Chapitre 3

Fonctions exponentielle et logarithme

3.1 Primitive de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Nous avons calculé au chapitre 1 les primitives de la fonction puissance $f(x) = x^m$ pour autant que $m \neq -1$:

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c \quad \text{si} \quad m \neq -1$$

Exemple 3.1.

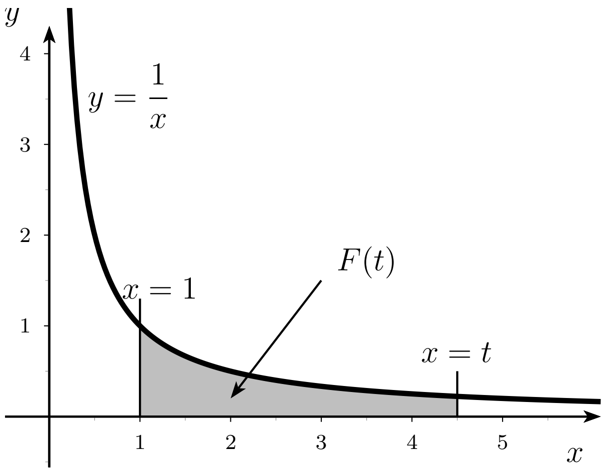
Calculer :

a) $\displaystyle\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x =$

A l'aide du théorème fondamental du calcul intégral (voir théorème § 1.2.3), on construit une primitive F de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}_+^*$$



Remarque 3.1.

- Si $t > 1$, $F(t)$ est égal à l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et les droites verticales $x = 1$ et $x = t$ (domaine grisé ci-dessus).
- Si $0 < t < 1$, $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$.
  Donc si $0 < t < 1$, $F(t)$ est égal à moins l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Propriétés de la primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) La fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ vérifie les propriétés suivantes :

   a) F est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ telle que $F(1) = 0$.

   b) $F(t) = \ln(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^*$.

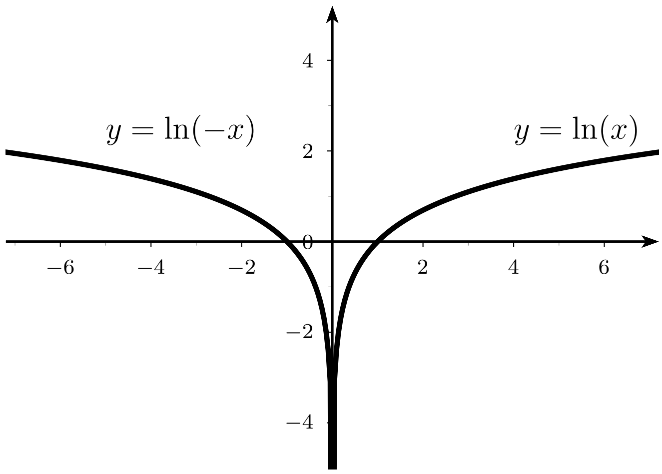
   La fonction logarithme naturel (de base e) est donc une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

2) Pour obtenir une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, il faut considérer la fonction

$$\ln(\,|x|\,) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $(\ln(\,|x|\,))' = \dfrac{1}{x}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(\,|x|\,) + c$



Exemple 3.2.

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$

3.2 Intégrale et logarithme naturel

- $F(x) = \ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $F(x) = \ln(|\,x\,|)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Intégrale d'une fonction puissance

$$\int x^m \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}x^{m+1} + c & \text{si } m \neq -1 \\ \displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|\,x\,|) + c & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

$$\int u^m \cdot u' \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}u^{m+1} + c & \text{si } m \neq -1 \\ \displaystyle\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x = \ln(|\,u\,|) + c & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

Exemple 3.3.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{4x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x =$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-4x+2}{x^2}\,\mathrm{d}x =$

3.3 Primitive d'une fraction rationnelle

Nous allons déterminer la primitive d'une fraction rationnelle dans certains cas.

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{s(x)}$ une fraction rationnelle (quotient de polynômes).

Etape 1 : division euclidienne éventuelle

Si $\deg(p(x)) \geq \deg(s(x))$, on effectue d'abord une **division euclidienne** :

Si $q(x)$ et $r(x)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division de $p(x)$ par $s(x)$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)} \text{ avec } \deg(r(x)) < \deg(s(x))$$

Etape 2 : recherche des primitives

La recherche d'une primitive pour $f(x) = q(x) + \dfrac{r(x)}{s(x)}$ se fait via la recherche d'une primitive pour $q(x)$ (qui est un polynôme) et d'une primitive pour le quotient $\dfrac{r(x)}{s(x)}$.

