Exercice 5.1.

a)
- point de tangence : $a = 0 \Rightarrow b = f(0) = -5 \Rightarrow T(0\,;-5)$
- dérivée : $f'(x) = -6x - 6$
- pente : $m_0 = f'(0) = -6 \cdot 0 - 6 = \boxed{-6}$

b)
- point de tangence : $a = 1 \Rightarrow b = f(1) = -1 \Rightarrow T(1\,;-1)$
- dérivée : $f'(x) = 5x^4 - 6x$
- pente : $m_1 = f'(1) = 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = \boxed{-1}$

c)
- point de tangence : $a = 4 \Rightarrow b = f(4) = 8 \Rightarrow T(4\,;8)$
- dérivée : $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- pente : $m_4 = f'(4) = 2 \cdot 4 + \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \boxed{\dfrac{33}{4}}$

d)
- point de tangence : $a = 1 \Rightarrow b = f(1) = 5 \Rightarrow T(1\,;5)$
- dérivée : $f'(x) = 3(5x - 4) + 5(3x + 2) = 30x - 2$
- pente : $m_1 = f'(1) = 30 \cdot 1 - 2 = \boxed{28}$

e)
- point de tangence : $a = 2 \Rightarrow b = f(2) = 3 \Rightarrow T(2\,;3)$
- dérivée : $f'(x) = \dfrac{4(x+3) - (4x+7) \cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{5}{(x+3)^2}$
- pente : $m_2 = f'(2) = \dfrac{5}{(2+3)^2} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

f)
- point de tangence : $a = 4 \Rightarrow b = f(4) = 1 \Rightarrow T(4\,;1)$
- dérivée : $f'(x) = -(x-3)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$
- pente : $m_4 = f'(4) = -\dfrac{1}{(4-3)^2} = \boxed{-1}$

Exercice 5.2.

a) • point de tangence : $a = 2 \Rightarrow b = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 = 3 \Rightarrow T(2\,;3)$

• dérivée : $f'(x) = 4x$

• pente : $m_2 = f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(2\,;3)$ est :
$(t) : y = 8 \cdot x + h$ passe par $T(2\,;3) \Rightarrow 3 = 8 \cdot 2 + h \Rightarrow h = -13$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = 8x - 13}$ ou $\boxed{(t) : 8x - y - 13 = 0}$

b) • point de tangence : $a = -2 \Rightarrow b = f(-2) = 4 \Rightarrow T(-2\,;4)$

• dérivée : $f'(x) = -1 - 2x$

• pente : $m_{-2} = f'(-2) = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(-2\,;4)$ est :
$(t) : y = 3 \cdot x + h$ passe par $T(-2\,;4) \Rightarrow 4 = 3 \cdot (-2) + h \Rightarrow h = 10$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = 3x + 10}$ ou $\boxed{(t) : 3x - y + 10 = 0}$

c) • point de tangence : $a = -2 \Rightarrow b = f(-2) = 0 \Rightarrow T(-2\,;0)$

• dérivée : $f'(x) = 3x^2$

• pente : $m_{-2} = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(-2\,;0)$ est :
$(t) : y = 12 \cdot x + h$ passe par $T(-2\,;0) \Rightarrow 0 = 12 \cdot (-2) + h \Rightarrow h = 24$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = 12x + 24}$ ou $\boxed{(t) : 12x - y + 24 = 0}$

d) • point de tangence : $a = 3 \Rightarrow b = f(3) = 1/9 \Rightarrow T(3\,;1/9)$

• dérivée : $f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

• pente : $m_3 = f'(3) = -2/3^3 = -2/27$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(3\,;1/9)$ est :
$(t) : y = -\dfrac{2}{27} \cdot x + h$ passe par $T(3\,;1/9) \Rightarrow \dfrac{1}{9} = -\dfrac{2}{27} \cdot 3 + h \Rightarrow h = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = -\dfrac{2}{27}\,x + \dfrac{1}{3}}$ ou $\boxed{(t) : 2x + 27y - 9 = 0}$

Exercice 5.3.

a) • point de tangence : $a = 1 \Rightarrow b = f(1) = 2 \Rightarrow T(1\,;2)$

• dérivée : $f'(x) = 2 - 3x^2$

• pente : $m_1 = f'(1) = 2 - 3 \cdot 1 = -1$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(1\,;2)$ est :

