Chapitre 5

Applications de la dérivée

5.1 Tangentes

5.1.1 Tangente à une courbe du plan

Tangente vient du latin tangere qui signifie toucher.

La tangente à une courbe $\mathcal{C}$ du plan en un de ses points est la droite qui effleure la courbe en ce point sans la recouper dans le voisinage (à proximité) du point (voir figure p.106).

Attention ! La tangente dépend du point choisi sur la courbe. En général, la tangente est différente lorsque l'on change de point de tangence (voir figure p.106).

Remarque 5.1.

La tangente peut ne pas exister en certains points !

Pour la courbe $\mathcal{C}$ représentée page 106, la tangente en T n'existe pas.

5.1.2 Tangentes au graphe d'une fonction

Tangente au graphe de f en $T(a\,;b)$, sans utiliser une formule ...

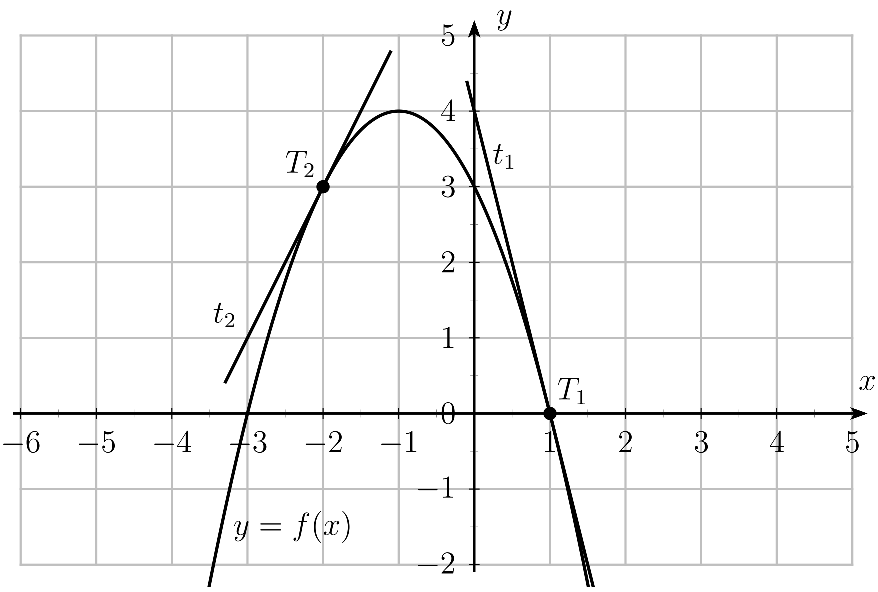
- Lien entre abscisse et ordonnée de T : $b = f(a)$
- La tangente est d'équation (cartésienne) $y = mx + h$
- La tangente est de pente $m_a = f'(a)$ (valeur numérique de f' en $x = a$)
- La tangente passe par $T(a\,;b)$ donc $b = m_a \cdot a + h$

Tangente au graphe de f en $T(a\,;b)$, en utilisant une formule ...

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemple 5.1.

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ dont le graphe est représenté ci-dessous



a) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

- point de tangence : $a = 1 \Rightarrow b = f(1) = -1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow T_1(1; 0)$

- dérivée : $f'(x) = -2x - 2$

- pente : $m_1 = f'(1) = -2 \cdot 1 - 2 = -4$

- une équation de la tangente t_1 à la courbe $y = f(x)$ en $T_1(1; 0)$ est :

$(t_1) : y = (-4) \cdot x + h$ passe par $T_1(1; 0) \Rightarrow 0 = (-4) \cdot 1 + h \Rightarrow h = 4$

$\Rightarrow \boxed{(t_1) : y = -4x + 4}$ ou $\boxed{(t_1) : 4x + y - 4 = 0}$

b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f de pente 2.

- point de tangence : $T_2(a\,;b)$ avec $b = f(a) = -a^2 - 2a + 3$

- dérivée : $f'(x) = -2x - 2$

- pente : $m_a = f'(a) = -2 \cdot a - 2 = 2 \iff -2a = 4 \iff a = -2$

$\Rightarrow b = f(-2) = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 3 \Rightarrow T_2(-2\,;3)$

- une équation de la tangente t_2 à la courbe $y = f(x)$ en $T_2(-2\,;3)$ est :

$(t_2) : y = 2 \cdot x + h$ passe par $T_2(-2\,;3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot (-2) + h \Rightarrow h = 7$

$\Rightarrow$ $\boxed{(t_2) : y = 2x + 7}$ ou $\boxed{(t_2) : 2x - y + 7 = 0}$

5.2 Croissance d'une fonction

• Si une fonction est **croissante** au voisinage d'un point,
la pente de la tangente en ce point est **positive**.