Exemple 3.4.
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x-4}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x =$

3.4 Etude de la fonction logarithme naturel

Propriétés algébriques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+^*$

1) $\ln(1) = 0$
2) $\ln(e) = 1$
3) $\ln(e^x) = x$
4) $e^{\ln(u)} = u$
5) $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
6) $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
7) $\ln(u^x) = x \cdot \ln(u)$
8) $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$

Ensemble de définition

Attention : La fonction $\ln(x)$ n'est définie que si $x > 0$.

$ED = \mathbb{R}_+^*$

Signe

$\ln(x) = 0 \iff x = 1$

x		0		1	
$\ln(x)$	//////	‖	$-$	0	$+$

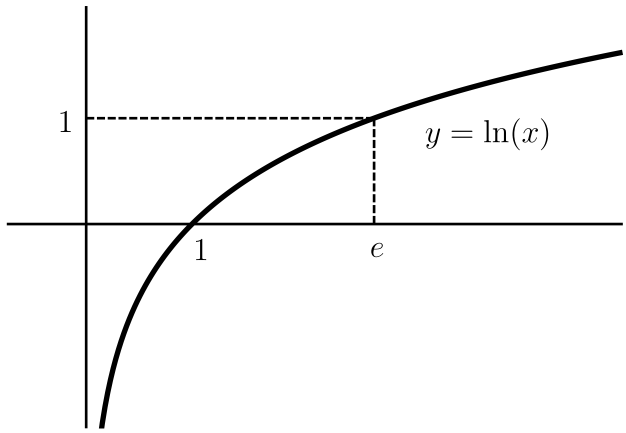
Limites

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$ ou « $\ln(0_+) = -\infty$ »

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ou « $\ln(+\infty) = +\infty$ »

Asymptote

Asymptote verticale d'équation $x = 0$



Dérivée

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln(u))' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple 3.5.

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \ln(3-x)$: ED, signe, asymptotes (AV et AH), croissance.

3.5 Etude de la fonction exponentielle de base e

La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est la réciproque de la fonction logarithme naturel :

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^* : \quad y = e^x \iff x = \ln(y)$$

Propriétés algébriques

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$

1) $\ln(e^x) = x$
2) $e^{\ln(u)} = u$
3) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
4) $(e^x)^y = e^{xy}$

Ensemble de définition

$ED = \mathbb{R}$

Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ou « $e^{-\infty} = 0$ »

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ou « $e^{+\infty} = +\infty$ »

Asymptote

Asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$

Dérivée

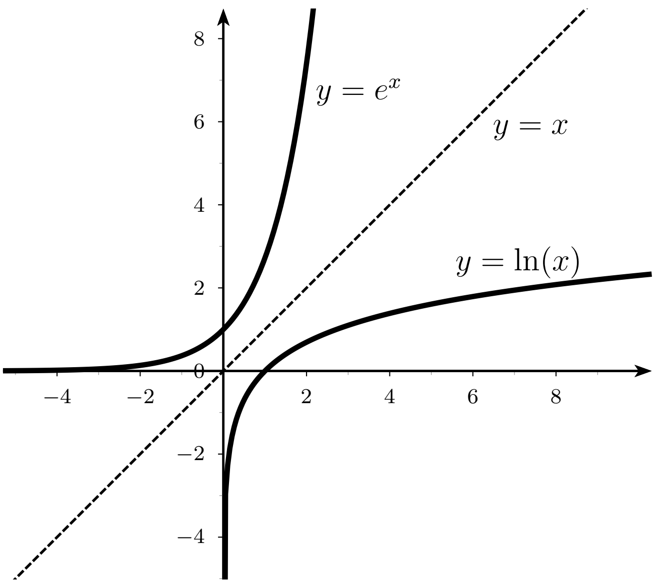
$(e^x)' = e^x$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

Signe

Aucun zéro : $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x			
e^x	$+$	$+$	$+$



Remarque 3.2.

La fonction exponentielle de base e étant la réciproque de la fonction logarithme naturel, leurs graphes sont symétriques relativement à la droite d'équation $y = x$, bissectrice des quadrants I et III (voir les représentations graphiques ci-dessus)

Exemple 3.6.

Etudier la fonction f définie par $f(x) = 1 - e^{2-x}$: ED, signe, asymptotes (AV et AH), croissance.

3.6 Intégrale et exponentielle

- $F(x) = e^x$ est une primitive de $f(x) = e^x$

On a donc

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int e^u \cdot u' \, \mathrm{d}x = e^u + c$$

Exemple 3.7.