$(t) : y = (-1) \cdot x + h$ passe par $T(1\,;2) \Rightarrow 2 = (-1) \cdot 1 + h \Rightarrow h = 3$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = -x + 3}$ ou $\boxed{(t) : x + y - 3 = 0}$

b) • point de tangence : $a = 3 \Rightarrow b = f(3) = 2 \Rightarrow T(3\,;2)$

• dérivée : $f'(x) = \dfrac{1 \cdot x - (x+3) \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{3}{x^2}$

• pente : $m_3 = f'(3) = -\dfrac{3}{3^2} = -\dfrac{1}{3}$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(3\,;2)$ est :

$(t) : y = -\dfrac{1}{3} \cdot x + h$ passe par $T(3\,;2) \Rightarrow 2 = -\dfrac{1}{3} \cdot 3 + h \Rightarrow h = 3$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = -\dfrac{1}{3}x + 3}$ ou $\boxed{(t) : x + 3y - 9 = 0}$

c) • point de tangence : $a = 4 \Rightarrow b = f(4) = 3 \Rightarrow T(4\,;3)$

• dérivée : $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

• pente : $m_4 = f'(4) = \dfrac{1}{3}$

• une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en $T(4\,;3)$ est :

$(t) : y = \dfrac{1}{3} \cdot x + h$ passe par $T(4\,;3) \Rightarrow 3 = \dfrac{1}{3} \cdot 4 + h \Rightarrow h = \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow \boxed{(t) : y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}}$ ou $\boxed{(t) : x - 3y + 5 = 0}$

Exercice 5.4.

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

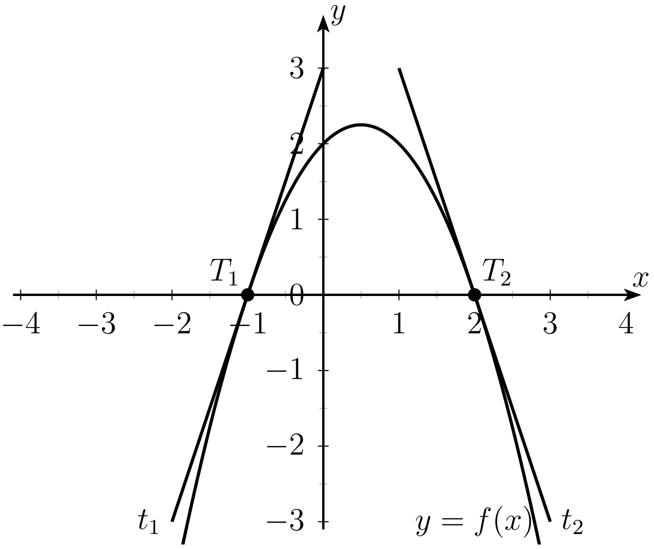
a) dérivée : $f'(x) = -2x + 1$

b) • $f(x) = 0 \iff -x^2 + x + 2 = 0 \iff -(x^2 - x - 2) = 0 \iff$

$\iff -(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ ou $x_2 = 2$

• pentes : $m_{-1} = f'(-1) = \boxed{3}$ ou $m_2 = f'(2) = \boxed{-3}$

c)



Exercice 5.5.

• $f(x) = x^2$

• dérivée : $f'(x) = 2x$

• pente : $m_a = f'(a) = -3 \iff 2a = -3 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$

• point de tangence : $a = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow b = f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \boxed{T\left(-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right)}$

Exercice 5.6.

- $f(x) = x^3 - 3x$

- dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3$

- pente : les tangentes sont parallèles à l'axe $Ox \iff m_a = 0$

$m_a = f'(a) = 0 \iff 3a^2 - 3 = 0 \iff 3(a^2 - 1) = 0 \iff 3(a+1)(a-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = -1$ ou $a_2 = 1$

- points de tangence : $a_1 = -1 \Rightarrow b_1 = f(-1) = 2 \Rightarrow \boxed{T_1(-1\,;2)}$

$a_2 = 1 \Rightarrow b_2 = f(1) = -2 \Rightarrow \boxed{T_2(1\,;-2)}$

Exercice 5.7.