• Si une fonction est **décroissante** au voisinage d'un point,
la pente de la tangente en ce point est **négative**.

Croissance et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a\,;b[$;

a) f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$

b) f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

c) f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Exemple 5.2.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.
Donner l'ensemble de définition, étudier la croissance et déterminer les coordonnées des extremums éventuels de la fonction f.

- -

• $ED = \mathbb{R}$

• Dérivée : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x+2)(x-3) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-2\ :\ 3\,\}$

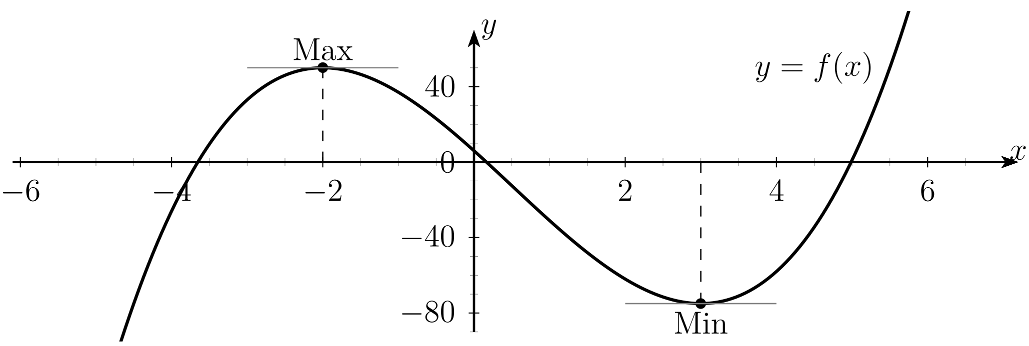
• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		3	
$\text{sgn}(f')$	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

• Extremums : $f(-2) = 50 \Rightarrow$ Max $(-2\,;50)$

$f(3) = -75 \Rightarrow$ Min $(3\,;-75)$

• Graphe :



5.3 Extremums et paliers

Liens entre signe de f' et croissance de f :

x		a		b		c		d	
$\text{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	palier	$\nearrow$

$\{$ minimums de f $\} \cup \{$ maximums de f $\} = \{$ extremums de f $\}$

$\{$ paliers de f $\} = \{$ points à tangente horizontale de f $\} \setminus \{$ extremums de f $\}$

Remarque 5.2

On étudie quelque fois une fonction sur un intervalle $I = [a\,;b]$. Il se peut alors qu'un extremum de f se trouve aux extrémités de l'ensemble d'étude I.

Exemple 5.3.

Calculer sur l'intervalle $I = [-5\,;-2]$ les coordonnées des extremums, ainsi que des extremums absolus de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 6x + 22$.

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = -2x - 6 \Rightarrow Z_{f'} = \{-3\}$
- Tableau de croissance (ou de variation) :

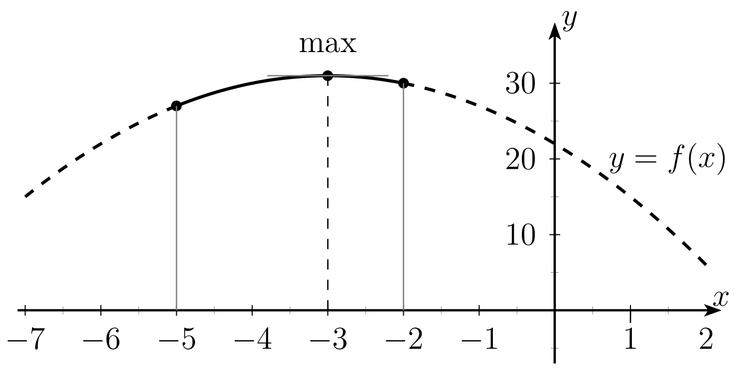
x		-3	
$\text{sgn}(f')$	$+$	0	$-$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$

- Extremums : $f(-3) = 31 \Rightarrow$ max absolu $(-3\,;31)$

  $f(-5) = 27 \Rightarrow$ min absolu $(-5\,;27)$

  $f(-2) = 30 \Rightarrow$ min local $(-2\,;30)$

- Graphe :



Exemple 5.4.

Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$.

Donner l'ensemble de définition, étudier la croissance et déterminer les coordonnées des extremums éventuels de la fonction f.

