Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

6.1 Les fonctions trigonométriques

Dans un système d'axes Oxy, rappelons que le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

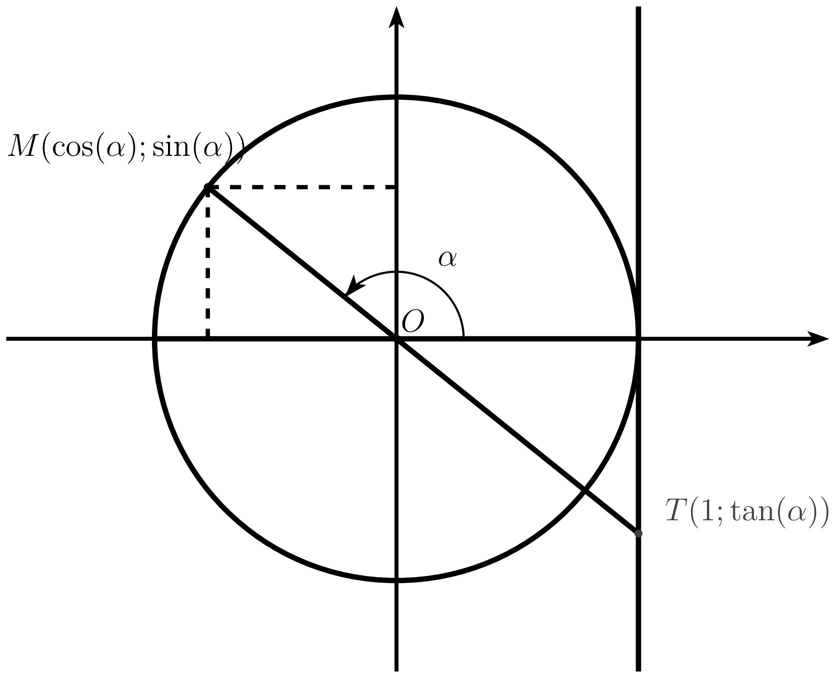
Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α (degrés ou radians) avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

6.1.1 Fonctions trigonométriques

cos($\boldsymbol{\alpha}$) :
1[ère] coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

sin($\boldsymbol{\alpha}$) :
2[e] coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

tan($\boldsymbol{\alpha}$) :
2[e] coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 6.1.

a) Lorsque α est compris entre 0°et 90°, on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.

b) Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.

Exemple 6.1.

Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des deux angles α suivants à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

a) $\alpha_1 = 130°$

b) $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6}$

6.1.2 Périodicité

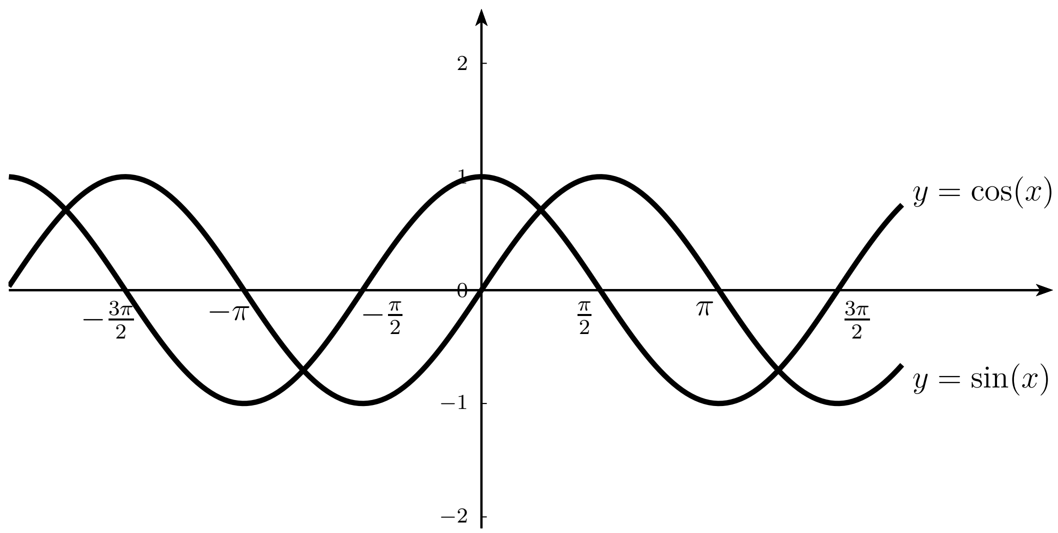
- $\sin(\alpha) \in [-1;1]$, $\cos(\alpha) \in [-1;1]$ et $\tan(\alpha) \in]-\infty;+\infty[$.
- Les fonctions trigonométriques sont **périodiques** :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)