- $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

- dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$

- pente : les tangentes sont parallèles à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow m_a = \frac{12}{4} = 3$

$m_a = f'(a) = 3 \iff 3a^2 - 2a - 5 = 3 \iff 3a^2 - 2a - 8 = 0 \iff$

$\iff (3a+4)(a-2) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{4}{3} \text{ ou } a_2 = 2}$

Exercice 5.8.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

a) • point de tangence : $P(1\,;3)$

• dérivée : $f'(x) = \dfrac{2 \cdot x - (2x+1) \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

• pentes : $m_1 = f'(1) = -1$

• une équation de la tangente t_1 à la courbe $y = f(x)$ en $P(1\,;3)$ est :

$(t_1) : y = (-1) \cdot x + h$ passe par $P(1\,;3) \Rightarrow 3 = (-1) \cdot 1 + h \Rightarrow h = 4$

$\Rightarrow\ (t_1) : y = -x + 4$

• $t_1 \cap Ox :\ y = 0 \iff x = 4 \Rightarrow$ on va toucher la cible no 4.

b) • point de tangence : $Q\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{8}{3}\right)$

• dérivée : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

• pentes : $m_{3/2} = f'(3/2) = -4/9$

• une équation de la tangente t_2 à la courbe $y = f(x)$ en $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{8}{3}\right)$ est :

$(t_2) : y = -\dfrac{4}{9} \cdot x + h$ passe par $Q\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{8}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{8}{3} = -\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{2} + h \Rightarrow h = \dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow\ (t_2) : y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{10}{3}$

• $t_2 \cap Ox :\ y = 0 \iff x = \dfrac{15}{2} \Rightarrow$ on ne va toucher aucune cible.

Exercice 5.11.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

- $ED = \mathbb{R}$

- Dérivée : $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) =$

$= 12x(x+2)(x-1) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-2\,;0\,;1\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		1	
sgn(f')	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

- La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-2\,]\cup[\,0\,;1\,]$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x^2-4) - x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\dfrac{8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{\,0\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		2	
sgn(f')	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$
variation de f	↗	$\|$	↗	max	↘	$\|$	↘

- La fonction f est décroissante sur $[\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-4)} = \dfrac{x+2}{x^2-x-12}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;4\}$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2-x-12) - (x+2)\cdot(2x-1)}{(x+3)^2(x-4)^2} =$

$$= \frac{x^2-x-12-(2x^2+3x-2)}{(x+3)^2(x-4)^2} = \frac{-x^2-4x-10}{(x+3)^2(x-4)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \emptyset$$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-3		4	
sgn(f')	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$
variation de f	↘	$\|$	↘	$\|$	↘

- La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]-3\,;4\,[\,\cup\,]\,4\,;+\infty\,[= \mathbb{R}\setminus\{-3\,;4\}$

Exercice 5.12.

a) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x - 4$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = -3x^2 - 6x + 45 = -3(x^2 + 2x - 15) =$

$= -3(x+5)(x-3) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-5\,;3\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-5		3	
$\text{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

- La fonction f est croissante sur $[\,-5\,;3\,]$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{x}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{(8x+3)\cdot x - (4x^2+3x+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{8x^2 + 3x - 4x^2 - 3x - 1}{x^2} =$

$= \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x^2} \Rightarrow Z_{f'} = \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$\text{sgn}(f')$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-1/2\,] \cup [\,1/2\,;+\infty\,[$

c) $f(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^2$

- $ED = \mathbb{R}$

- Dérivée : $f'(x) = (2x + 1)(x - 3)^2 + (x^2 + x - 2) \cdot 2(x - 3) \cdot 1 =$

$= (x - 3)[(2x + 1)(x - 3) + 2(x^2 + x - 2)] = (x - 3)(2x^2 - 5x - 3 + 2x^2 + 2x - 4) =$

$= (x - 3)(4x^2 - 3x - 7) = (x - 3)(4x - 7)(x + 1) \Rightarrow Z_{f'} = \{ -1\,; 7/4\,; 3 \}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-1		$7/4$		3	
$\mathrm{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- La fonction f est croissante sur $[-1\,; 7/4\,] \cup [\,3\,; +\infty\,]$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