Calculer les primitives suivantes.

a) $\displaystyle\int e^{2x-1} \, \mathrm{d}x =$

b) $\displaystyle\int x \cdot e^{2x^2+1} \, \mathrm{d}x =$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x =$

3.7 Règle de l'Hospital (Bernoulli-l'Hospital)

La règle de l'Hospital est utile pour le calcul de limites en cas de forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Règle de l'Hospital

Soit $a \in \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert avec $a \in I \subset \mathbb{R}$.

Soit f et g deux fonctions définies dans I et satisfaisant les conditions suivantes :

1) f et g sont dérivables dans $I - \{a\}$.
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
3) g' ne s'annule pas dans $I - \{a\}$.
4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque 3.3.

La règle de L'Hospital reste valable si $a = \pm\infty$. On peut également l'utiliser dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », donc si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Exemple 3.8.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} =$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) =$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} =$

3.8 Etude d'une fonction comportant un logarithme

Exemple 3.9.

Etudier complètement la fonction $f(x) = \ln(\dfrac{x}{x-2})$: ED, signe, asymptotes, croissance, graphe.

3.9 Etude d'une fonction comportant une exponentielle

Exemple 3.10.

Etudier complètement la fonction $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

3.10 Exercices

3.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{3x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

3.2

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{3-2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+x-1}{2x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2-10}\,\mathrm{d}x$

3.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3+26x}{2x^2+9}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3-11x^2+7x+2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

3.4

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x^2+4x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{4x-2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

3.5

Calculer les dérivées des fonctions f suivantes. Donner $ED(f)$ et $ED(f')$.

a) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

c) $f(x)=\ln\left(x^3-3x^2\right)$

d) $f(x)=\ln\left[(4-x^2)^3\right]$

e) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x}\right)$

f) $f(x)=x\cdot\ln(x)$

3.6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - x$. Etudier la variation de f, puis démontrer que l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3.7

Donner une équation de la tangente à la courbe $y = \ln(x^2 - 3)$ au point $T(2; \ldots)$.

3.8

Donner une équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ au point $T(1; \ldots)$.

3.9

Calculer les dérivées des fonctions f suivantes. Donner $ED(f)$ et $ED(f')$.

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

e) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

3.10

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} \, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{3x^2-1} \, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot e^{(x^3)} \, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \left(e^{(x^2)} - 1\right) \, dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 (x + e^{5x}) \, dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x \, dx$

3.11

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - 2x}{3x^3 - 6x^2 - 9x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x + 1}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{e^x - 3}{e^x - e^3}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$

3.12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}e^{-2x}$

a) Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de f.

b) Déterminer les coordonnées des trous de continuité éventuels, ainsi que des asymptotes verticales et horizontales éventuelles de f.

3.13

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$

a) Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de g.

b) Déterminer les coordonnées des trous de continuité éventuels, ainsi que des asymptotes verticales et horizontales éventuelles de g.

3.14

La capacité pulmonaire d'une personne en fonction de son âge est donnée par la fonction C définie par

$$C(t) = \frac{110 \cdot [\ln(t) - 2]}{t} \quad (t \text{ exprimé en années et } t \in [10; 90])$$

Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

3.15

La fonction $C(t) = 0,1 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{3}}$ (t exprimé en heures) représente l'évolution du taux d'alcool dans le sang au cours du temps. Calculer le niveau maximal d'alcool dans le sang et l'instant auquel ce maximum est atteint.

3.16

Le service de santé publique constate qu'un virus se propage parmi la population. La fonction $P(t)$ ci-dessous exprime le nombre de personnes atteintes en fonction du temps t :

$$P(t) = 80 + 40t^2 \cdot e^{-0.4t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis la découverte de l'épidémie.

a) Quel est le nombre de personnes atteintes lors de la découverte de l'épidémie ?

b) Combien de personnes seront atteintes au bout de 8 jours ?

c) Quel sera le nombre maximal de personnes atteintes ?

3.17

Dans une fabrique on suppose que lors du $n^{\text{ème}}$ jour de production d'un nouvel article, le nombre $f(n)$ d'articles produits est donné par la formule $f(n) = 3 + 20 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot n})$.

a) Calculer le nombre d'articles produits le premier jour de production.

b) Quel est le nombre d'objets produits le cinquième, le neuvième, le vingt-quatrième et le trentième jour ?

c) A quel moment 19 objets seront-ils produits ?

d) Plus les jours passent, et plus le personnel de la fabrique stabilise la production journalière... A combien d'articles par jour ?

3.18

On considère la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^x$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = a$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$, ainsi que la surface plane D' bornée par la courbe $y = f(x) = e^x$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = 4$. Pour quelle valeur de a l'aire de D' est-elle trois fois plus grande que l'aire de D ?

