



Gymnase de Burier



EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ, JUIN 2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Niveau renforcé**CORRIGÉ****Problème 1** (14 points)La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 - 2x - 3}$$

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(x^2 - 2x - 15)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+1)}$ Ainsi $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$

2 points

b) Utilisons $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

$$u = 2x^2 - 4x - 30 \Rightarrow u' = 4x - 4 = 4(x-1)$$

$$v = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow v' = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x-1)(x^2 - 2x - 3) - (2x^2 - 4x - 30) \cdot 2(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x-1)[2x^2 - 4x - 6 - 2x^2 + 4x + 30]}{(x-3)^2(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x-1) \cdot 24}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{48(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

4 points

c) On établit le tableau des variations de la fonction $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	+	
$f(x)$	$+\infty$	↙ ↘ Min		$+\infty$	

Il y a un minimum en $x = 1$ et $f(1) = \frac{2 - 4 - 30}{1 - 2 - 3} = \frac{-32}{-4} = 8$.

Les coordonnées du minimum : $M(1; 8)$.

4 points

d) — Les coordonnées du point T : $f(2) = \frac{8 - 8 - 30}{4 - 4 - 3} = \frac{-30}{-3} = 10 \Rightarrow T(2; 10)$.

— La pente de la tangente au point T : $f'(2) = \frac{48 \cdot 1}{9 \cdot 1} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

— Une équation de la tangente t : $(t) : y = \frac{16}{3}x + h$.

Par le point T : $10 = \frac{16}{3} \cdot 2 + h \Rightarrow h = 10 - \frac{32}{3} = \frac{-2}{3}$.

Finalement $(t) : y = \frac{16}{3}x - \frac{2}{3}$.

4 points

Problème 2 (6 points)

Pour calculer le volume, on utilise la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-9}^9 (\sqrt{x^2 + 0,5})^2 dx = \pi \int_{-9}^9 \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_{-9}^9 = \pi \left[\frac{2x^3}{6} + \frac{3x}{6}\right]_{-9}^9 = \frac{\pi}{6} [2x^3 + 3x]_{-9}^9 \\
 &= \frac{\pi}{6} [(2 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9) - (2 \cdot (-9)^3 + 3 \cdot (-9))] = \frac{\pi}{6} (1'485 - (-1'485)) \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot 2'970 = 495 \pi
 \end{aligned}$$

6 points

Problème 3 (18 points)

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 \\ -9 & -11 & -4 \\ 2 & 10 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } h(u) = (0; 0; 0)$$

2 points

b) *Variante 1 :*

$$\det(H) = 11(11 + 40) + 9(-9 - 60) + 2(-36 + 66) = 561 - 621 + 60 = 0$$

donc h n'est pas un automorphisme.

Variante 2 :

$$h(u) = (0; 0; 0) \text{ par l'alinéa a), donc } u \in \ker(h), \text{ ainsi } \ker(h) \neq (0; 0; 0).$$

Alors h n'est pas un automorphisme.

2 points

c) Calcul des valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 11 - \lambda & 9 & 6 \\ -9 & -11 - \lambda & -4 \\ 2 & 10 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (11 - \lambda)(11 + 12\lambda + \lambda^2 + 40) + 9(-9 - 9\lambda - 60) + 2(-36 + 66 + 6\lambda) \\ &= (11 - \lambda)(51 + 12\lambda + \lambda^2) + 9(-69 - 9\lambda) + 2(30 + 6\lambda) \\ &= 561 + 132\lambda + 11\lambda^2 - 51\lambda - 12\lambda^2 - \lambda^3 - 621 - 81\lambda + 60 + 12\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 12) = -\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc : $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -4$ $\lambda_3 = 3$

4 points

d) • Espace propre associé à $\lambda_2 = -4$:

$$\begin{aligned} H + 4I &= \begin{pmatrix} 15 & 9 & 6 \\ -9 & -7 & -4 \\ 2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{3}L_1 \\ 5L_2 + 3L_1 \\ 15L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 132 & 33 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{33}L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 4L_1 - 3L_2 \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 20 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{20}L_1 \\ \frac{1}{4}L_2 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$E_{-4} = \langle (-1; -1; 4) \rangle$$

3 points

- Espace propre associé à $\lambda_3 = 3$:

$$H - 3I = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -9 & -14 & -4 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 4L_3 \\ L_2 + \frac{9}{2}L_3 \\ \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -31 & 22 \\ 0 & 31 & -22 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ 31L_3 - 5L_2 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -22 \\ 31 & 0 & 48 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{31}L_2 \\ \frac{1}{31}L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -22/31 \\ 1 & 0 & 48/31 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \langle (-48; 22; 31) \rangle$$

3 points

- e) Par exemple, $\mathcal{B}^* = ((3; -1; -4); (-1; -1; 4); (-48; 22; 31))$

$$H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ exprimée dans la base } \mathcal{B}^*.$$

2 points

- f) $\ker(h) = E_0 = \langle (3; -1; -4) \rangle$ par c)

2 points

Problème 4 (23 points)

- a) On doit montrer que \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{BE} (par exemple) ne sont pas colinéaires. On utilise alors le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Le produit vectoriel est non nul donc les points B , D et E ne sont pas alignés.