- $ED = \mathbb{R}$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 + 16) - x \cdot 2x}{(x^2 + 16)^2} =$

$$= \frac{x^2 + 16 - 2x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{16 - x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{(x^2 + 16)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{\pm 4\}$$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-4		4	
$\mathrm{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

- La fonction f est croissante sur $[-4\,; 4\,]$

Exercice 5.13.

a) $f(x) = 4x - 5$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = 4 \Rightarrow Z_{f'} = \emptyset$
- Tableau de croissance (ou de variation) :

x	
sgn(f')	$+$
variation de f	$\nearrow$

- La fonction f n'a aucun extremum.

b) $f(x) = 7 - 2x - x^2$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = -2 - 2x = -2(1 + x) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-1\,\}$
- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-1	
sgn(f')	$+$	0	$-$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$

- Extremum : $f(-1) = 8 \Rightarrow$ max $(-1\,;8)$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) =$

$= 6(x + 2)(x - 1) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-2\,;1\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		1	
sgn(f')	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Extremums : $f(-2) = 25 \Rightarrow$ max $(-2\,;25)$

$f(1) = -2 \Rightarrow$ min $(1\,;-2)$

d) de côté

e) de côté

f) de côté

g) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{(4x+1) \cdot x - (2x^2 + x + 8) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{4x^2 + x - 2x^2 - x - 8}{x^2} =$

$= \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = \dfrac{2(x+2)(x-2)}{x^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{\, \pm 2\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		2	
sgn(f')	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Extremums : $f(-2) = -7 \Rightarrow$ max $(-2\,; -7)$

$f(2) = 9 \Rightarrow$ min $(2\,; 9)$

h) de côté

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{6x \cdot (2x^2 + 1) - (3x^2 - 1) \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \dfrac{12x^3 + 6x - 12x^3 + 4x}{(2x^2 + 1)^2} =$

$= \dfrac{10x}{(2x^2 + 1)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{\, 0 \,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		0	
sgn(f')	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Extremum : $f(0) = -1 \Rightarrow$ min $(0\,; -1)$

Exercice 5.14.

a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 4$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = 10x + 8 = 2(5x + 4) \Rightarrow Z_{f'} = \{\, -4/5 \,\}$
- Tableau de croissance (ou de variation) :

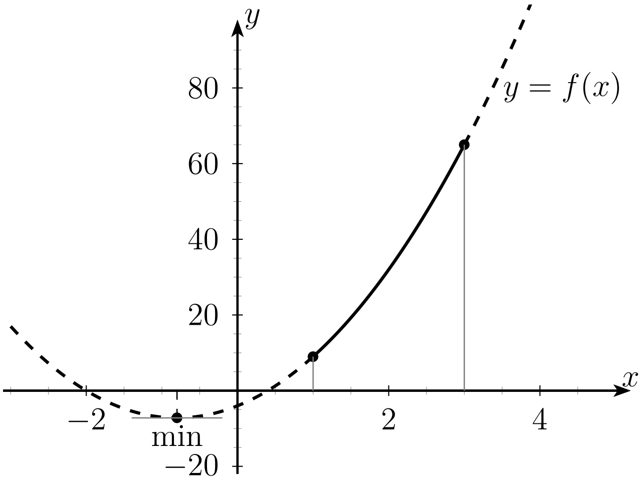
x		$-4/5$	
sgn(f')	$-$	0	$+$
variation de f	↘	min	↗

- Extremums : $f(-4/5) = -36/5 \Rightarrow$ min absolu $(-4/5\,; -36/5)$ sur $\mathbb{R}$

  $f(1) = 9 \Rightarrow$ min absolu $(1\,; 9)$ sur I

  $f(3) = 65 \Rightarrow$ max absolu $(3\,; 65)$ sur I

- Graphe :



b) de côté

c) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12 = 12(x^3 + x^2 - x - 1) =$

$= 12[x^2(x+1) - 1(x+1)] = 12(x+1)(x^2-1) = 12(x+1)^2(x-1) \Rightarrow Z_{f'} = \{\,-1\,;1\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-1		1	
$\text{sgn}(f')$	$-$	0	$-$	0	$+$
variation de f	↘	palier	↘	min	↗