3.19

a) Calculer l'aire de la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^{2x}$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \ln(3)$.

b) Calculer l'aire de la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = 2\tan(x)$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.

3.20

On considère la surface plane D bornée par la courbe $y = f(x) = e^{2x}$, l'axe Ox et les verticales $x = 0$ et $x = \ln(2)$. Calculer le volume du solide obtenu par révolution de D autour de l'axe Ox.

3.21

Le tremblement de terre à Assam (nord-est de l'Inde) en 1952 fut d'une intensité de $R = 8,7$ sur l'échelle de Richter, l'une des plus élevées jamais enregistrées (un tremblement de terre de magnitude 8.9 a eu lieu au large du Japon en mars 2011). Les séismologues ont calculé que si le tremblement de terre le plus important d'une année donnée était d'une intensité R, l'énergie E (en Joules), libérée par tous les tremblements de terre de la même année, pouvait être estimée à l'aide de la formule $E = 9,13 \cdot 10^{12} \cdot \int_0^R e^{1,25x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer cette énergie pour l'année 1952.

b) Comme il faut un million de Joules pour amener à ébullition 3 litres d'eau, combien de litres d'eau pourrait-on chauffer avec cette énergie ?

3.22

Une formule empirique permet d'estimer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en centimètres) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6$, alors $h(x)$ est de la forme $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222 \cdot \ln(x)$.

a) Quelle sera la taille probable et quel sera le taux de croissance d'un enfant de 2 ans ?

b) A quel moment le taux de croissance est-il le plus élevé ?

3.23

Le modèle de Jenss est un autre modèle permettant d'évaluer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en centimètres) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6$, alors $h(x)$ est de la forme $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$.

a) Quelle sera la taille probable et quel sera le taux de croissance d'un enfant de 1 an ?

b) A quel moment le taux de croissance est-il le plus élevé ? Le plus faible ?

3.24

Etudier les fonctions f définies par :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x-2}\right)$

3.25

Etudier les fonctions f suivantes :

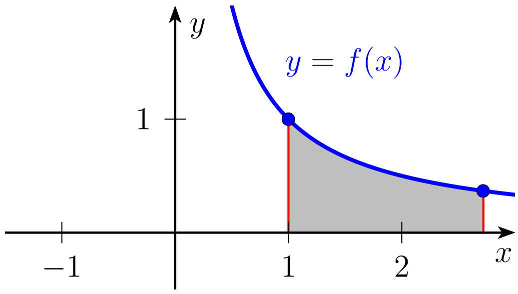
a) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x}$

3.11 Solutions des exercices

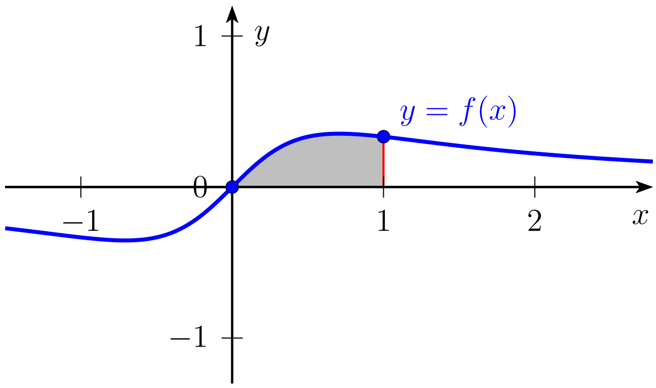
3.1

a)



$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^e = 1 - 0 = 1$$

b)



$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\ln|2x^2+1|\Big|_0^1 = \frac{\ln(3)}{4} \cong 0,275$$

c) $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0,405$

d) $\frac{\ln(6)}{2} \cong 0,896$

3.2

a) $\frac{1}{2}\ln(|x^2+3|)+c$

b) $-\ln(|3-2x|)+c$

c) $\sqrt{2x+1}+c$

d) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\ln(2)$

e) $-2\ln(4) = -4\ln(2)$

f) $-\ln(10)$.