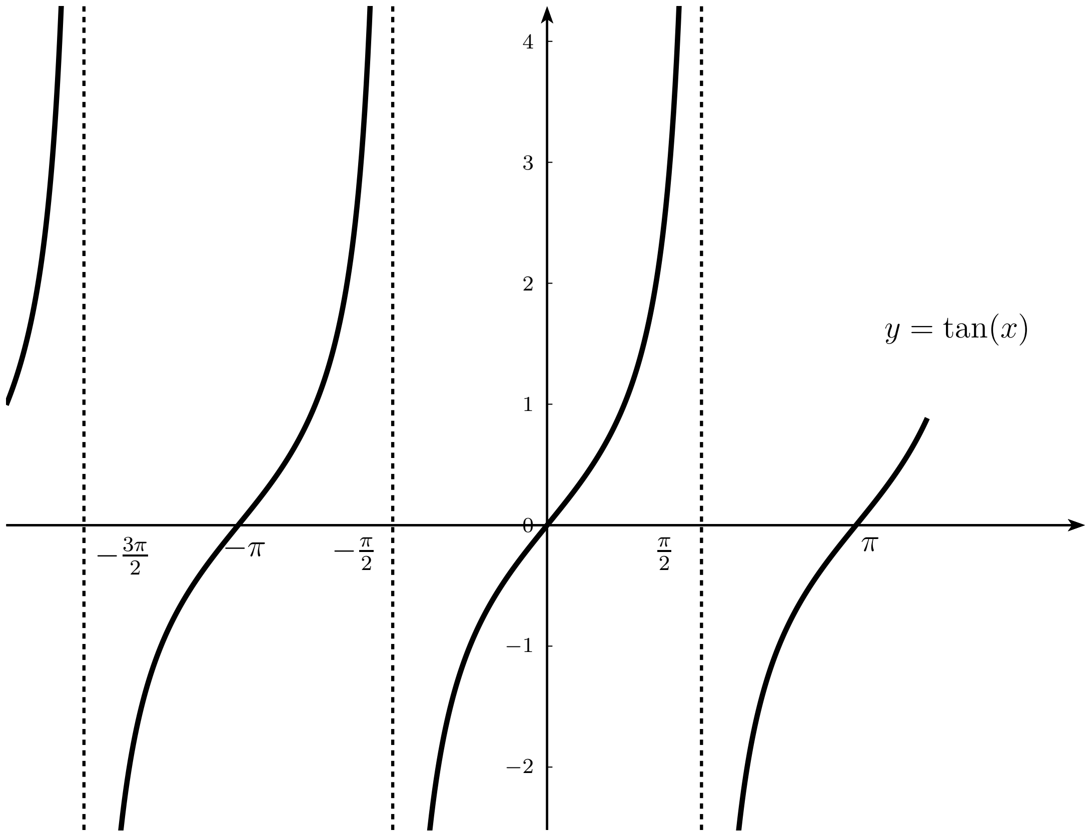
Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .



$$\begin{array}{rcccc} \sin & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

Graphe de la fonction tangente (en radians)

La fonction tangente est **périodique de période $\boldsymbol{\pi}$**.



$$\begin{array}{rcl} \tan \quad : \quad \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

6.1.3 Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

6.2 Equations trigonométriques

Une **équation trigonométrique** est une équation contenant des expressions trigonométriques.

