Analyse ch.3 : Fonctions exponentielle et logarithme

Série A

Exercice 1. (3 pts)

$$\int_0^3 \frac{12x}{3x^2+5}\,dx = 2\int_0^3 \frac{6x}{3x^2+5}\,dx =$$

$$= 2\int_0^3 \frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5}\,dx =$$

$$= 2\left[\ln|3x^2+5|\right]_0^3 = 2[\ln(32)-\ln(5)] =$$

$$= 2\ln\left(\frac{32}{5}\right) \cong 3.71\ [\mathrm{u}^2]$$

• aussi possible par changement de variable :

$u = 3x^2+5 \Rightarrow du = 6x\cdot dx$

$$2\int_0^3 \frac{6x}{3x^2+5}\,dx = 2\int_5^{32} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= 2\left[\ln|u|\right]_5^{32} = 2[\ln(32)-\ln(5)] =$$

$$= 2\ln\left(\frac{32}{5}\right) \cong 3.71\ [\mathrm{u}^2]$$

Série B

$$\int_0^2 \frac{12x}{2x^2+5}\,dx = 3\int_0^2 \frac{4x}{2x^2+5}\,dx =$$

$$= 3\int_0^2 \frac{(2x^2+5)'}{2x^2+5}\,dx =$$

$$= 3\left[\ln|2x^2+5|\right]_0^2 = 3[\ln(13)-\ln(5)] =$$

$$= 3\ln\left(\frac{13}{5}\right) \cong 2.87\ [\mathrm{u}^2]$$

• aussi possible par changement de variable :

$u = 2x^2+5 \Rightarrow du = 4x\cdot dx$

$$3\int_0^2 \frac{4x}{2x^2+5}\,dx = 3\int_5^{13} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= 3\left[\ln|u|\right]_5^{13} = 3[\ln(13)-\ln(5)] =$$

$$= 3\ln\left(\frac{13}{5}\right) \cong 2.87\ [\mathrm{u}^2]$$

Exercice 2. (1+1+3+2+2+2=11 pts)

$f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

a) $ED(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) $f(x) = 0 \iff e^x = 0 \Rightarrow Z_f = \emptyset$

x		-2	
$\text{sgn}(f)$	$-$	$\|$	$+$

c) • $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\<}} f(x) = "\dfrac{e^{-2}}{0_-}" = -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\>}} f(x) = "\dfrac{e^{-2}}{0_+}" = +\infty \Rightarrow \text{AV} : x = -2$

• $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = "\dfrac{0}{-\infty}" = 0 \Rightarrow \text{AHG} : y = 0$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ (pas d'AHD)

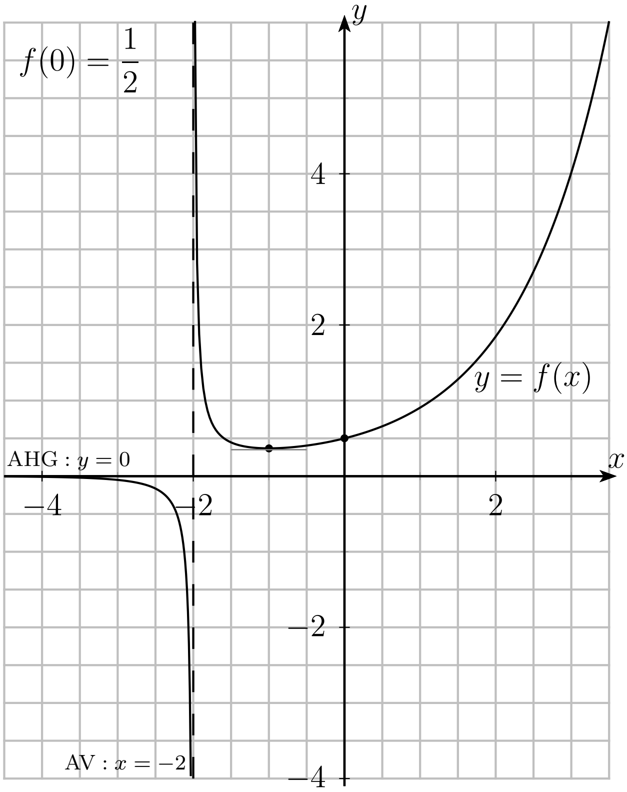
d) $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x+2) - e^x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x+1}{(x+2)^2} \cdot e^x$

