire avec ces huit chiffres ?

c) Combien de nombres composés de trois chiffres 3 consécutifs peut-on former avec ces huit chiffres ?

1.17

On lance quatre fois de suite un dé tétraédrique (en forme de pyramide à base triangulaire) dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4. En notant les quatre chiffres successifs obtenus sur la face cachée du dé, on obtient un nombre à quatre chiffres.

a) Combien de nombres peut-on obtenir ?

b) Parmi les nombres obtenus, combien de nombres :

   i) comportent quatre chiffres différents ?

   ii) ne comportent aucun chiffre 2 ?

   iii) comportent exactement une fois le chiffre 1 ?

1.18

Un programme d'ordinateur est formé de bits. Un bit est soit « 0 » soit « 1 ». On considère un mot de longueur 15 bits.

a) Combien de mots différents peut-on construire ?

b) Combien de mots sont formés de sept fois « 0 » et huit fois « 1 » ?

c) Combien de mots commencent-ils et se terminent-ils par « 1 » ?

d) Combien de mots sont-ils composés de deux « 1 » exactement qui ne sont pas consécutifs (il y a donc treize « 0 »)

1.19

Pour remercier onze personnes d'un travail bénévole qu'elles viennent d'accomplir, le responsable souhaite offrir à chacun un disque ou un livre.

a) S'il dispose de cinq exemplaires d'un même disque et six exemplaires d'un même livre, de combien de manières peut-il effectuer son choix ?

b) Même question que 1 s'il dispose de quatre exemplaires d'un premier disque, deux exemplaires d'un deuxième disque et cinq exemplaires d'un même livre.

1.20

On considère un groupe de 10 randonneurs, dont Pierre, Paul et Jacques. Les 10 randonneurs marchent les uns derrière les autres (ils forment une colonne de marcheurs).

a) Combien y a-t-il de colonnes possibles ?

b) Dans combien de colonnes Pierre, Paul et Jacques se suivent-ils (dans un ordre quelconque) ?

c) Quel est le nombre de colonnes pour lesquelles Pierre, Paul et Jacques ne sont ni en tête, ni en queue du groupe ?

1.21

On doit choisir parmi une classe de 13 élèves des délégués pour la représenter dans le conseil de l'école.

a) On veut choisir deux délégués. Pour choisir ces deux représentants, on place dans une urne le nom des 13 élèves, l'on tire un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants. Combien de tirages sont possibles ?
Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des deux délégués.

b) On veut choisir maintenant trois délégués. Pour choisir ces trois représentants, on tire de l'urne un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants et un troisième parmi les restants. Combien de tirages sont possibles ?
Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des trois délégués.

c) En utilisant le lien entre le nombre de tirages et le nombre de choix de délégués vus aux points précédents, déterminer le nombre de choix de quatre délégués et le nombre de choix de cinq délégués.

1.22

A partir d'un groupe de 10 candidats formés de 6 hommes et 4 femmes, de combien de manières différentes peut-on choisir (chaque personne ne peut occuper qu'une seule fonction) :

a) Un comité formé d'un(e) président(e), d'un(e) caissier(ère) et d'un(e) secrétaire ?

b) Un comité de trois personnes formé d'au moins une femme ?

c) Une commission de trois personnes comportant une personne qui préside la commission et formée d'exactement une femme ?

1.23

Douze personnes ont à leur disposition trois voitures de 6, 4 et 2 places.

a) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures ?

b) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures s'il y a quatre conducteurs parmi les douze personnes et qu'il faut choisir un conducteur par voiture (lorsqu'il y a deux conducteurs dans une voiture, le choix du conducteur doit être pris en compte) ?

1.24

a) De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes en deux groupes, un de sept personnes, l'autre de 3 personnes ?

b) Même question avec un partage en trois groupes : un de cinq, un de deux et un de trois.

c) Même question avec deux groupes de cinq personnes.

1.25

12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

1.26

Un tiroir contient 4 couteaux, 7 fourchettes et 1 cuillère, mais ces ustensiles sont rangés dans le plus grand désordre.

a) On choisit successivement trois de ces services sans remettre le service choisi dans le tiroir. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

  i) dans cet ordre la cuillère, une fourchette et un couteau ?

  ii) un couteau lors troisième tirage ?

  iii) la cuillère ?

  iv) au moins deux fourchettes ?

b) On saisit dans le tiroir, simultanément, trois des ustensiles. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

  i) la cuillère, une fourchette et un couteau ;

  ii) trois fourchettes ou trois couteaux ;

  iii) la cuillère ?