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ car $x^2 - 3 = 0 \iff (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2} = \dfrac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} =$

$= \dfrac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{-3\,;0\,;3\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

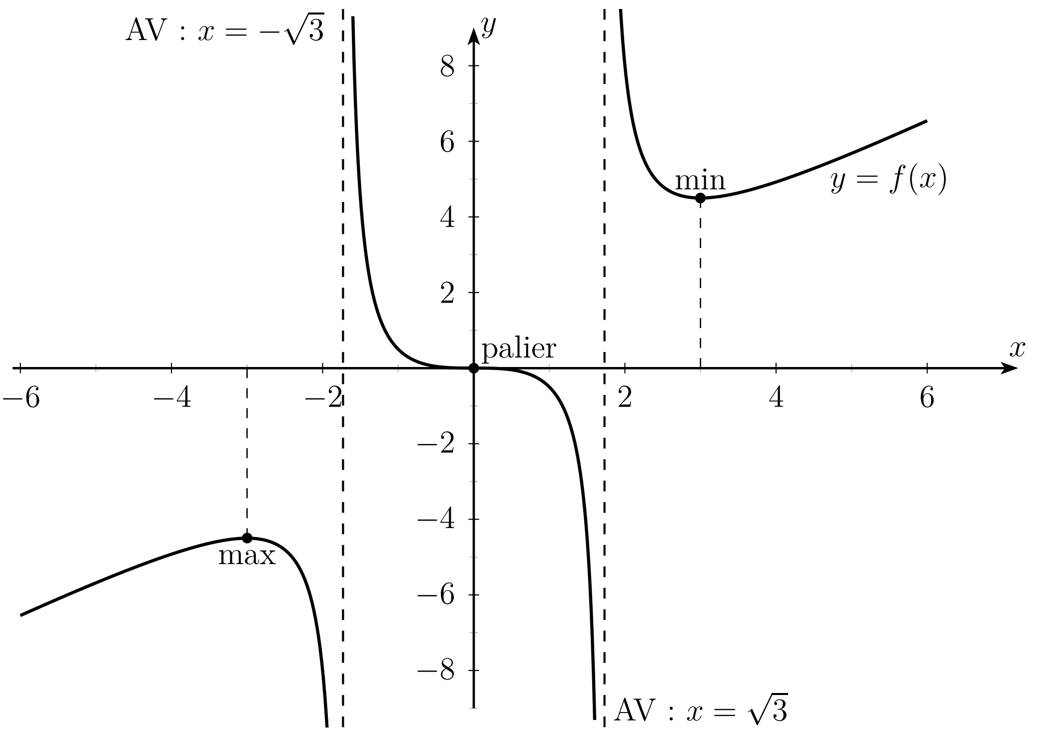
x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
sgn(f')	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	palier	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Extremums : $f(-3) = -4.5 \Rightarrow$ max local $(-3\,;-4.5)$

  $f(0) = 0 \Rightarrow$ palier $(0\,;0)$

  $f(3) = 4.5 \Rightarrow$ min local $(3\,;4.5)$

- Graphe :



5.4 Problèmes d'optimisation

Optimisation du volume d'une boîte

A partir de deux feuilles en carton de dimension 30 cm sur 21 cm, on construit une boîte en forme de parallélépipède rectangle en découpant dans chaque feuille deux carrés de même dimension (voir figure page 118).

Déterminer les dimensions du carré à découper afin d'obtenir un volume maximal.

---

a) • **Variables** :

$x =$ longueur du côté du carré à découper (hauteur de la boîte)
$y =$ longueur du fond de la boîte
$z =$ largeur du fond de la boîte

• **Quantité à optimiser** : volume à maximiser

b) **Volume en fonction des 3 variables** :

$$V(x\,;y\,;z) = y \cdot z \cdot x$$

c) **Equations liant les 3 variables** :
$y = 30 - x$
$z = 21 - x$

d) **Volume en fonction d'une seule variable** :

$$V(x) = (30 - x) \cdot (21 - x) \cdot x \quad ; \quad ED:\ x \in \,]0\,;21[$$
$$\Rightarrow V(x) = x^3 - 51x^2 + 630x$$

e) **Croissance (variation) du volume** V :

• $V'(x) = 3x^2 - 102x + 630 = 3(x^2 - 34x + 210) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{34 \pm \sqrt{316}}{2} = 17 \pm \sqrt{79}$
$\Rightarrow Z_{V'} = \{\sim 8.11\,; \sim 25.89\}$ Attention : $25.89 \notin ED$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		~ 8.11		~ 25.89	
sgn(V')	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de V	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

f) • **Extremum** : $V(\sim 8.11) \cong 5'230.5 \Rightarrow$ max $(\sim 8.11\,; \sim 5'230)$

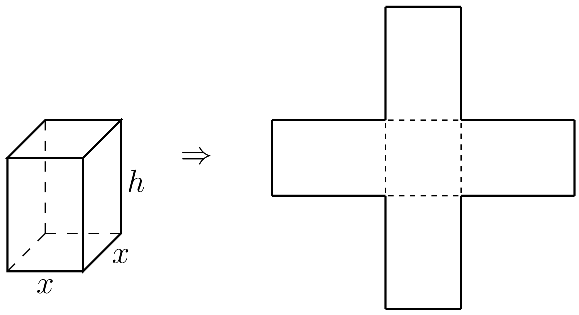
• **Réponse** : Le volume sera maximal ($\sim 5'230\,\text{cm}^3$) pour une longueur du côté du carré à découper de $\sim 8.11\,\text{cm}$.