e) • $Z_{f'} = \{-1\}$

x		-2		-1	
$\text{sgn}(f')$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	AV	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\text{Min}\left(-1\,;\frac{1}{e}\right)$

f)



$f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$

$ED(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = 0 \iff e^x = 0 \Rightarrow Z_f = \emptyset$

x		2	
$\text{sgn}(f)$	$-$	$\|$	$+$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = "\dfrac{e^{2}}{0_-}" = -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = "\dfrac{e^{2}}{0_+}" = +\infty \Rightarrow \text{AV} : x = 2$

• $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = "\dfrac{0}{-\infty}" = 0 \Rightarrow \text{AHG} : y = 0$

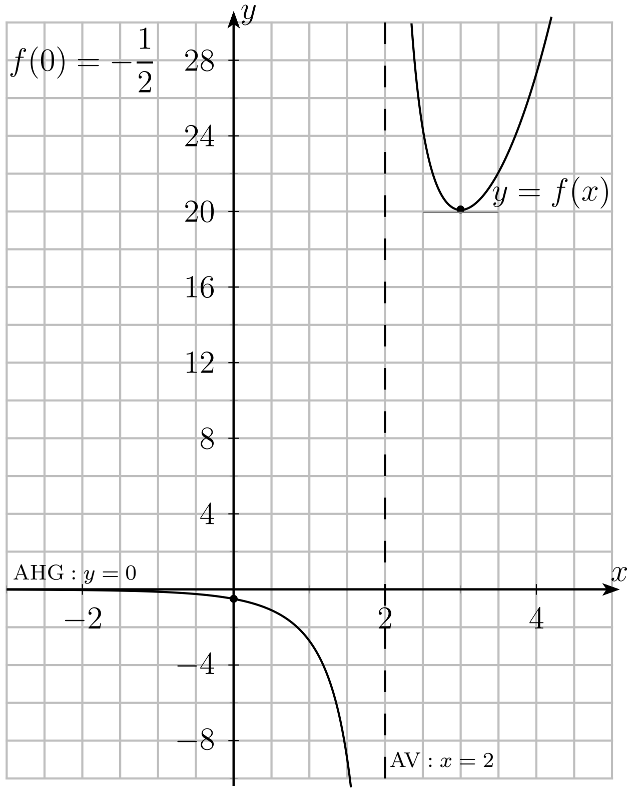
• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ (pas d'AHD)

$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x-2) - e^x \cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x-3}{(x-2)^2} \cdot e^x$

• $Z_{f'} = \{3\}$

x		2		3	
$\text{sgn}(f')$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	AV	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\text{Min}(3\,;e^3)$



Exercice 3. (2+2=4 pts)

