Chapitre 4

Dérivée

4.1 Exemple d'introduction : vitesse instantanée

On observe la vitesse d'une balle tirée en l'air : la balle part à une très grande vitesse, ensuite elle ralentit (sa vitesse diminue) au fur et à mesure jusqu'à atteindre sa hauteur maximale (où sa vitesse est nulle). Ensuite, sa vitesse devient négative et augmente en valeur absolue tandis qu'elle tombe ; finalement, c'est l'impact avec le sol.
Soit $y = f(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle en fonction du temps t (en secondes ; $t = 0$ est l'instant de départ de la balle).

Exemple 4.1.

Supposons que $f(t) = -5t^2 + 30t$ (voir ci-dessous le graphe de f dans un repère Oty).

La **vitesse moyenne** de la balle dans l'intervalle de temps $[a, b]$ est donnée par

$$v_{moy} = \frac{\text{variation de la position}}{\text{variation du temps}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) Calculer la vitesse moyenne de la balle dans les intervalles $[0; 6]$, $[0; 3]$, $[0; 1]$, $[0; 0.1]$ et $[0; 0.01]$

b) Calculer la vitesse instantanée de départ, soit la limite de la vitesse moyenne sur l'intervalle $[0; h]$ quand h tend vers 0.

- -

Les réponses aux questions de l'exemple 4.1 sont à copier sur la page 85.

a) Sur $[0\,;6]$: $v_{moy} = \dfrac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \dfrac{0 - 0}{6} = \boxed{0\,\text{m/s}}$

Sur $[0\,;3]$: $v_{moy} = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{45 - 0}{3} = \boxed{15\,\text{m/s}}$

Sur $[0\,;1]$: $v_{moy} = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{25 - 0}{1} = \boxed{25\,\text{m/s}}$

Sur $[0\,;0.1]$: $v_{moy} = \dfrac{f(0.1) - f(0)}{0.1 - 0} = \dfrac{2.95 - 0}{0.1} = \boxed{29.5\,\text{m/s}}$

Sur $[0\,;0.01]$: $v_{moy} = \dfrac{f(0.01) - f(0)}{0.01 - 0} = \dfrac{0.2995 - 0}{0.01} = \boxed{29.95\,\text{m/s}}$

b) Sur $[0\,;h]$: $v_{ins}(0) = \lim\limits_{h\to 0} v_{moy}(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-5h^2 + 30h - 0}{h - 0} =$

$= „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(-5h + 30)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-5h + 30}{1} = \boxed{30\,\text{m/s}}$

La **vitesse instantanée** de la balle au temps $t = a$ est donnée par

$$v_{ins}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 4.1 suite.

Rappelons que la position de la balle au temps t est donnée par $f(t) = -5t^2 + 30t$.

a) Calculer la vitesse instantanée au temps $t = 1$:

- -

$$v_{ins}(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5(1+h)^2 + 30(1+h) - 25}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5 - 10h - 5h^2 + 30 + 30h - 25}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5h^2 + 20h}{h} = „\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-5h+20)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5h+20}{1} = \boxed{20\,\mathrm{m/s}}$$

b) Calculer la vitesse instantanée au temps t :

- -

$$v_{ins}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5(t+h)^2 + 30(t+h) - (-5t^2 + 30t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5t^2 - 10ht - 5h^2 + 30t + 30h + 5t^2 - 30t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5h^2 - 10ht + 30h}{h} = „\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-5h - 10t + 30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5h - 10t + 30}{1} = \boxed{-10t + 30\,[\mathrm{m/s}]}$$

Remarque : la fonction f est de degré 2, alors que v_{ins} est de degré 1.

Remarque 4.1.

a) La vitesse moyenne sur $[a : b]$ représente la pente de la droite reliant les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.
Dans l'exemple 4.1, la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1; 4]$ est la pente m_{TC} de la droite TC où $T(1; 25)$ et $C(4; 40)$ sont les positions de la balle aux temps $t = 1$ et $t = 4$ respectivement.
Elle vaut $m_{TC} = \dfrac{40 - 25}{4 - 1} = 5\,\mathrm{m/s}$.

b) La vitesse instantanée en $t = a$ est la pente m de la tangente à la courbe $y = f(t)$ en $T(a; f(a))$.
Dans l'exemple 4.1, la vitesse instantanée en $t = 1$ est la pente de la tangente d en T.
Elle vaut $m = 20\,\mathrm{m/s}$.

4.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant une valeur a.

• **Nombre dérivé de la fonction f au point a :**

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si elle existe et est finie.