3.3

a) $2\ln(11) - 4\ln(3) + 1 \cong 1.401$

b) $\frac{3\ln(3)}{2} - \frac{25}{6} \cong -2.52$

3.4

a) $\frac{1}{2}\ln(3)$

b) $\frac{1}{3}\ln^3(x)+c$

c) $\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4})$

d) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ln(|4x-2|)+c$

e) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln(|x^2-x|)+c$

f) $4-3\ln(3)$

3.5

a) $ED(f)=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$; $ED(f')=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b) $ED(f)=]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$; $ED(f')=]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

c) $ED(f)=]3;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-3x}$; $ED(f')=]3;+\infty[$

d) $ED(f)=]-2;2[$; $f'(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}$; $ED(f')=]-2;2[$

e) $ED(f)=]-\infty;1[$; $f'(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}$; $ED(f')=]-\infty;1[$

f) $ED(f)=\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\ln(x)+1$; $ED(f')=\mathbb{R}_+^*$

3.6

Maximum global en : $(1;-1)$ $\Rightarrow f(x)$ n'a pas de zéro

3.7

$f(x)=\ln(x^2-3) \quad \Rightarrow \quad T(2;0)$

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3} \quad \Rightarrow \quad f'(2)=4$

$(t): y-0=4(x-2) \quad \Rightarrow \quad (t): \ y=4x-8$

3.8

$(t): \ y=x-1$

3.9

a) $f'(x)=3\cdot e^{3x}$ $\qquad ED(f')=ED(f)=\mathbb{R}$

b) $f'(x)=(2x+1)e^{2x}$ $\qquad ED(f')=ED(f)=\mathbb{R}$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ $\qquad ED(f')=ED(f)=\mathbb{R}$

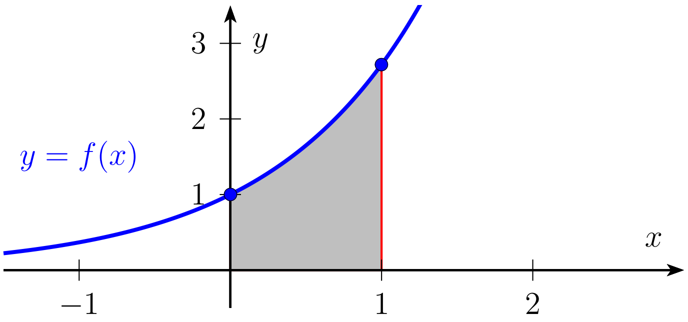
d) $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ $\qquad ED(f')=ED(f)=\mathbb{R}$

e) $f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ $\qquad ED(f)=\mathbb{R}_+$; $ED(f')=\mathbb{R}_+^*$

f) $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ $\qquad ED(f')=ED(f)=\mathbb{R}$

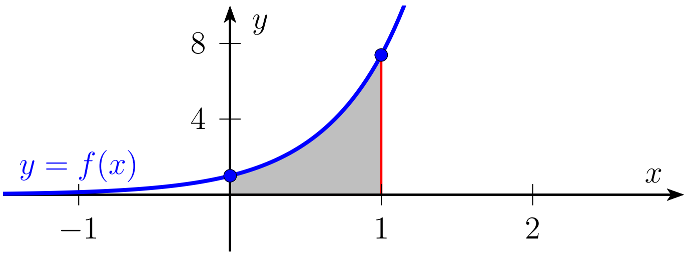
3.10

a)



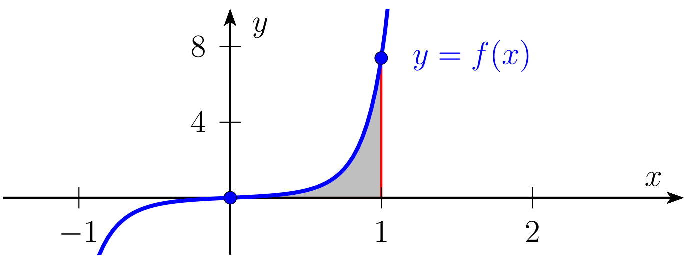
$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \cong 1,718$$

b)



$$\frac{1}{2}\int_0^1 2 \cdot e^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2} \cong 3,195$$

c)



$$\frac{1}{6}\int_0^1 6x \cdot e^{3x^2-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot e^{3x^2-1} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{6e} \cong 1,17$$

d) $\dfrac{e-1}{3} \cong 0,573$

e) $\dfrac{e-2}{2} \cong 0,359$

f) $e - \sqrt{e} \cong 1,07$

g) $\dfrac{2e^5+3}{10} \cong 29,983$

h) $\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right) \cong 0,62$

i) $\dfrac{(e-1)^5}{5} \cong 2,996$

3.11

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 - 2x}{3x^3 - 6x^2 - 9x}$ $\left(\text{forme indéterminée : } \dfrac{0}{0}\right)$

Règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 - 2x}{3x^3 - 6x^2 - 9x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{6x^2 - 2}{9x^2 - 12x - 9} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x^2}$ $\left(\text{forme indéterminée : } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{-1}{-x}}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

c) $-\infty$

d) $+\infty$

e) 0

f) $\pm\infty$

g) -1

h) 0

3.12

a) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

x		0		1	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

b) aucun trou ; AV : $x = 0$; AH : $y = 0$ en $+\infty$.