Exemple 6.2.

a) Résoudre en degrés l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

b) Résoudre en radians l'équation $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) Résoudre en radians l'équation $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) Résoudre en radians l'équation $2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 5 = 4$

e) Résoudre en radians l'équation $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

6.3 Dérivée des fonctions trigonométriques (en radians)

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

Remarque 6.2.

Si la variable d'une fonction trigonométrique est donnée en degrés, sa dérivée n'est pas égale à celle énoncée ci-dessus.

Exemple 6.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(3x)}$

b) $g(x) = \sin(x)\cos(x)$

6.4 Etude d'une fonction trigonométrique

Plan d'étude d'une fonction f trigonométrique

a) Recherche de $ED(f)$.

b) Périodicité et choix d'un intervalle d'étude I couvrant une période.

c) Signe et zéros de f sur I.

d) Dérivée première de $f, ED(f')$. Signe et zéros de f'. Tableau de croissance de f sur I.

e) Graphe de f sur I.

Exemple 6.4.

Etudier la fonction f donnée par $f(x) = 1 + 2\cos(2x)$.

6.5 Exercices

6.1

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\tan(t) = -0.754$

d) $\cos(t) = -1.43$

e) $\tan(t) = 5.33$

f) $\sin(3\,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\tan(5\,t) = 3.273$

h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

6.2

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(\frac{2\,t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $2\cos(t) + 1 = 0$

d) $4\sin^2(x) - 3 = 0$

e) $(\sin(x) - 1)\cos(x) = 0$

f) $\sqrt{3} + 2\sin(3x) = 0$

6.3

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $4\,\cos^2(t) - 4\,\cos(t) - 3 = 0$

b) $2\,\sin^2(x) - 3\,\sin(x) + 1 = 0$

c) $3\,\sin^2(z) + 8\,\cos(z) + 1 = 0$

d) $3\,\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

e) $5\,\sin(x) = 6\,\cos^2(x)$

f) $\tan^4(t) - 4\,\tan^2(t) + 3 = 0$

6.4

De nombreuses populations animales fluctuent selon un cycle de 10 ans. Supposons que le nombre de lapins dans une région à l'instant t (en années) soit donné (la fonction cos est en radians) par

$$N(t) = 1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$$

a) Vérifier par calculs que le cycle de fluctuation de la population est bien de 10 ans.

b) Représenter graphiquement N pour $t \in [0;10]$.