• Ce nombre dérivé est noté $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Remarque 4.2.

a) S'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ représente **la pente de la tangente à la courbe** $y = f(x)$ **au point d'abscisse** a, donc au point $T(a; f(a))$.

b) En posant $x = a + h$, il est aussi possible de calculer $f'(a)$ de la manière suivante :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Exemple 4.2.

Calculer $f'(4)$ avec f définie par $f(x) = x^2$.

- -

• Méthode 1 :

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2-4^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16+8h+h^2-16}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+8h}{h} = „\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+8)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h+8}{1} = \boxed{8}$$

Remarque : Ce nombre 8 représente la pente de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse 4, donc au point $T(4; 16)$

• Méthode 2 :

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-4^2}{x-4} = „\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{x+4}{1} = \boxed{8}$$

4.3 Fonction dérivée

Soit f une fonction, $ED(f)$ son ensemble de définition et $I \subseteq ED(f)$.

Si le nombre dérivé de f existe pour tous les points $x \in I$, on définit f' **la fonction dérivée** par

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemple 4.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous, calculer leur fonction dérivée et donner l'ensemble de définition de celle-ci.

a) $f(x) = x^2$

- -

$\star$ $ED(f) = \mathbb{R}$

• Méthode 1 :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = „\frac{0}{0}" = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+2x}{1} = \boxed{2x}$$

• Méthode 2 :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = „\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{1} = a + a = \boxed{2a} \Rightarrow f'(x) = \boxed{2x}$$

$\star$ $ED(f') = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \sqrt{x}$

- -

$\star$ $ED(g) = \mathbb{R}_+$

• Méthode 2 :

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}} \Rightarrow g'(x) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$\star$ $ED(g') = \mathbb{R}_+^*$

Remarque 4.3.

Pour une fonction f donnée par son expression algébrique $f(x)$, on notera $(f(x))'$ l'expression algébrique de la fonction dérivée f'.
Par exemple, pour f définie par $f(x) = x^2$, on a vu que la fonction dérivée f' est donnée par $f'(x) = 2x$. On notera $\boxed{(x^2)' = 2x}$.

4.4 Règles de dérivation

Dérivée d'une constante ou d'une puissance entière positive de x

$$\boxed{(k)' = 0, \quad k \in \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{(x^m)' = m \cdot x^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}}$$

Exemple 4.4.

Calculer

a) $(-2)' = 0$

b) $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

c) $(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

d) $(x^7)' = 7 \cdot x^{7-1} = 7x^6$

Dans les formules qui suivent, k est un nombre réel et u, v et w sont des **fonctions de** x.

Règle de la somme

La dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \quad \text{et} \quad \boxed{(u+v+w)' = u' + v' + w'}$$

Règle du produit par une constante

La dérivée du produit par une constante est égale au produit de la constante par la dérivée :

$$\boxed{(k \cdot u)' = k \cdot u', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Remarque 4.4.

ATTENTION ! Ne pas confondre produit par une constante et somme d'une constante ! Dans le cas d'une somme, on a :

$$\boxed{(k+u)' = k' + u' = 0 + u' = u', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exemple 4.5.

Calculer
a) $(x^3 + x^2 + x - 5)' = (x^3)' + (x^2)' + x' - 5' = 3x^2 + 2x + 1 - 0 = \boxed{3x^2 + 2x + 1}$

Exemple 4.5.

Calculer

a) voir page 92.

b) $(6x^5 + 7x^3 - 1)' = 6(x^5)' + 7(x^3)' - 1' = 6 \cdot 5x^4 + 7 \cdot 3x^2 - 0 = \boxed{30x^4 + 21x^2}$

c) $(6\sqrt{x} + 7x^2)' = 6(\sqrt{x})' + 7(x^2)' \overset{\text{p.90}}{=} 6 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 7 \cdot 2x = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 14x$

Règle du produit

ATTENTION ! La dérivée d'un produit **n'est pas** égale au produit des dérivées !

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Exemple 4.6.

Calculer

a) $[(x^2 + 1)(4x^2 - 3x + 1)]' = (x^2 + 1)'(4x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 1)(4x^2 - 3x + 1)' =$

$u(x) = x^2 + 1$	$v(x) = 4x^2 - 3x + 1$
$u'(x) = 2x$	$v'(x) = 8x - 3$

$= 2x(4x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 1)(8x - 3) =$

$= 8x^3 - 6x^2 + 2x + 8x^3 - 3x^2 + 8x - 3 = \boxed{16x^3 - 9x^2 + 10x - 3}$

b) $[(x - 1) \cdot \sqrt{x}]' = (x - 1)' \cdot \sqrt{x} + (x - 1)(\sqrt{x})' =$

$u(x) = x - 1$	$v(x) = \sqrt{x}$
$u'(x) = 1$	$v'(x) \overset{\text{p.90}}{=} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

Règle du quotient

ATTENTION ! La dérivée d'un quotient **n'est pas** égale au quotient des dérivées !
Si v est tel que $v(x) \neq 0$, on a la règle

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \quad \text{et en particulier} \quad \boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

Exemple 4.7.