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 2z + d = 0, B \in \alpha \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 2z = 0$$

Variante :

Soit $M(x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}$ et \overrightarrow{BE} sont coplanaires.

$$\Leftrightarrow (\alpha) : \begin{vmatrix} x-2 & -2 & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)(1) - (y-1)(2) + z(2) = x - 2 - 2y + 2 + 2z = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 2z = 0$$

5 points

- b) L'équation cartésienne de la sphère Σ s'écrit :

$$(\Sigma) : (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = r^2, A \in \Sigma \Rightarrow (0-2)^2 + 4^2 + (6-2)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow r = 6 \Rightarrow (\Sigma) : (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 36$$

2 points

- c) $(\alpha) : x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: vecteur directeur de la droite d .

$$\Rightarrow (d) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

2 points

d) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \delta(A; d) = \frac{\|\overrightarrow{CA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{9}}$$

$$\Rightarrow \delta(A; d) = \frac{8\sqrt{5}}{3} \text{ [u]}$$

3 points

- e) Les extrémités du diamètre de la sphère Σ perpendiculaire au plan α sont les points d'intersection de la droite d et de la sphère Σ .

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow (2+k-2)^2 + (-2k)^2 + (2+2k-2)^2 = 36 \Rightarrow k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$\bullet \text{ si } k = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = -2(-2) = 4 \\ z = 2 + 2(-2) = -2 \end{cases} \Rightarrow I_1(0; 4; -2)$$

$$\bullet \text{ si } k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 = 4 \\ y = -2(2) = -4 \\ z = 2 + 2(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow I_2(4; -4; 6)$$

4 points

- f) Le plan α coupe la sphère Σ si $\delta(C; \alpha) < r$.

$$\delta(C; \alpha) = \frac{|2 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ [u]} < r = 6 \text{ [u]}$$

$$\Rightarrow \text{Le plan } \alpha \text{ coupe la sphère } \Sigma$$

2 points

- g) L'intersection de α et Σ est un cercle γ .

$$\text{Par Pythagore : } r' = \sqrt{r^2 - |\delta(C; \alpha)|^2} \Rightarrow r' = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} \Rightarrow r' = 4\sqrt{2} \text{ [u]}$$

Le centre C' est l'intersection de d et α :

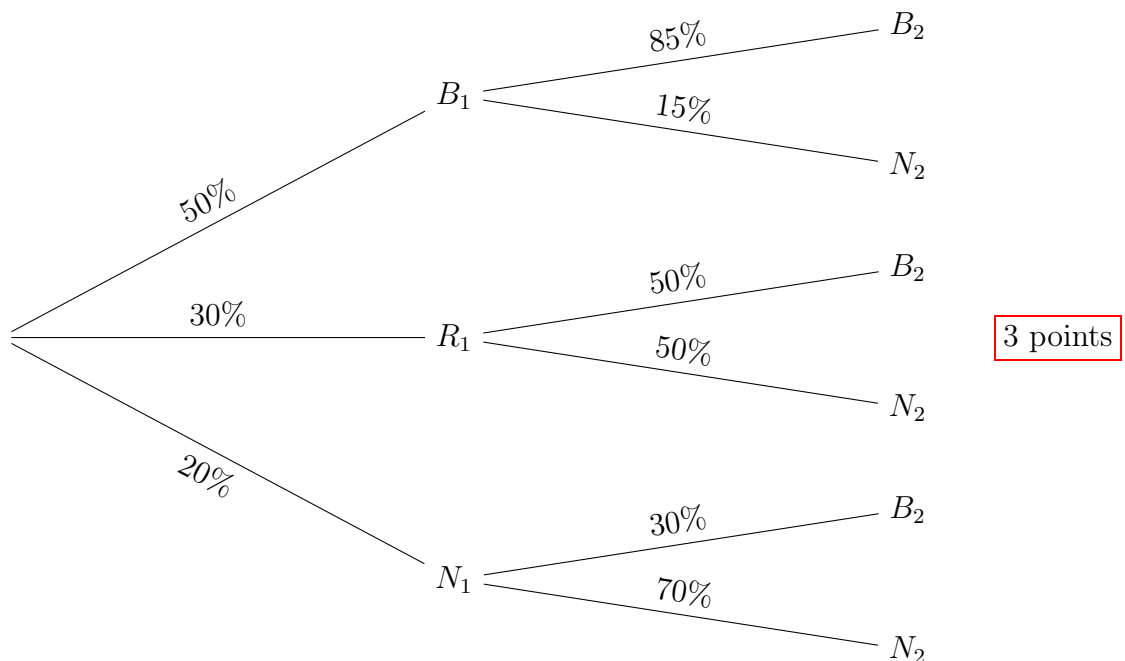
$$\Rightarrow 2 + k - 2(-2k) + 2(2 + 2k) = 0 \Rightarrow 9k + 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = -2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ z = 2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C' \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