Optimisation d'utilisation de matériau

Dans une fabrique de boîtes en carton, on désire limiter la surface de carton utilisée pour la construction de boîtes en forme de **parallélépipède rectangle à base carrée sans couvercle**.
La boite doit avoir un volume de $1'000\,\text{cm}^3$.
Calculer les dimensions (au mm près) de la boîte dont la surface de carton est minimale, ainsi que cette surface minimale (au mm^2 près).

- -

a) • **Schéma** :



• **Variables** :
x = longueur du côté du carré du fond de la boîte
h = hauteur de la boîte

• **Quantité à optimiser** : aire à minimiser

b) **Aire en fonction des 2 variables** :

$$A(x\,;h) = x^2 + 4 \cdot x \cdot h$$

c) **Equation liant les 2 variables** :

Volume : $x^2 \cdot h = 1'000 \Rightarrow h = \dfrac{1'000}{x^2}$

d) **Aire en fonction d'une seule variable** :

$$A(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{1'000}{x^2} = x^2 + \frac{4'000}{x} \quad ; \quad ED:\ x > 0$$

e) **Croissance (variation) de l'aire** A :

• $A'(x) = 2x - \dfrac{4'000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 4'000}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 2'000)}{x^2} \Rightarrow Z_{A'} = \{\,\sqrt[3]{2'000}\,\}$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		$10\sqrt[3]{2}$	
sgn(A')	$-$	0	$+$
variation de A	$\searrow$	min	$\nearrow$

f) • **Extremum** : $A(\sqrt[3]{2'000}) \cong 476.22 \Rightarrow \min\,(\sim 12.6\,; \sim 476.22)$

• **Réponse** : L'aire sera minimale ($\sim 476.22\,\text{cm}^2$) pour une longueur du côté du carré du fond de la boîte de $\sim 12.6\,\text{cm}$.

Méthode de résolution d'un problème d'optimisation

Pour résoudre un problème d'optimisation, on procède comme suit :

- Bien lire l'énoncé !

a) Faire **un schéma** et identifier **les variables du problème** $(x, y, h, r, ...)$, ainsi que **la grandeur Q à optimiser** (à maximiser ou à minimiser).

b) Exprimer **la grandeur à optimiser Q en fonction des variables du problème**.

c) Si Q est fonction de plusieurs variables, déterminer **les équations liant ces variables**.

d) Exprimer **la grandeur à optimiser Q en fonction d'une seule variable** : si x est cette variable, il s'agit donc de trouver l'expression algébrique d'une fonction f telle que $Q = f(x)$ en utilisant les équations obtenues au point précédent. Déterminer alors **l'ensemble des valeurs admissibles de x**.

e) A l'aide de la dérivée f' de la fonction f, étudier **la croissance de Q**.

f) Trouver **l'optimum (le maximum ou le minimum)** cherché à l'aide du tableau de croissance de Q et **répondre à la question posée**.

Remarque 5.3.

Il se peut que le maximum ou le minimum cherché se trouve aux extrémités des valeurs admissibles de x.

5.5 Etude d'une fonction rationnelle

Plan d'étude d'une fonction rationnelle

1) Recherche de $ED(f)$.
2) Signe et zéros de f.
3) Recherche des asymptotes éventuelles de f.
   (Si demandé, position relative entre la courbe et ses asymptotes.)
4) Dérivée première de f, $ED(f')$. Signe et zéros de f' ; croissance de f.
5) Graphe de f.

Exemple 5.5.

Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$.

- -

1) $ED = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $f(x) = 0 \iff \dfrac{x-3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow Z_f = \{3\}$

x		2		3	
sgn(f)	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

3) <u>AV</u> : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = "\dfrac{-1}{0_+}" = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = 2$

<u>AH</u> : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ AH : $y = 0$

4) • Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x-2)^2 - (x-3)\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \dfrac{(x-2)[(x-2)-2(x-3)]}{(x-2)^4} =$

$= \dfrac{x-2-2x+6}{(x-2)^3} = \dfrac{-x+4}{(x-2)^3} \Rightarrow Z_{f'} = \{\,4\,\}$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		2		4	
sgn(f')	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$

• Extremum : $f(4) = 1/4 \Rightarrow$ maximum $(4\,;1/4)$

5) Graphe (sur page 123) :