Calculer

a) $\left(\dfrac{3x-2}{x^2-4}\right)' = \dfrac{(3x-2)'(x^2-4) - (3x-2)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} =$

$u(x) = 3x - 2$	$v(x) = x^2 - 4$
$u'(x) = 3$	$v'(x) = 2x$

$$= \frac{3(x^2-4) - 2x(3x-2)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 + 4x}{(x+2)^2(x-2)^2} = \boxed{\frac{-3x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2(x-2)^2}}$$

b) $\left(\dfrac{5}{x^2-3x+6}\right)' = 5\left(\dfrac{1}{x^2-3x+6}\right)' = \dfrac{(1)'(x^2-3x+6) - 1 \cdot (x^2-3x+6)'}{(x^2-3x+6)^2}$

$u(x) = 1$	$v(x) = x^2 - 3x + 6$
$u'(x) = 0$	$v'(x) = 2x - 3$

$$= 5\,\frac{0(x^2-3x+6) - (2x-3)}{(x^2-3x+6)^2} = 5\,\frac{-2x+3}{(x^2-3x+6)^2} = \boxed{-5\,\frac{2x-3}{(x^2-3x+6)^2}}$$

Dérivée d'une puissance à exposant entier

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

a) $\left(\dfrac{2}{x}\right)' = (2 \cdot x^{-1})' = 2(x^{-1})' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -2x^{-2} = \boxed{-\dfrac{2}{x^2}}$

b) $\left(\dfrac{5}{3x^4}\right)' = \left(\dfrac{5}{3} \cdot x^{-4}\right)' = \dfrac{5}{3}(x^{-4})' = \dfrac{5}{3} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\dfrac{20}{3}x^{-5} = \boxed{-\dfrac{20}{3x^5}}$

Règle de la composition

La règle de la composition permet de dériver les fonctions qui sont des composées de fonctions dont on connaît les dérivées.

$$\boxed{[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{[f(u)]' = f'(u) \cdot u'}$$

Cas particulier

$$\boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Exemple 4.8.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $[(2x-1)^5]' = 5 \cdot (2x-1)^4 \cdot (2x-1)' = 5 \cdot (2x-1)^4 \cdot 2 = \boxed{10(2x-1)^4}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = 2x-1 \\ u'(x) = 2 \end{array}}$$

b) Méthode 1 :

$$\left[\frac{1}{(7-x)^3}\right]' = [(7-x)^{-3}]' = (-3)\cdot(7-x)^{-4}\cdot(7-x)' = (-3)\cdot(7-x)^{-4}\cdot(-1) = \boxed{\frac{3}{(7-x)^4}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = 7-x \\ u'(x) = -1 \end{array}}$$

Méthode 2 :

$$\left[\frac{1}{(7-x)^3}\right]' \overset{\text{p.96}}{=} \frac{(1)'(7-x)^3 - 1 \cdot [(7-x)^3]'}{(7-x)^6} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} u(x) = 1 & v(x) = (7-x)^3 \\ u'(x) = 0 & v'(x) = 3(7-x)^2 \cdot (-1) = -3(7-x)^2 \end{array}}$$

$$= \frac{0 \cdot (7-x)^3 - [-3(7-x)^2]}{(7-x)^6} = \frac{3(7-x)^2}{(7-x)^6} = \boxed{\frac{3}{(7-x)^4}}$$

c) $\left[\frac{x}{(x-1)^3}\right]' \overset{\text{p.96}}{=} \frac{(x)'(x-1)^3 - x \cdot [(x-1)^3]'}{(x-1)^6} = \frac{1 \cdot (x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} u(x) = x & v(x) = (x-1)^3 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 3(x-1)^2 \cdot 1 \end{array}}$$

$$= \frac{(x-1)^2[(x-1)-3x]}{(x-1)^6} = \frac{(-2x-1)(x-1)^2}{(x-1)^6} = \boxed{\frac{-2x-1}{(x-1)^4}}$$

Dérivée d'une puissance à exposant rationnel

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Q}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Q}}$$

Exemple 4.9.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $(\sqrt[4]{x})' = (x^{1/4})' = \dfrac{1}{4}\, x^{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{1}{4}\, x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4 \cdot x^{3/4}} = \boxed{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-1/3})' = -\dfrac{1}{3}\, x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3}\, x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3 \cdot x^{4/3}} = \boxed{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}$

c) à laisser de côté.