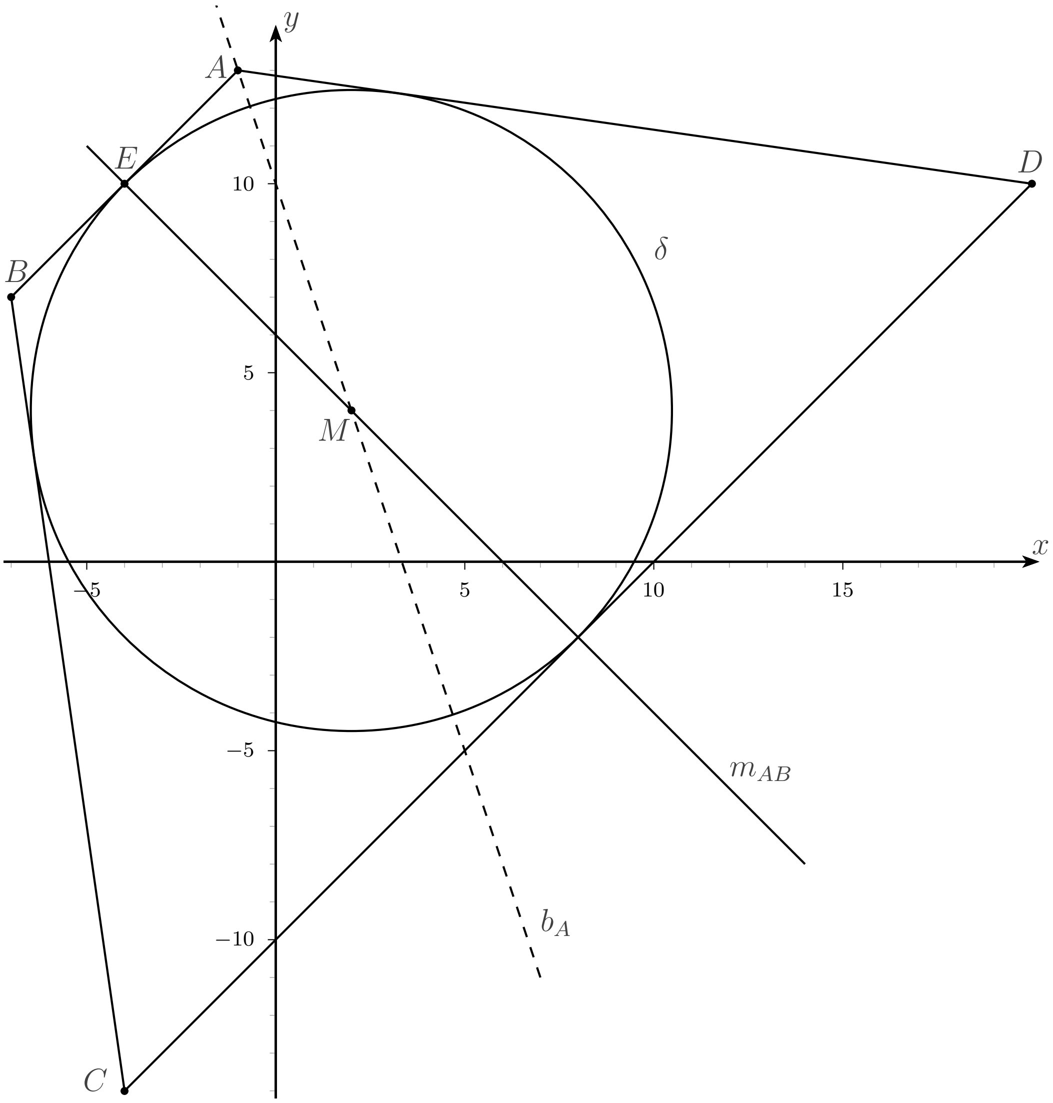
Exercice 3.22.



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,[\mathrm{u}]$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}\,[\mathrm{u}]$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{CD}|| = \sqrt{1152} = 24\sqrt{2}\,[\mathrm{u}]$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{AD}|| = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}\,[\mathrm{u}]$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD} \Rightarrow AB//CD$ et $||\overrightarrow{BC}|| = ||\overrightarrow{AD}|| \Rightarrow$

$ABCD$ a une seule paire de côtés parallèles et une seule autre paire de côtés isométriques, donc $ABCD$ est un trapèze isocèle.

b) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB) : x - y + c = 0$ passe par $A(-1\,;13) \Rightarrow -1 - 13 + c = 0 \iff$

$\iff -14 + c = 0 \iff c = 14 \Rightarrow (AB) : x - y + 14 = 0$

• $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $AD \Rightarrow$

$\Rightarrow (AD) : 3x + 21y + c = 0$ passe par $A(-1\,;13) \Rightarrow 3 \cdot (-1) + 21 \cdot 13 + c = 0 \iff$

$\iff 270 + c = 0 \iff c = -270 \Rightarrow (AD) : 3x + 21y - 270 = 0$

• bissectrices : $\dfrac{x - y + 14}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \pm \dfrac{3x + 21y - 270}{\sqrt{3^2 + 21^2}}$

$\Rightarrow (b_A) : 3x + y - 10 = 0\ ;\ (b'_A) : x - 3y + 40 = 0$ ne convient pas (pente > 0)

c) • milieu de AB : $E(-4\,;10)$

• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $m_{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow (m_{AB}) : x + y + c = 0$ passe par $E(-4\,;10) \Rightarrow -4 + 10 + c = 0 \iff$

$\iff 6 + c = 0 \iff c = -6 \Rightarrow (m_{AB}) : x + y - 6 = 0$

• $b_A \cap m_{AB} = M$:

$$\begin{cases} 3x + y - 10 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y - 10 = 0 \\ -x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \iff x = 2$$

et $2 + y - 6 = 0 \iff y = 4 \Rightarrow M(2\,;4)$

d) • $\delta(M; AB) = \dfrac{|2 - 4 + 14|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\,[\text{u}]$

• $\delta(M; AD) = \dfrac{|3 \cdot 2 + 21 \cdot 4 - 270|}{\sqrt{3^2 + (-21)^2}} = \dfrac{|-180|}{\sqrt{450}} = \dfrac{180}{15\sqrt{2}} = \dfrac{180\sqrt{2}}{30} = 6\sqrt{2}\,[\text{u}]$

• le cercle δ est de centre $M(2\,;4)$ et de rayon $r = 6\sqrt{2}\,[\text{u}]$

$\Rightarrow \boxed{(\delta) : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 72}$