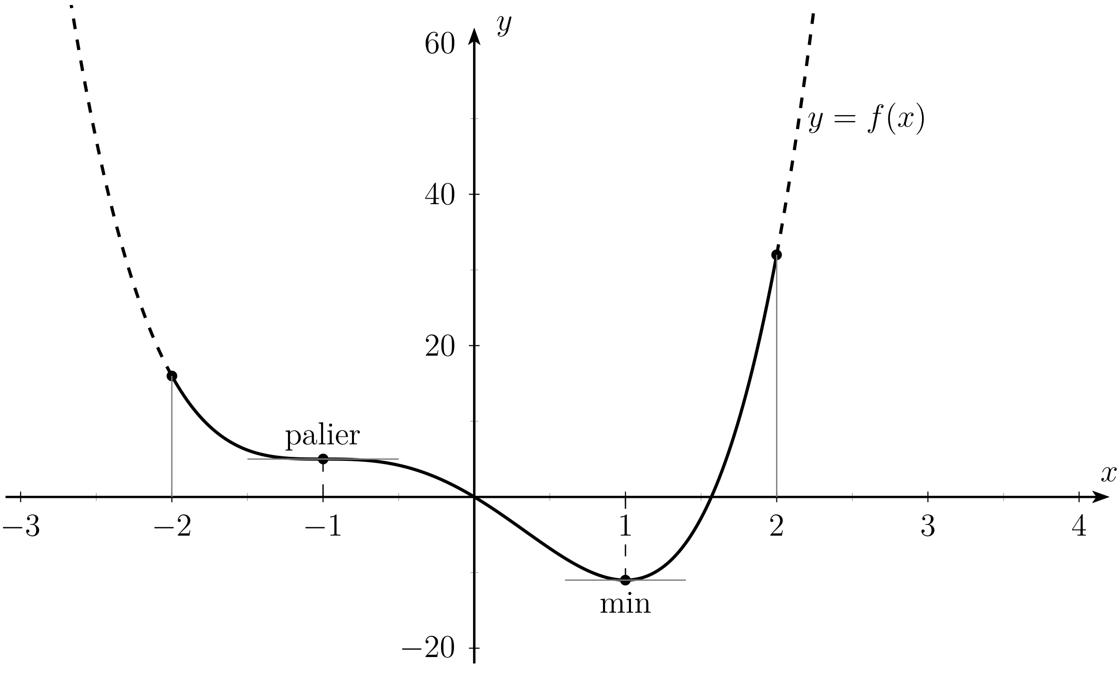
- Extremums : $f(-2) = 16 \Rightarrow$ max local $(-2\,;16)$

$f(-1) = 5 \Rightarrow$ palier $(-1\,;5)$

$f(1) = -11 \Rightarrow$ min absolu $(1\,;-11)$ sur $\mathbb{R}$ donc sur I aussi

$f(2) = 32 \Rightarrow$ max absolu $(2\,;32)$ sur I

- Graphe :



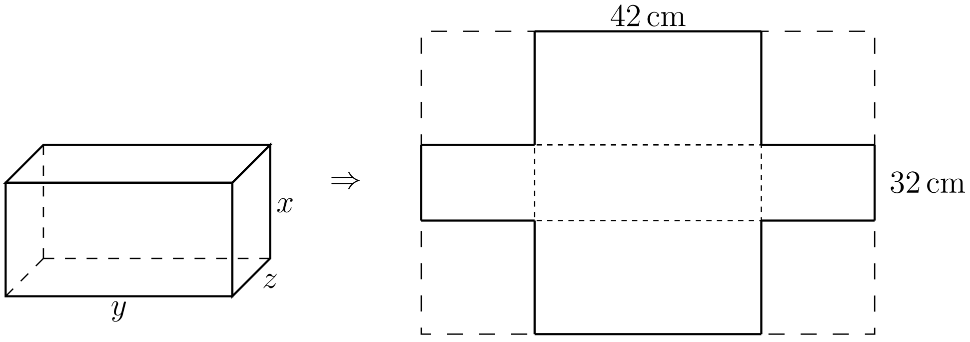
d) de côté

e) de côté

f) de côté

Exercice 5.17.

a) • **Schéma** :



- **Variables** :

  $x =$ longueur du côté du carré à découper (hauteur de la boîte)
  $y =$ longueur du fond de la boîte
  $z =$ largeur du fond de la boîte

