Géométrie analytique - ch.3 : le cercle dans le plan

Série A

Série B

Exercice 1. (2+2+4=8 pts)

a) $(\gamma) : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$

$$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 5)^2 - 16 - 25 + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Centre } C(-4; 5) \text{ et rayon } r = 3 [u].$$

b) $\|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10} [u] > 3 [u]$

$\Rightarrow$ Le point $A(-7; 6)$ est à l'extérieur de γ .

c) $x = 2y - 8$ et substitution dans γ

$$\Rightarrow 5y^2 - 26y + 32 = 0$$

$$\Rightarrow d \cap \gamma \text{ donne } D(-4; 2) \text{ et } E\left(-\frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right)$$

$(\gamma) : x^2 + y^2 - 8x + 10y + 32 = 0$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 - 16 - 25 + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Centre } C(4; -5) \text{ et rayon } r = 3 [u].$$

b) $\|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10} [u] > 3 [u]$

$\Rightarrow$ Le point $A(7; -1)$ est à l'extérieur de γ .

$x = 2y + 8$ et substitution dans γ

$$\Rightarrow 5y^2 + 26y + 32 = 0$$

$$\Rightarrow d \cap \gamma \text{ donne } D(4; -2) \text{ et } E\left(\frac{8}{5}; -\frac{16}{5}\right)$$

Exercice 2. (2+3+2=7 pts)

$$a) (\gamma) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$\Rightarrow$ Centre $C(3; -2)$ et de rayon $r = 5 [u]$.

$$(d) : 4x - 3y - 43 = 0$$

$$\Rightarrow \delta(C; d) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) - 43|}{5} = \frac{|-25|}{5} = 5 [u] = r$$

$\Rightarrow$ La droite d est tangente au cercle γ .

b) • $F \in \gamma$ car ...

• par dédoublement :

$$(6 - 3)(x - 3) + (-6 + 2)(y + 2) - 25 = 0$$

$$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y - 42 = 0$$

autre méthode :

$$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp t_1 \text{ (vecteur normal)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y + c = 0 \text{ par } F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_1) : 3x - 4y - 42 = 0$$

c) par formule :

$$m = \frac{4}{3} : y + 2 = \frac{4}{3}(x - 3) \pm 5\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (t_2) : 4x - 3y + 7 = 0$$

autre méthode :

$$\delta(C; t_2) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + c|}{5} = 5 = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |18 + c| = 25 \Rightarrow c = 7 \text{ (ou } c = -43) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_2) : 4x - 3y + 7 = 0$$

$$(\gamma) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$\Rightarrow$ Centre $C(3; 2)$ et de rayon $r = 5 [u]$.

$$(d) : 4x + 3y - 43 = 0$$

$$\Rightarrow \delta(C; d) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 43|}{5} = \frac{|-25|}{5} = \frac{25}{5} = 5 [u] = r$$

$\Rightarrow$ La droite d est tangente au cercle γ .

• $F \in \gamma$ car ...

• par dédoublement :

$$(7 - 3)(x - 3) + (-1 - 2)(y - 2) - 25 = 0$$

$$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y - 31 = 0$$

autre méthode :

$$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \perp t_1 \text{ (vecteur normal)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y + c = 0 \text{ par } F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_1) : 4x - 3y - 31 = 0$$

par formule :

$$m = -\frac{4}{3} : y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 3) \pm 5\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (t_2) : 4x + 3y + 7 = 0$$

autre méthode :

$$\delta(C; t_2) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + c|}{5} = 5 = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |18 + c| = 25 \Rightarrow c = 7 \text{ (ou } c = -43) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_2) : 4x + 3y + 7 = 0$$

Exercice 3. (2+3=5 pts)

a) $(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_1(0; 0)$ et de rayon $r_1 = 3[u]$

$(\gamma_2) : (x - 8)^2 + (y - 6)^2 - 169 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_2(8; 6)$ et de rayon $r_2 = 13[u]$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 10[u] = r_2 - r_1$

 $\Rightarrow C_1$ et C_2 sont tangents intérieurement.

b) $\star (C_1C_2) : 3x - 4y = 0$

$\star \gamma_1 \cap \gamma_2 = T :$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ (x - 8)^2 + (y - 6)^2 - 169 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 & | \cdot (-1) \\ x^2 + y^2 - 16x - 12y - 69 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 16x + 12y + 60 = 0 \iff$

$\iff (t) : 4x + 3y + 15 = 0$

tangente commune t par T

$\star t \cap C_1C_2 = T :$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 15 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \iff 25x = -60$$

$\iff x = -12/5$ et $y = -9/5$

$\Rightarrow T \left(-\frac{12}{5}; -\frac{9}{5} \right)$

autre méthode :

$y = \frac{-4x-15}{3}$ et substitution dans γ_1

$\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 = T \left(-\frac{12}{5}; -\frac{9}{5} \right)$

$(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_1(0; 0)$ et de rayon $r_1 = 6[u]$

$(\gamma_2) : (x - 6)^2 + (y - 8)^2 - 256 = 0$

$\Rightarrow$ Centre $C_2(6; 8)$ et de rayon $r_2 = 16[u]$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = 10[u] = r_2 - r_1$

 $\Rightarrow C_1$ et C_2 sont tangents intérieurement.

$\star (C_1C_2) : 4x - 3y = 0$

$\star \gamma_1 \cap \gamma_2 = T :$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0 \\ (x - 6)^2 + (y - 8)^2 - 256 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0 & | \cdot (-1) \\ x^2 + y^2 - 12x - 16y - 156 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 12x + 16y + 120 = 0 \iff$

$\iff (t) : 3x + 4y + 30 = 0$

tangente commune t par T

$\star t \cap C_1C_2 = T :$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 30 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \iff 25x = -90$$

$\iff x = -18/5$ et $y = -24/5$

$\Rightarrow T \left(-\frac{18}{5}; -\frac{24}{5} \right)$

autre méthode :

$y = \frac{-3x-30}{4}$ et substitution dans γ_1

$\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 = T \left(-\frac{18}{5}; -\frac{24}{5} \right)$