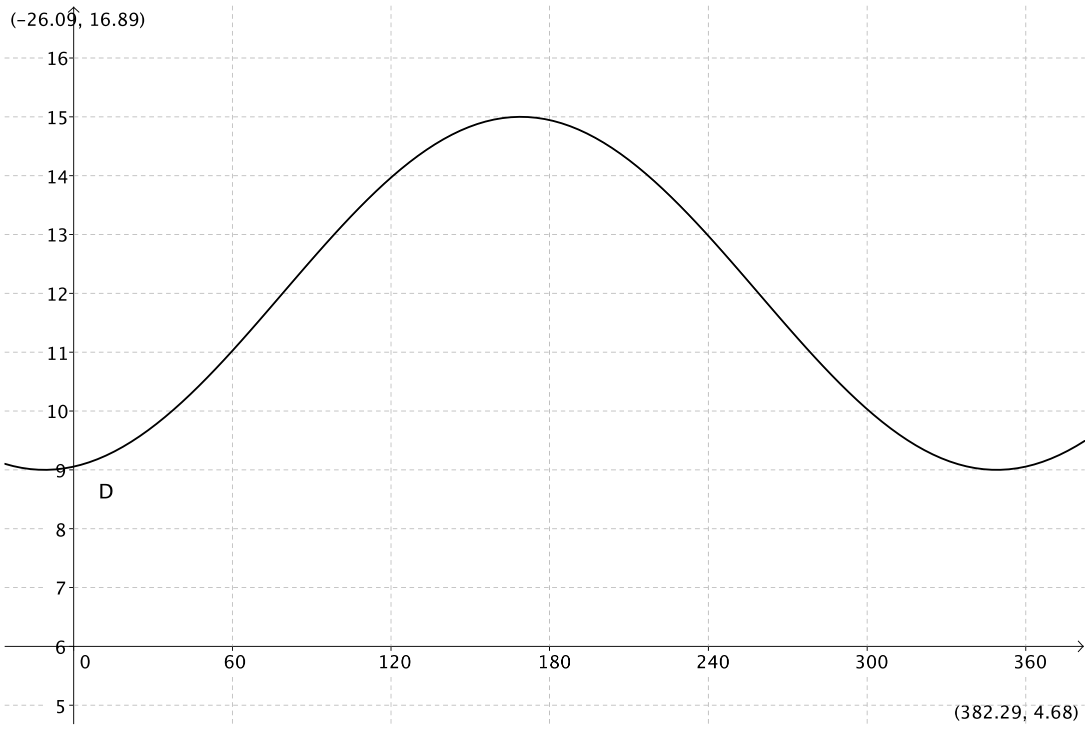
c) Pour quelles valeurs de t dans l'intervalle $[0;10]$ a-t-on une population supérieure ou égale à 4500 ?

6.5

A Boston, le nombre d'heures D de lumière par jour à une certaine époque de l'année peut être modélisé par

$$D(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{180}(t-79)\right) + 12$$

où t est donné en jours et $t = 1$ correspond au 1^{er} janvier (année de 360 jours, voir le graphe page suivante)



a) Pendant combien de jours par année a-t-on plus de 10,5 heures de lumière ? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.

b) Quel est le nombre maximal d'heure de lumière et à quel jour a-t-on ce maximum ? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.

6.6

On peut prédire la hauteur (en mètres, relativement à la marée basse) de la marée à un endroit précis d'une plage par la fonction $h(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-1)\right)$, où t est en heures ($t = 0$ à minuit et $0 \leq t \leq 24$).

a) Calculer la hauteur (au cm près) à minuit et à 15 heures.

b) Déterminer l'heure de la marée basse.

c) Déterminer la hauteur maximale et l'heure de cette marée haute.

d) Dans un autre endroit du bord de mer, la hauteur de la marée vaut
$g(t) = 0.8 + 0.8\sin(a(t-2))$
où a est un paramètre réel. Déterminer la valeur de a si l'on sait que la marée haute a lieu à 10 heures. Quelle est cette hauteur maximale ?

6.7

Donner l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions f données par :

a) $f(x) = \sin(2x)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

c) $f(x) = \sin^2(x)$

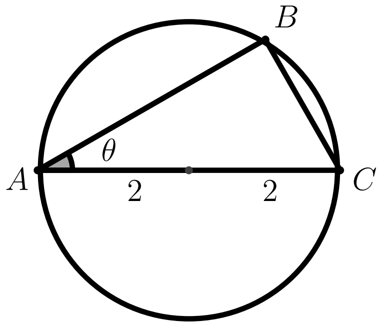
d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \sin^3(4x)$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

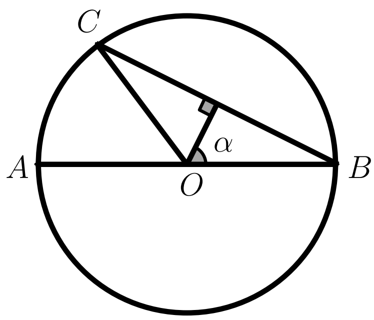
6.8

Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Elle souhaite atteindre le point B, en barque, à la vitesse moyenne de 2 km/h, puis le point C, diamétralement opposé à A, à pied, à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Calculer la valeur de θ lui permettant de rejoindre C le plus lentement possible (Madame aime prendre son temps !).
Calculer également la distance parcourue.



