Analyse - ch.1-2 : intégrales et applications de l'intégrale

Série A

Exercice 1. (2+3+3=8 pts)

a) $$\int \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3x^3} + c$$

b) $$\int \sqrt{4+5t}\; dt = \frac{1}{5}\int 5 \cdot (4+5t)^{\frac{1}{2}}\; dt =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4+5t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{(4+5t)^3} + c$$

• aussi possible par changement de variable :

$$u = 4+5t \Rightarrow du = 5 \cdot dt \Rightarrow dt = \frac{du}{5}$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{5}\; du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(u)^3} + c$$

c) $$\int x \cdot \cos(x^2)\; dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos(x^2)\; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + c$$

• aussi possible par changement de variable :

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{\cos(u)}{2}\; du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + c$$

Série B

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + c$$

$$\int \sqrt{6+5t}\; dt = \frac{1}{5}\int 5 \cdot (6+5t)^{\frac{1}{2}}\; dt =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (6+5t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{(6+5t)^3} + c$$

• aussi possible par changement de variable :

$$u = 6+5t \Rightarrow du = 5 \cdot dt \Rightarrow dt = \frac{du}{5}$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{5}\; du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(u)^3} + c$$

$$\int x \cdot \cos(x^2)\; dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos(x^2)\; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + c$$

• aussi possible par changement de variable :

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{\cos(u)}{2}\; du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + c$$

Exercice 2. (2+3=5 pts)

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(1+x)^3\,dx = \left[\frac{(1+x)^4}{4}\right]_{-1}^{2} =$

$= \dfrac{81}{4} - 0 = \dfrac{81}{4}$ [u^2]

• aussi possible par changement de variable :

$u = 1+x \Rightarrow du = dx$ etc...

$\displaystyle\int_{-2}^{1}(2+x)^3\,dx = \left[\frac{(2+x)^4}{4}\right]_{-2}^{1} =$

$= \dfrac{81}{4} - 0 = \dfrac{81}{4}$ [u^2]

• aussi possible par changement de variable :

$u = 2+x \Rightarrow du = dx$ etc...

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 2x\cdot(x^2+4)^{-2}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-(x^2+4)^{-1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{(x^2+4)}\right]_0^1 =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{5} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right] = \dfrac{1}{40}$ [u^2]

• aussi possible par changement de variable :

$u = x^2+4 \Rightarrow du = 2x\cdot dx$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_4^5 u^{-2}\,du = \dfrac{1}{2}\left[-u^{-1}\right]_4^5 =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{u}\right]_4^5 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{5} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right] = \dfrac{1}{40}$ [u^2]

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 2x\cdot(x^2+2)^{-2}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-(x^2+2)^{-1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{(x^2+2)}\right]_0^1 =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{12}$ [u^2]

• aussi possible par changement de variable :

$u = x^2+2 \Rightarrow du = 2x\cdot dx$

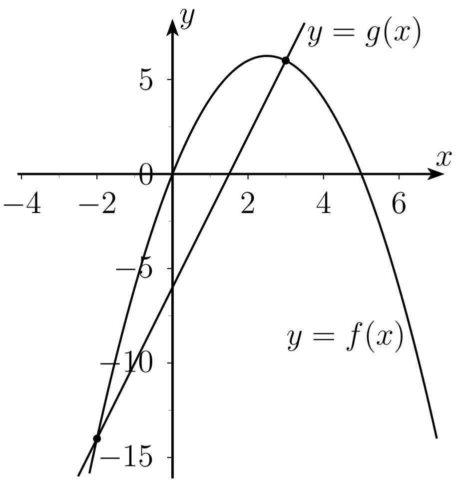
$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^3 u^{-2}\,du = \dfrac{1}{2}\left[-u^{-1}\right]_2^3 =$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{u}\right]_2^3 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{12}$ [u^2]

Exercice 3. (5+4=9 pts)

a) $-x^2 + 5x = 4x - 6 \Rightarrow S = \{-2\,;3\}$

Les graphes des fonctions $f(x) = -x^2 + 5x$ et $g(x) = 4x - 6$ se coupent en des points d'abscisses -2 ou 3.



$$A = \int_{-2}^{3} -x^2 + 5x - (4x - 6)\; dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\; dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}\ [\mathrm{u}^2]$$

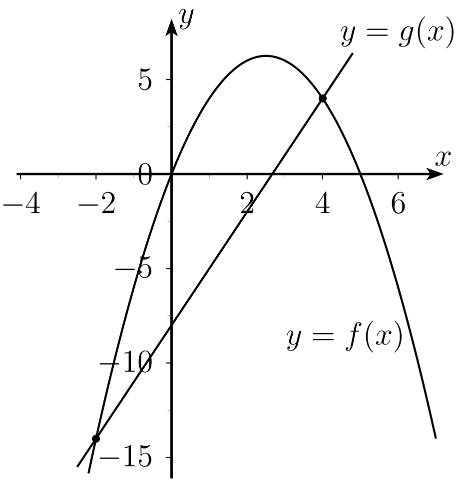
b) $V = \pi \displaystyle\int_{0}^{5} (-x^2 + 5x)^2\; dx =$

$$= \pi \int_{0}^{5} (x^4 - 10x^3 + 25x^2)\; dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{2} + \frac{25x^3}{3} \right]_{0}^{5} = \frac{625\pi}{6}\ [\mathrm{u}^3]$$

$-x^2 + 5x = 3x - 8 \Rightarrow S = \{-2\,;4\}$

Les graphes des fonctions $f(x) = -x^2 + 5x$ et $g(x) = 3x - 8$ se coupent en des points d'abscisses -2 ou 4.



$$A = \int_{-2}^{4} -x^2 + 5x - (3x - 8)\; dx =$$

$$= \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)\; dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right]_{-2}^{4} = \frac{108}{3} = 36\ [\mathrm{u}^2]$$

$$V = \pi \int_{0}^{5} (-x^2 + 5x)^2\; dx =$$

$$= \pi \int_{0}^{5} (x^4 - 10x^3 + 25x^2)\; dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{2} + \frac{25x^3}{3} \right]_{0}^{5} = \frac{625\pi}{6}\ [\mathrm{u}^3]$$