- **Quantité à optimiser** : volume à maximiser

b) **Volume en fonction des 3 variables** :

$$V(x\,;y\,;z) = y \cdot z \cdot x$$

c) **Equations liant les 3 variables** :
$y = 42 - 2x$
$z = 32 - 2x = 2(16 - x) \quad ; \quad z > 0 \iff 16 - x > 0 \iff x < 16$

d) **Volume en fonction d'une seule variable** :

$$V(x) = (42 - 2x) \cdot (32 - 2x) \cdot x \quad ; \quad ED:\ x \in \,]\,0\,;16\,[$$
$$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 148x^2 + 1344x$$

e) **Croissance (variation) du volume** V :

- $V'(x) = 12x^2 - 296x + 1344 = 4(3x^2 - 74x + 336) = 4(3x - 56)(x - 6)$
  $\Rightarrow Z_{V'} = \{\,6\,;\,56/3\}$ Attention : $56/3 \notin ED$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

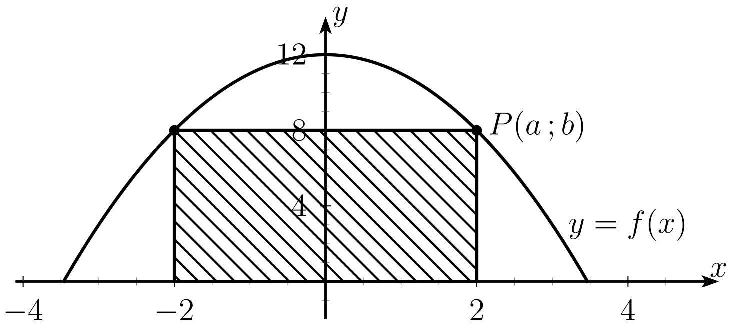
x		6		56/3	
sgn(V')	+	0	−	0	+
variation de V	↗	max	↘	min	↗

f) • **Extremum** : $V(6) = 3'600 \Rightarrow$ max $(6\,;3'600)$

- **Réponse** : Le volume sera maximal ($3'600\,\text{cm}^3$) pour une longueur du côté du carré à découper de 6 cm.

Exercice 5.18.

a) • **Schéma** :



• **Variables** :

$a =$ abscisse du point P
$b =$ ordonnée du point P

• **Quantité à optimiser** : aire à maximiser

b) **Aire en fonction des 2 variables** :

$$A(a\,;b) = 2 \cdot a \cdot b$$

c) **Equation liant les 2 variables** :
$P \in$ courbe d'équation : $y = 12 - x^2 \Rightarrow b = 12 - a^2$

$b \geq 0 \iff 12 - a^2 \geq 0 \iff -\sqrt{12} \leq a \leq \sqrt{12}$

d) **Aire en fonction d'une seule variable** :

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot (12 - a^2) = -2a^3 + 24a \quad ; \quad ED:\ 0 \leq a \leq \sqrt{12}$$

e) **Croissance (variation) de l'aire** A :

• $A'(a) = -6a^2 + 24 = -6(a^2 - 4) = -8(a+2)(a-2)$

$\Rightarrow Z_{A'} = \{\pm 2\}$ Attention : $-2 \notin ED$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		2	
sgn(A')	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
variation de A	↘	min	↗		↗	max	↘

f) • **Extremum** : $A(2) \cong 32 \Rightarrow$ max $(2\,;32)$

• **Réponse** : L'aire maximale vaut 32 [u^2].

Exercice 5.22.

1) $x = 15\,\text{cm}$: $V(15) = 15^2 \cdot (126 - 6 \cdot 15) : 2 = 4'050\,\text{cm}^3$

2) a) • **Schéma** : voir page 128

• **Variables** :
x = longueur du côté du carré de la base du colis
h = hauteur du colis

• **Quantité à optimiser** : volume à maximiser

b) **Volume en fonction des 2 variables** :

$$V(x\,;h) = x^2 \cdot h$$

c) **Equation liant les 2 variables** :
Longueur : $6x + 2h = 126 \Rightarrow h = \dfrac{126 - 6x}{2} = 63 - 3x = 3(21 - x)$