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+4}{2x-1}\right)$$

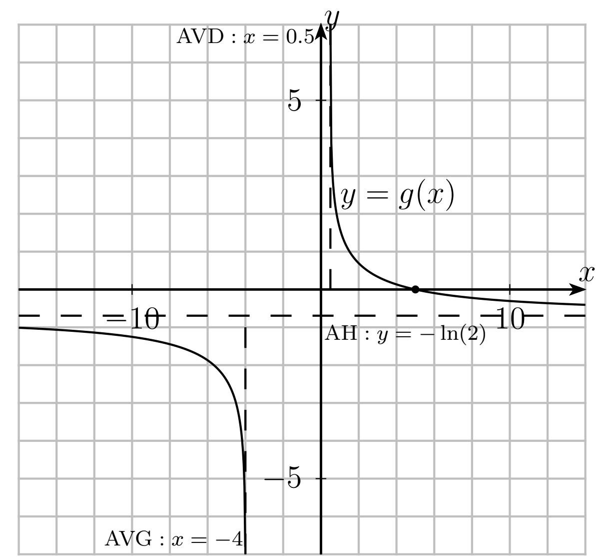
a) $\bullet \ \dfrac{x+4}{2x-1} > 0$

x		-4		0.5	
$\operatorname{sgn} \frac{x+4}{2x-1}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$\Rightarrow ED =]-\infty\,;-4[\,\cup\,]\tfrac{1}{2}\,;+\infty[$

b) $\bullet \ g(x) = 0 \iff \dfrac{x+4}{2x-1} = 1 \Rightarrow Z_g = \{5\}$

x		-4		0.5		5	
$\operatorname{sgn}(g)$	$-$	$\Vert$	//////////	$\Vert$	$+$	0	$-$



$$g(x) = \ln\left(\frac{x-4}{2x+1}\right)$$

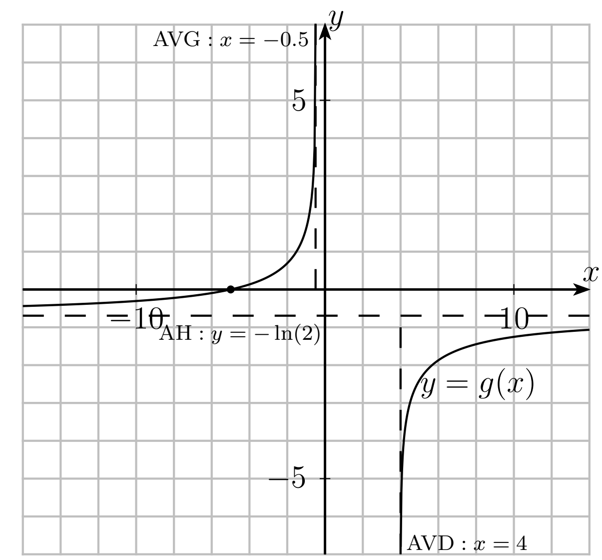
$\bullet \ \dfrac{x-4}{2x+1} > 0$

x		-0.5		4	
$\operatorname{sgn} \frac{x-4}{2x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow ED =]-\infty\,;-\tfrac{1}{2}[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

$\bullet \ g(x) = 0 \iff \dfrac{x-4}{2x+1} = 1 \Rightarrow Z_g = \{-5\}$

x		-5		-0.5		4	
$\operatorname{sgn}(g)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	//////////	$\Vert$	$-$



Exercice 4. (4 pts)

- point de tangence : $T(\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2)$
- dérivée : $h'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$
- pente : $m_{\mathrm{e}} = h'(\mathrm{e}) = 3\mathrm{e}$
- l'équation de la tangente (t) à la courbe $y = f(x)$ par T est :
  $(t) : y = 3\mathrm{e} \cdot x + h$ passe par $T(\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2)$

$\Rightarrow \mathrm{e}^2 = 3\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} + h \Rightarrow h = -2\mathrm{e}^2$
$\Rightarrow (t) : y = 3\mathrm{e} \cdot x - 2\mathrm{e}^2$

- point de tangence : $T(\mathrm{e}\,;2\mathrm{e}^2)$
- dérivée : $h'(x) = 4x \cdot \ln(x) + 2x$
- pente : $m_{\mathrm{e}} = h'(\mathrm{e}) = 6\mathrm{e}$
- l'équation de la tangente (t) à la courbe $y = f(x)$ par T est :
  $(t) : y = 6\mathrm{e} \cdot x + h$ passe par $T(\mathrm{e}\,;2\mathrm{e}^2)$

$\Rightarrow 2\mathrm{e}^2 = 6\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} + h \Rightarrow h = -4\mathrm{e}^2$
$\Rightarrow (t) : y = 6\mathrm{e} \cdot x - 4\mathrm{e}^2$