3.13

a) $ED(g) =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

x		0		1	
$g(x)$		$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$

b) Trou de coordonnées $(1; \dfrac{1}{2})$; AV : $x = 0$; AH : $y = 0$ en $+\infty$.

3.14

La capacité pulmonaire est maximale lorsque $t = e^3 \cong 20$ ans

3.15

Taux d'alcool maximal lorsque $t = 3$ heures et ce taux vaut $C(3) = 0,3 \cdot e^{-1} \cong 0,11$

3.16

a) 80 personnes

b) 184 personnes

c) 215 personnes

3.17

a) 5 objets

b) 11/ 15 / 21/ 22

c) Il faut 17 jours

d) 23 objets par jour

3.18

$a = \ln\left(\frac{e^4+2}{3}\right) = \ln(e^4+2) - \ln(3) \cong 2,94$

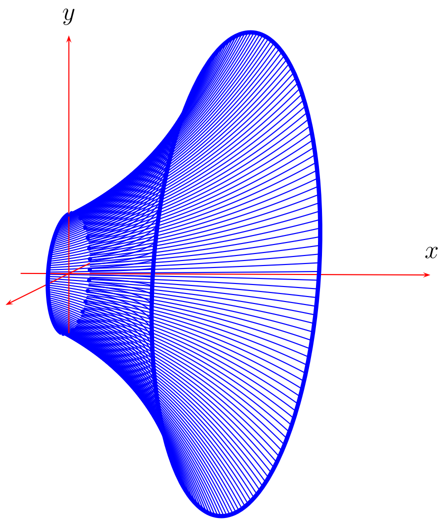
3.19

a) 4 u^2

b) $\ln(2)$ u^2

3.20

$\dfrac{15\pi}{4}$ u^3



3.21

a) $E = 3,85927 \cdot 10^{17}$ Joules

b) $1,15778 \cdot 10^{12}$ litres d'eau (cela correspond au volume d'eau du lac de Bienne)

3.22

a) $86,83$ cm et $9,715$ cm/an

b) 3 mois

3.23

a) $75,77$ cm et $15,98$ cm/an

b) 3 mois / 6 ans

3.24

a) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

$ED(f) : x(x-2) > 0 \quad \Rightarrow ED(f) =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

zéros de f : $x^2 - 2x = 1 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad$ zéros de f : $x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$

x		$1-\sqrt{2}$		0		2		$1+\sqrt{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$		//////		$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty$

AV : $x = 0$ (à droite de la courbe) et $x = 2$ (à gauche de la courbe)

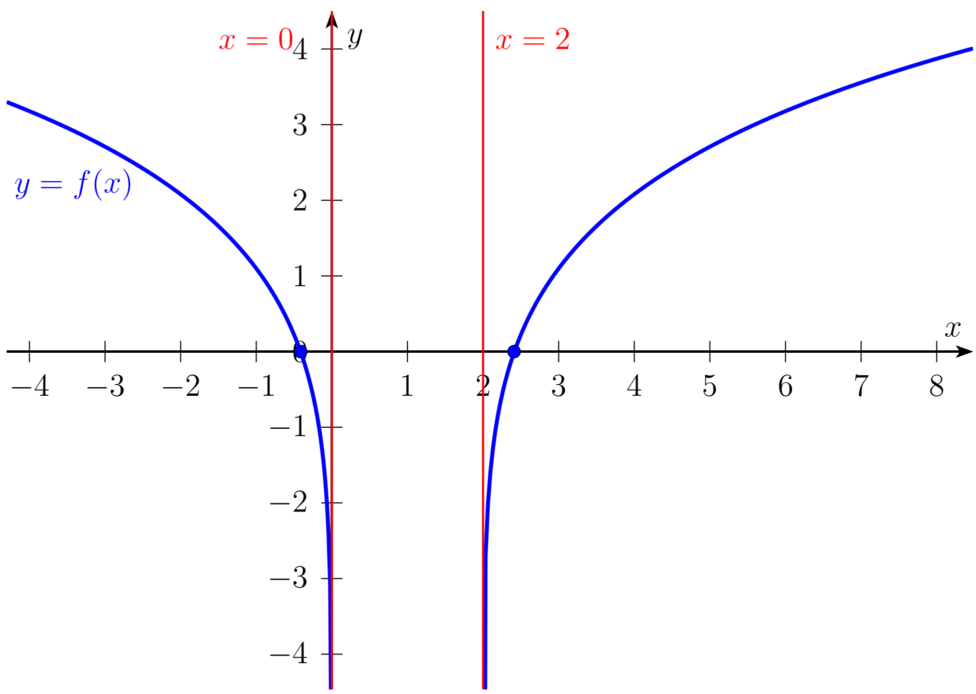
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - 2x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ pas d'AH

