Analyse ch.6 : Fonctions trigonométriques et ch.5(2) Optimisation

Série A	Série B

Exercice 1. (3 pts)

Série A	Série B
a) $\sin(135^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(135^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1$	$\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = 1$
c) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2. (3 pts)

Série A	Série B
$\cos(5t) = \cos(120^\circ) = \cos(240^\circ)$	$\cos(5t) = \cos(135^\circ) = \cos(225^\circ)$
1)$\Rightarrow 5t = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$	1)$\Rightarrow 5t = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow t_1 = 24^\circ + k \cdot 72^\circ, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow t_1 = 27^\circ + k \cdot 72^\circ, k \in \mathbb{Z}$
2)$\Rightarrow 5t = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$	2)$\Rightarrow 5t = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow t_2 = 48^\circ + k \cdot 72^\circ, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow t_2 = 45^\circ + k \cdot 72^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. (4 pts)

Série A	Série B
$\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$
1)$\Rightarrow \dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$	1)$\Rightarrow \dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \dfrac{t}{2} = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow \dfrac{t}{2} = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow t_1 = k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow t_1 = k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$
2)$\Rightarrow \dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$	2)$\Rightarrow \dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \dfrac{t}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow \dfrac{t}{2} = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow t_2 = \pi + k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Rightarrow t_2 = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4. (1+2=3 pts + BONUS)

a) $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$

b) $g'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$g'(x) = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

Exercice 5. (3+4=7 pts)

a) $y =$ hauteur de la caisse.

coût : $40 \cdot x^2 + 20 \cdot 4xy + 20 \cdot x^2 = 320.-$

$\Rightarrow y \cdot 80x = 320 - 60x^2$

$\Rightarrow y = \dfrac{16 - 3x^2}{4x}$

$V(x;y) = x^2 \cdot y \Rightarrow V(x) = \dfrac{16x - 3x^3}{4}$ $(x > 0)$

b) $\Rightarrow V'(x) = \dfrac{16 - 9x^2}{4} = \dfrac{(4+3x)(4-3x)}{4}$

$\Rightarrow Z_{V'} = \left\{ -\dfrac{4}{3} \,;\, \dfrac{4}{3} \right\}$ Attention : $-4/3 \notin ED$

x	$-4/3$	0		$4/3$	
sgn(V')		$\Vert$	$+$	0	$-$
var. de V		$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$x = \dfrac{4}{3} \iff y = 2$

Le volume de la caisse est maximal avec les dimensions :

$$\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times 2 \text{ [m]}$$

$y =$ hauteur de la caisse.

coût : $40 \cdot x^2 + 20 \cdot 4xy + 20 \cdot x^2 = 500.-$

$\Rightarrow y \cdot 80x = 500 - 60x^2$

$\Rightarrow y = \dfrac{25 - 3x^2}{4x}$

$V(x;y) = x^2 \cdot y \Rightarrow V(x) = \dfrac{25x - 3x^3}{4}$ $(x > 0)$

$\Rightarrow V'(x) = \dfrac{25 - 9x^2}{4} = \dfrac{(5+3x)(5-3x)}{4}$

$\Rightarrow Z_{V'} = \left\{ -\dfrac{5}{3} \,;\, \dfrac{5}{3} \right\}$ Attention : $-5/3 \notin ED$

x	$-5/3$	0		$5/3$	
sgn(V')		$\Vert$	$+$	0	$-$
var. de V		$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$x = \dfrac{5}{3} \iff y = \dfrac{5}{2}$

Le volume de la caisse est maximal avec les dimensions :

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} \text{ [m]}$$