6.9

007 court deux fois plus vite (8 m/s) qu'il ne nage (4 m/s). Il se trouve en A, au bord d'une piscine circulaire de 40 m de diamètre. Il lui reste neuf secondes pour désamorcer la bombe posée en B qu'il désire atteindre au plus vite. Sa stratégie est de courir jusqu'en C, de piquer une tête et de crawler en ligne droite B. A quel endroit doit-il plonger ?



6.10

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = 1 - 2\sin(x)$$

6.11

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = \sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)$$

6.6 Réponses

6.1

a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°$, $t_2 = -120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 \cong 56° + k \cdot 360°$, $t_2 \cong 124° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

c) $t \cong -37° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

d) Pas de solution

e) $t \cong 79.4° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -20° + k \cdot 120°$, $t_2 = 80° + k \cdot 120°, k \in \mathbb{Z}$

g) $t \cong 14.6° + k \cdot 36°, k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 240° + k \cdot 720°$, $t_2 = -240° + k \cdot 720°, k \in \mathbb{Z}$

6.2

a) $t_1 = k \cdot 3\,\pi$, $t_2 = \frac{3\,\pi}{4} + k \cdot 3\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\,\pi$, $t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\,\pi$, $t_2 = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

6.3

a) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $z = \pm 2.016 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = 0.730 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 2.412 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

6.4

c) $[0; \frac{5}{3}] \cup [\frac{25}{3}; 10]$

6.5

a) 240 jours ; b) nombre maximal de 15 heures le $169^{\text{ème}}$ jour.

6.6

a) 74 cm à minuit et 50 cm à 15 heures

b) 19 heures

c) 7 heures ; 2 m

d) $a = \frac{\pi}{16}$; 1.6 m

6.7

a) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2\cos(2x)$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
$f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

c) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

d) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2\cos^2(x) - 1$

e) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 12\sin^2(4x)$

f) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
$f'(x) = \dfrac{1}{1 + \cos(x)}$

6.8

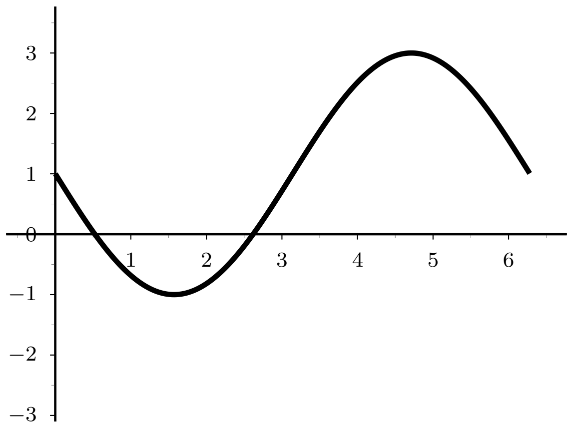
θ=30 ° et la distance parcourue est de 5.56 km

6.9

007 ferait mieux de faire le tour du bassin au lieu de réfléchir. . .

6.10

$ED(f) : \mathbb{R}$
f est de période 2π.
Etude de f sur $[0; 2\pi]$
Asymptote : aucune
$f'(x) = -2\cos(x)$
$ED(f) = ED(f')$
Max : $M(\frac{3\pi}{2}; 3)$
Min : $M(\frac{\pi}{2}; -1)$



6.11

$ED(f) : \mathbb{R}$
f est de période 2π.
Etude de f sur $[0; 2\pi]$
Asymptote : aucune
$f'(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$
$ED(f) = ED(f')$
Max : $M(\frac{5\pi}{6}; 2)$
Min : $M(\frac{11\pi}{6}; -2)$