1.27

Un électricien peu honnête désire vendre son stock de 30 ampoules dont 27 sont en parfait état et 3 sont défectueuses.

a) Vérifier que l'électricien peut réaliser 4'060 emballages contenant 3 ampoules.

b) Combien, parmi ces emballages, ne contiennent que 2 ampoules en parfait état ?

c) Combien, parmi ces emballages, contiennent au moins une ampoule défectueuse ?

L'électricien vend à un client deux emballages de 3 ampoules choisies au hasard parmi les 30 ampoules.

d) Combien a-t-il de possibilités de le faire ?

e) Parmi ces possibilités, combien comportent 6 ampoules en parfait état ?

1.28

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire simultanément 5 cartes. Quel est le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

a) 2 rois, 2 dames et 1 valet ?

b) Les quatre rois ?

c) Le roi de cœur ?

d) Au moins un roi rouge ?

1.29

De combien de manières peut-on asseoir 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde, si (on ne tient compte que de la position relative des six personnes les unes par rapport aux autres).

a) Aucune restriction n'est imposée ?

b) 2 femmes particulières ne doivent pas être assises l'une à côté de l'autre ?

c) Chaque femme doit être placée entre deux hommes ?

1.30

De combien de manières peut-on asseoir 9 personnes dans une rangée de 9 sièges ?

1.31

De combien de manières peut-on placer 3 romans, 2 livres de mathématiques et 1 de chimie sur une étagère si :

a) Aucune restriction n'est mise ;

b) Les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble et les romans aussi ;

c) Seuls les romans doivent être rangés ensemble (les 2 livres de mathématiques sont séparés) ?

1.32

A l'aide des 6 chiffres de 1 à 6, chacun étant pris une seule fois, combien peut-on former de nombres distincts dans chacun des cas suivants :

a) Nombres de 6 chiffres ?

b) Nombres de 4 chiffres ?

c) Nombres de 4 chiffres commençant par le chiffre 4 ?

d) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 ?

e) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 mais pas le chiffre 6 ?

f) Nombres de 4 chiffres ne contenant ni le chiffre 3, ni le chiffre 6 ?

g) Nombres de 4 chiffres contenant les chiffres 3 et 6 ?

h) Nombres de 4 chiffres contenant au plus l'un des deux chiffres 3 et 6 ?

i) Nombres de 4 chiffres contenant au moins l'un des deux chiffres 3 et 6 ?

j) Nombres de 4 chiffres contenant 2 chiffres pairs et 2 chiffres impairs ?

k) Nombres pairs de 4 chiffres ?

l) Nombres de 4 chiffres divisibles par 4 ?

1.33

Un film est projeté 3 soirs de suite. Si 15 personnes décident d'aller voir ce film (chacune une fois), combien de possibilités peut-on envisager

a) Si chaque personne choisit indépendamment des autres le soir qui lui convient ?

b) Si chaque soir exactement 5 de ces personnes vont voir le film ?

Exercices de révision

1.34

Sur un damier rectangulaire composé de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer :

a) Quatre jetons de même couleur ?

b) Quatre jetons de couleurs différentes ?

c) Quatre jetons de couleurs différentes dont deux sont dans la troisième colonne ?

d) Quatre jetons de couleurs différentes dont deux au moins sont dans la troisième colonne ?

1.35

On compose un numéro de quatre chiffres en tapant successivement quatre fois de suite sur le clavier d'un téléphone (formé des touches numérotées de 0 à 9).

a) Combien de numéros ne comportent-ils aucun 8 et aucun 9 ?

b) Combien de numéros sont-ils formés de deux 9 exactement ?

c) Combien de numéros sont-ils formés de quatre chiffres distincts, dont trois impairs et un pair ?

d) Combien de numéros sont-ils formés de (exactement) deux chiffres différents ?

1.36

Une équipe sportive d'un gymnase est composée de 12 garçons et de 18 filles. Parmi les garçons, 10 étudient l'anglais, alors que parmi les filles, 14 étudient l'anglais. On offre à deux élèves de l'équipe un voyage gratuit en Angleterre pour assister à la finale du tournoi de Wimbledon en choisissant simultanément deux personnes dans l'équipe. Combien de choix :

a) Peut-on faire en tout ?

b) Comportent deux élèves de même sexe qui étudient les deux l'anglais ?

c) Comportent deux élèves dont l'un au moins étudie l'anglais ?

d) Comportent deux élèves qui étudient l'anglais dont au moins un garçon ?