$f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

zéros de f' : aucun car $x = 1 \notin ED(f)$

x		0		2	
$f'(x)$	$-$		//////		$+$
$f(x)$	$\searrow$		//////		$\nearrow$

$\Rightarrow \quad$ pas d'extremum



b) $ED(f) =]2; +\infty[$

x		2		3	
$f(x)$	//////		$-$	0	$+$

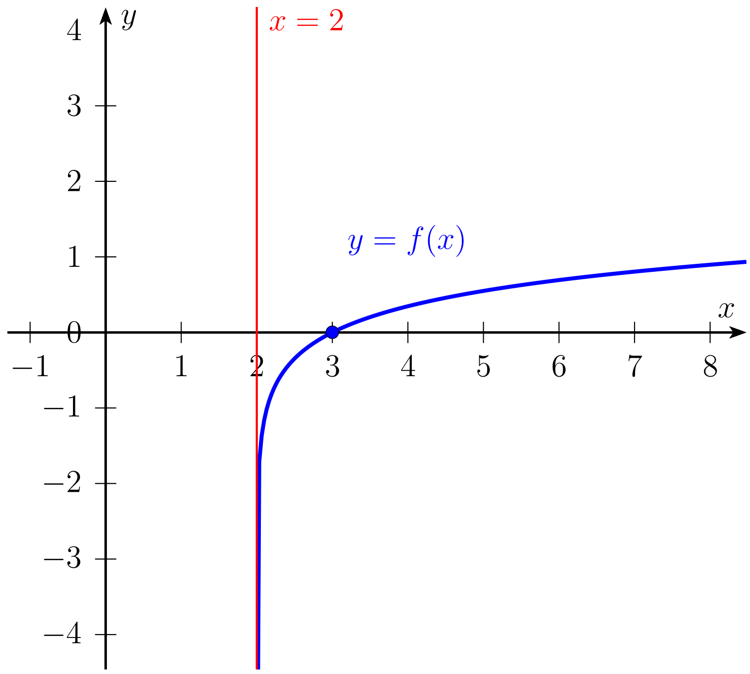
asymptote verticale en $x = 2$ (à gauche de la courbe)

pas d'AH

$f'(x) = \dfrac{1}{2(x-2)} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

x		2	
$f'(x)$	//////		$+$
$f(x)$	//////		$\nearrow$

$\Rightarrow$ pas d'extremum



3.25

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

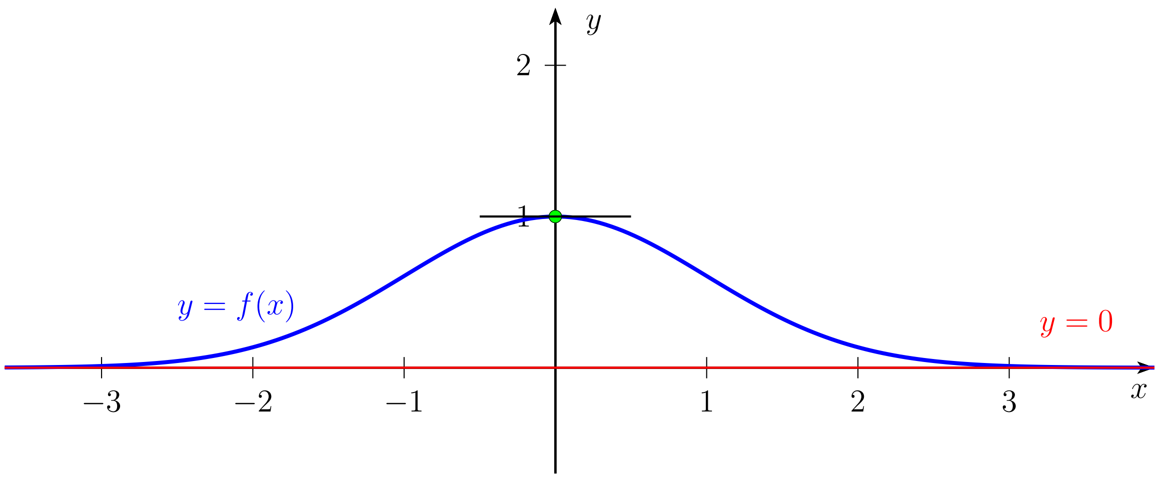
x	
$f(x)$	$+$

AH : $y = 0$

$f'(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

maximum : $(0;1)$



b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow \quad ED(f) = \mathbb{R}^*$

zéro de f : $2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

x		0		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = -\infty \quad \Rightarrow \text{AV} : x = 0$$