5 points

Problème 5 (13 points)

a) Le diagramme en arbre qui indique les probabilités sur chaque branche :



b) $P(R_1 \cap B_2) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 = 15\%$ 1 points

c) $P(\text{a skié sur piste noire}) = P(N_1) + P(B_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_2) = 0,2 + 0,5 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,2 + 0,075 + 0,15 = 0,425 = 42,5\%$ 2 points
 (ou $1 - (P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2)) = 1 - (0,5 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,5) = 1 - 0,575 = 0,425 = 42,5\%$)

d) $P(\text{a skié sur piste noire}) = 0,425 = 42,5\%$
 $P(\text{n'a pas skié sur piste noire}) = 1 - 0,425 = 0,575 = 57,5\%$
 $P(1 \text{ exactement sur } 6 \text{ a skié sur piste noire}) = 6 \cdot 0,425^1 \cdot 0,575^5 \cong 0,1603 = 16,03\%$ 2 points

e)
$$P(N_1|N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(B_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2)}$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,5 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,7} = \frac{0,14}{0,365} \cong 0,3836 = 38,36\%$$
 3 points

f) $P(B_1) = 50\%$, $P(R_1) = 30\%$ et $P(N_1) = 20\%$ et de e) on a $P(N_2) = 0,365 = 36,5\%$
 Ainsi $P(B_2) = 1 - 0,365 = 0,635 = 63,5\%$
 $(P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = 0,5 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,635 = 63,5\%)$

Il y a eu le plus de skieurs sur la piste B_2 . 63,5% des skieurs ont skié dessus.

On peut aussi affirmer directement que ce sera la piste B_2 , car il y a moins de 50% de chances qu'un skieur ait skié sur une piste noire. Ainsi plus de la moitié des skieurs auront skié sur B_2 , ce qui sera le pourcentage le plus élevé. 2 points

Problème 6 (6 points)

- a) Il y a $7! = 5'040$ ordres différents. 1 point
- b) Il y a 5 (=7-2) choix pour la tête de groupe, puis 4 (=7-3) choix pour la queue de groupe et enfin $5!$ choix pour les 5 skieuses du milieu.
On a donc : $5 \cdot 4 \cdot 5! = 2'400$ ordres possibles. 2 points
- c) Il y a $A_3^7 = 210$ podiums possibles. 1 point
- d) Il y a $C_3^7 = 35$ possibilités (ou $C_4^7 = 35$). 2 points

Problème 7 (11 points)

- a) $N(x) = x^3 \cdot e^{-0,02x}$

$$N'(x) = 3x^2 \cdot e^{-0,02x} + x^3 \cdot (-0,02) \cdot e^{-0,02x} = 3x^2 \cdot e^{-0,02x} - 0,02x^3 \cdot e^{-0,02x}$$

$$= e^{-0,02x} \cdot x^2(3 - 0,02x) = 0,02 e^{-0,02x} \cdot x^2 \left(\frac{3}{0,02} - x \right) = 0,02 x^2 (150 - x) \cdot e^{-0,02x}$$

$$= \frac{2}{100} x^2 (150 - x) \cdot e^{-0,02x} = \frac{1}{50} x^2 (150 - x) \cdot e^{-0,02x}$$
 4 points
- b) On cherche $N'(x) = 0$ pour obtenir les extrema.
Comme $e^{-0,02x} > 0$, on a que $N'(x) = 0$ lorsque $x^2(150 - x) = 0$.
Comme $x \in \mathbb{N}^*$, $x^2(150 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 150$.

x	$-\infty$	1	150	$+\infty$	
$\frac{1}{50} x^2(150 - x)$			+	0	-
$e^{-0,02x}$			+		+
$N'(x)$			+	0	-
Croissance de $N(x)$			\nearrow	Max	\searrow

Grâce au tableau de croissance, on obtient qu'au 150^{ème} jour le nombre d'écoutes sera maximum. 3 points

c) $N(150) = 150^3 \cdot e^{-0,02 \cdot 150} \cong 3'375'000 \cdot 0,049787 \cong 168'031,35$

Il y aura 168'031 écoutes au maximum en un jour.

$(N(50) = 50^3 \cdot e^{-0,02 \cdot 50} = 125'000 \cdot e^{-1} \cong 45'984,93)$ 1 point

d) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^{-0,02x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{0,02x}}$ est indéterminé.

On calcule alors avec Bernoulli - l'Hospital :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{0,02x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{0,02 \cdot e^{0,02x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{0,02^2 \cdot e^{0,02x}} \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{0,02^3 \cdot e^{0,02x}} = \frac{6}{+\infty} = 0_+ \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = 0_+ = 0$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le nombre d'écoutes tend vers 0 quotidiennement.

3 points