1.37

Chaque jour de la semaine (7 jours), un amoureux offre une fleur à sa belle. Il achète cette fleur dans un magasin qui ne vend que des iris, des oeillets et des roses. Il fait en sorte que chaque semaine soit différente de toutes les précédentes.

a) Pendant combien de semaines ce Romeo peut-il acheter des fleurs dans ce magasin ?

b) Combien y aura-t-il de semaines au cours desquelles la jeune fille recevra :

   i) au moins une rose ?

   ii) exactement 3 roses ?

   iii) 3 roses, 2 iris et 2 oeillets ?

1.38

On a posé la question suivante dans une classe : « de combien de manières différentes peut-on placer 5 tours sur un échiquier (64 cases) de manière à ce qu'elles ne s'attaquent pas mutuellement ? » . Les réponses (avec le raisonnement correspondant) ont été les suivantes :

A : On choisit 5 colonnes, puis 5 lignes, soit $C_5^8 \cdot C_5^8 = 3'136$.

B : On choisit 5 lignes : C_5^8. Il y a $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilités de disposer les tours sur les 5 lignes choisies. Donc $C_5^8 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = 376'320$.

C : On met une tour sur l'échiquier : 64 possibilités ; on place ensuite une seconde tour : 49 possibilités et ainsi de suite : $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 = 45'158'400$.

D : Pour mettre 8 tours sur l'échiquier, il y a 8! possibilités ; on choisit 5 tours dans chacune de ces positions : $8! \cdot C_5^8 = 2'257'920$.

Ces raisonnements sont-ils corrects ? Modifier légèrement les raisonnements non corrects de sorte qu'ils deviennent corrects. Vérifier que les quatre raisonnements fournissent la même réponse.

1.10 Réponses

1.1 a) 256 ; b) 24 ; c) 80.

1.2 72 et 24.

1.3 a) 2'340'000 ; b) 2'160'000.

1.4 a) 479'001'600 ; b) 39'916'800 ; c) 79'833'600.

1.5 a) 243 ; b) 7'776.

1.6 a) 9 ; 90 ; 90 ; 900 ; 90'000 ; b) 21 février 2012 (21022012) et 2 février 2020 (02022020).

1.7 64

1.8 a) 216 ; b) 84 ; 72 ; 36.

1.9 a) 2'730 ; b) i) 432 ; ii) 1'178.

1.10 2'520

1.11 180

1.12 a) 1'048'576 ; b) 20 ; 4'845 ; 184'756 ; 1.

1.13 a) 15'600 ; b) i) 6'840 ; ii) 120 ; iii) 1 ; iv) 6.

1.14 933'120

1.15 a) 24 ; b) 36.

1.16 a) 1'680 ; b) 1'260 ; c) 180.

1.17 a) 256 ; b) i) 24 ; ii) 81 ; iii) 108.

1.18 a) 32'768 ; b) 6'435 ; c) 8'192 ; d) 91.

1.19 a) 462 ; b) 6'930.

1.20 a) 3'628'800 ; b) 241'920 ; c) 1'693'440.

1.21 a) 78 ; $156 = 2 \cdot 78$; b) 286 ; $1'716 = 6 \cdot 286$; c) 715 ; 1'287.

1.22 a) 720 ; b) 100 ; c) 180.

1.23 a) 13'860 ; b) 12'096.

1.24 a) 120 ; b) 2'520 ; c) 126.

1.25 66

1.26 a) i) 28 ; ii) 440 ; iii) 330 ; iv) 840 ; b) i) 28 ; ii) 39 ; iii) 55.

1.27 a) 4'060 ; b) 1'053 ; c) 1'135 ; d) 5'937'750 ; e) 2'960'100.

1.28 a) 144 ; b) 8 ; c) 330 ; d) 540.

1.29 a) 120 ; b) 72 ; c) 12

1.30 362'880

1.31 a) 720 ; b) 72 ; c) 72

1.32 a) 720 ; b) 360 ; c) 60 ; d) 240 ; e) 96 ; f) 24 ; g) 144 ; h) 216 ; i) 336 ; j) 216 ; k) 180 ; l) 96

1.33 a) 14'348'907 ; b) 756'756

1.34 a) 495 ; b) 11'880 ; c) 2'592 ; d) 2'808.

1.35 a) 4'096 ; b) 486 ; c) 1'200 ; d) 630.

1.36 a) 435 ; b) 136 ; c) 420 ; d) 185.

1.37 a) 2187 ; b)1) 2059 ; ii) 560 ; iii) 210

1.38 B correct.