$h > 0 \iff 21 - x > 0 \iff x < 21$

d) **Volume en fonction d'une seule variable** :

$$V(x) = x^2 \cdot (63 - 3x) = -3x^3 + 63x^2 \quad ; \quad ED :\ x \in \,]\,0\,;21\,[$$

e) **Croissance (variation) du volume** V :

• $V'(x) = -9x^2 + 126x = -9x(x - 14) \Rightarrow Z_{V'} = \{0\,;14\}$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x	▨	0		14	
sgn(V')	▨ −	0	+	0	−
variation de V	▨ ↘	min	↗	max	↘

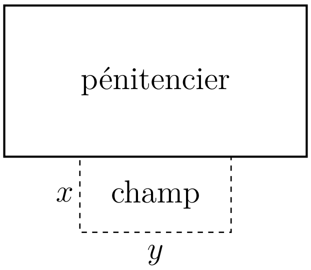
• $x = 14 \Rightarrow h = 63 - 3 \cdot 14 = 21$

f) • **Extremums** : $V(14) = 4'116 \Rightarrow$ max $(14\,;4'116)$
$V(0) = 0 \Rightarrow$ min $(0\,;0)$

• **Réponse** : Le volume sera maximal ($4'116\,\text{cm}^3$) pour les dimensions $14 \times 14 \times 21$ cm.

Exercice 5.24.

a) • **Schéma** :



• **Variables** :

x = largeur du champ
y = longueur du champ

• **Quantité à optimiser** : aire à maximiser

b) **Aire en fonction des 2 variables** :

$$A(x\,;y) = x \cdot y$$

c) **Equation liant les 2 variables** :
Coût : $(2x + y) \cdot 30 = 64'200 \Rightarrow y = 2'140 - 2x = 2(1'070 - x)$

$y > 0 \iff 1'070 - x > 0 \iff x < 1'070$

d) **Aire en fonction d'une seule variable** :

$$A(x) = x \cdot (2'140 - 2x) = -2x^2 + 2'140x \quad ; \quad ED :\ 0 < x < 1'070$$

e) **Croissance (variation) de l'aire** A :

• $A'(x) = -4x + 2'140 = -4(x - 535) \Rightarrow Z_{A'} = \{535\}$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x	▨	0		535	
sgn(A')	▨		$+$	0	$-$
variation de A	▨		$\nearrow$	max	$\searrow$

• $x = 535 \Rightarrow y = 2'140 - 2 \cdot 535 = 1'070$

f) • **Extremum** : $A(535) = 572'450 \Rightarrow$ max $(535\,; 572'450)$

• **Réponse** : L'aire sera maximale ($572'450\,\text{m}^2$) pour les dimensions $535 \times 1'070\,\text{m}$.

Exercice 5.25.

a) • **Schéma** : voir figure page 129

- **Variables** :
  x = hauteur de la boîte
  y = largeur du fond de la boîte

- **Quantité à optimiser** : aire à minimiser

b) **Aire en fonction des 2 variables** :

$$A(x\,;y) = 2\cdot x\cdot y + (x+y+x+y)\cdot 3x = 6x^2 + 8xy$$

c) **Equation liant les 2 variables** :
Volume : $3x\cdot y\cdot x = 2'304 \Rightarrow y = \dfrac{768}{x^2}$

d) **Aire en fonction d'une seule variable** :

$$A(x) = 6x^2 + 8x\cdot\frac{768}{x^2} = \frac{6x^3+6'144}{x} = \frac{6(x^3+1'024)}{x} \quad ; \quad ED:\ x>0$$

e) **Croissance (variation) de l'aire A** :

- $A'(x) = \dfrac{18x^2\cdot x-(6x^3+6'144)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{12x^3-6'144}{x^2} = \dfrac{12(x^3-512)}{x^2} =$

$= \dfrac{12(x-8)(x^2+8x+64)}{x^2} \Rightarrow Z_{A'} = \{\,8\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x	▨	0		8	
sgn(A')	▨ −		−	0	+
variation de A	▨ ↘		↘	min	↗

- $x = 8 \Rightarrow y = 768/64 = 12$

f) • **Extremum** : $A(8) = 1'152 \Rightarrow$ max $(8\,;1'152)$

- **Réponse** : L'aire sera minimale ($1'152\,\text{cm}^2$) pour les dimensions
  8 x 12 x 24 cm.