Géométrie analytique - ch.3 : le cercle dans le plan

	Série A	Série B
Exercice 1. (2+2+4=8 pts)		
a)	$(\gamma) : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$	$(\gamma) : x^2 + y^2 - 8x + 10y + 32 = 0$
	$\Rightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 - 16 - 25 + 32 = 0$	$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+5)^2 - 16 - 25 + 32 = 0$
	$\Rightarrow$ Centre $C(-4\,;5)$ et rayon $r = 3\,[u]$.	$\Rightarrow$ Centre $C(4\,;-5)$ et rayon $r = 3\,[u]$.
b)	$\lvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\rvert = \lvert\lvert \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rvert\rvert = \sqrt{10}\,[u] > 3\,[u]$	$\lvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\rvert = \lvert\lvert \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rvert\rvert = \sqrt{10}\,[u] > 3\,[u]$
	$\Rightarrow$ Le point $A(-7\,;6)$ est à l'extérieur de γ.	$\Rightarrow$ Le point $A(7\,;-1)$ est à l'extérieur de γ.
c)	$x = 2y - 8$ et substitution dans γ	$x = 2y + 8$ et substitution dans γ
	$\Rightarrow 5y^2 - 26y + 32 = 0$	$\Rightarrow 5y^2 + 26y + 32 = 0$
	$\Rightarrow d \cap \gamma$ donne $D(-4\,;2)$ et $E\left(-\frac{8}{5}\,;\frac{16}{5}\right)$	$\Rightarrow d \cap \gamma$ donne $D(4\,;-2)$ et $E\left(\frac{8}{5}\,;-\frac{16}{5}\right)$

Exercice 2. (2+3+2=7 pts)

a) $(\gamma) : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

$\Rightarrow$ Centre $C(3\,;-2)$ et de rayon $r = 5\,[u]$.

$(d) : 4x - 3y - 43 = 0$

$\Rightarrow \delta(C;d) = \dfrac{|4\cdot 3 - 3\cdot(-2) - 43|}{5} = \dfrac{|-25|}{5} = \dfrac{25}{5} = 5\,[u] = r$

$\Rightarrow$ La droite d est tangente au cercle γ.

b) • $F \in \gamma$ car ...

• par dédoublement :

$(6-3)(x-3) + (-6+2)(y+2) - 25 = 0$

$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y - 42 = 0$

autre méthode :

$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp t_1$ (vecteur normal) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y + c = 0$ par F $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y - 42 = 0$

c) par formule :

$m = \frac{4}{3} :\ y + 2 = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{(\frac{4}{3})^2 + 1}$

$\Rightarrow (t_2) : 4x - 3y + 7 = 0$

autre méthode :

$\delta(C;t_2) = \dfrac{|4\cdot 3 - 3\cdot(-2) + c|}{5} = 5 = r \Rightarrow$

$\Rightarrow |18 + c| = 25 \Rightarrow c = 7$ (ou $c = -43$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_2) : 4x - 3y + 7 = 0$

$(\gamma) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

$\Rightarrow$ Centre $C(3\,;2)$ et de rayon $r = 5\,[u]$.

$(d) : 4x + 3y - 43 = 0$

$\Rightarrow \delta(C;d) = \dfrac{|4\cdot 3 + 3\cdot 2 - 43|}{5} = \dfrac{|-25|}{5} = \dfrac{25}{5} = 5\,[u] = r$

$\Rightarrow$ La droite d est tangente au cercle γ.

• $F \in \gamma$ car ...

• par dédoublement :

$(7-3)(x-3) + (-1-2)(y-2) - 25 = 0$

$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y - 31 = 0$

autre méthode :

$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \perp t_1$ (vecteur normal) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y + c = 0$ par F $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y - 31 = 0$

par formule :

$m = -\frac{4}{3} :\ y - 2 = -\frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{(-\frac{4}{3})^2 + 1}$

$\Rightarrow (t_2) : 4x + 3y + 7 = 0$

autre méthode :

$\delta(C;t_2) = \dfrac{|4\cdot 3 + 3\cdot 2 + c|}{5} = 5 = r \Rightarrow$

$\Rightarrow |18 + c| = 25 \Rightarrow c = 7$ (ou $c = -43$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_2) : 4x + 3y + 7 = 0$

Exercice 3. (2+3=5 pts)

a) $(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_1(0\,;0)$ et de rayon $r_1 = 3\,[u]$

$(\gamma_2) : (x-8)^2 + (y-6)^2 - 169 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_2(8\,;6)$ et de rayon $r_2 = 13\,[u]$

$\Rightarrow ||\overrightarrow{C_1C_2}|| = || \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} || = 10\,[u] = r_2 - r_1$

$\Rightarrow C_1$ et C_2 sont tangents intérieurement.

b) $\star\ (C_1C_2) : 3x - 4y = 0$

$\star\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = T$:
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 - 169 = 0 \end{cases} \iff$
$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 & |\cdot(-1) \\ x^2 + y^2 - 16x - 12y - 69 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow 16x + 12y + 60 = 0 \iff$
$\iff (t) : 4x + 3y + 15 = 0$
tangente commune t par T

$\star\ t \cap C_1C_2 = T$:
$\begin{cases} 4x + 3y + 15 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \iff 25x = -60$
$\iff x = -12/5$ et $y = -9/5$

$\Rightarrow T\left(-\dfrac{12}{5}\,;-\dfrac{9}{5}\right)$

<u>autre méthode</u> :

$y = \frac{-4x-15}{3}$ et substitution dans γ_1

$\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 = T\left(-\dfrac{12}{5}\,;-\dfrac{9}{5}\right)$

$(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_1(0\,;0)$ et de rayon $r_1 = 6\,[u]$

$(\gamma_2) : (x-6)^2 + (y-8)^2 - 256 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_2(6\,;8)$ et de rayon $r_2 = 16\,[u]$

$\Rightarrow ||\overrightarrow{C_1C_2}|| = || \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} || = 10\,[u] = r_2 - r_1$

$\Rightarrow C_1$ et C_2 sont tangents intérieurement.

$\star\ (C_1C_2) : 4x - 3y = 0$

$\star\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = T$:
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 - 256 = 0 \end{cases} \iff$
$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0 & |\cdot(-1) \\ x^2 + y^2 - 12x - 16y - 156 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow 12x + 16y + 120 = 0 \iff$
$\iff (t) : 3x + 4y + 30 = 0$
tangente commune t par T

$\star\ t \cap C_1C_2 = T$:
$\begin{cases} 3x + 4y + 30 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \iff 25x = -90$
$\iff x = -18/5$ et $y = -24/5$

$\Rightarrow T\left(-\dfrac{18}{5}\,;-\dfrac{24}{5}\right)$

<u>autre méthode</u> :

$y = \frac{-3x-30}{4}$ et substitution dans γ_1

$\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 = T\left(-\dfrac{18}{5}\,;-\dfrac{24}{5}\right)$