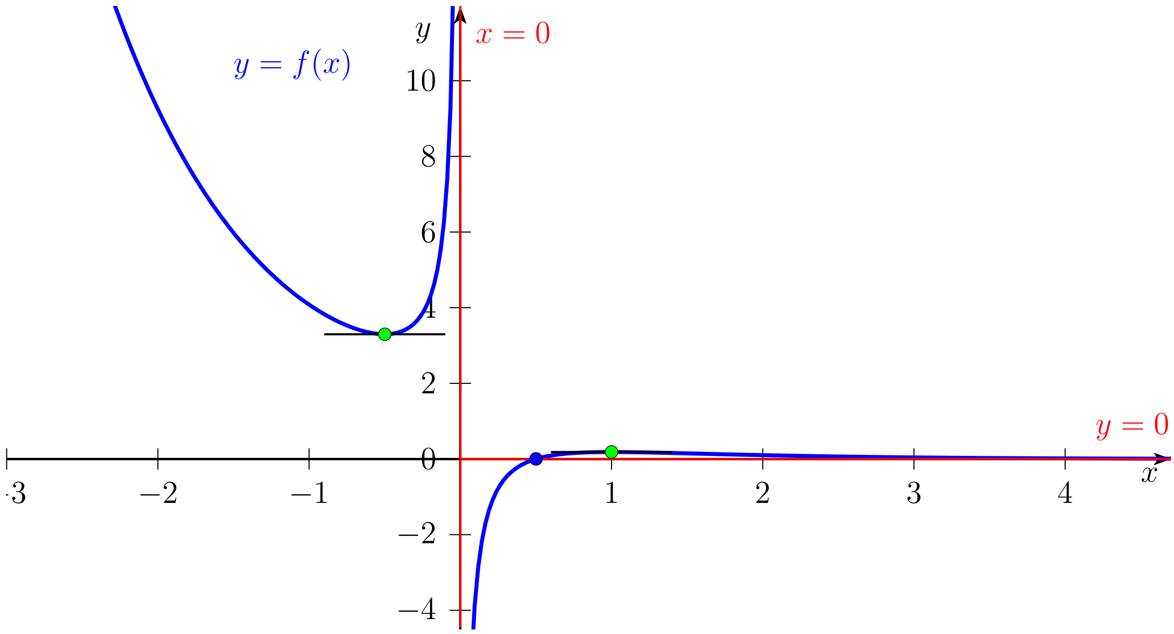
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \text{AH} : y = 0 \ (x \to +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{2}{4x^2} \cdot e^{-x} - \frac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x} = \left(\frac{-2x^2+x+1}{2x^2}\right) \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow \quad ED(f') = ED(f)$$

zéros de f' : $2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1$

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

minimum : $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\sqrt{e}\right)$ et maximum : $\left(1; \dfrac{1}{2e}\right)$



Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions LEP, 1998.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 25 *: Fundamentum de mathématique : Analyse*, Editions du Tricorne, 1997.

[3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2005.

[4] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P loisirs et Pédagogie, 1980.

[5] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P loisirs et Pédagogie, 1980.

[6] G. Ouellet, *: Calcul 1 (calcul différentiel)*, Editions Le Griffon d'Argile, 1999.

[7] Deborah Hughes-Hallet et Andrew M Gleason, Traduction française de Michel Beaudin *: Fonctions d'une variable*, Editions Mc Graw-Hill, 1999.

[8] E. W. Swokowski *: Analyse*, Editions De Boeck, 2000.

[9] Robert A. Adams, Traduction de Christophe Soland *: Analyse*, Gymnase du Bugnon, 1988.

[10] Stewart James, *: Analyse, concepts et contextes, volume 1, fonctions d'une variable*, Editions de Boeck, 3ème édition, 2006.

[11] G. Ouellet, *: Calcul 2 (calcul différentiel),* Editions Le Griffon d'Argile, 2000.

[12] Francis Calame, *: Analyse, cours et exercices* CESSEV, 1995.

[13] Luc Amyotte, *: Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.

[14] André Waser, *: Analyse 3*, Gymnase de Burier, 2015.

[15] Luc Amyotte, *: Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.

[16] Hubert Bovet, Mireille Cherix *: Géométrie, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998.

[17] Hubert Bovet, *: Analyse, cours et exercices*, Editions Polymath, 1999.

[18] Monographie de la commission romande de mathématique 26 *: Fundamentum de mathématique : Probabilités*, Editions du Tricorne, 2005.