



Gymnase de Burier - DEF|DGEP

Case postale 96

Rte de Chailly 170

1814 La Tour-de-Peilz



EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU RENFORCÉ

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Dure de l'épreuve : 4 heures

Consignes : Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés

Matériel autorisé : Formulaires officiels non annotés

Calculatrice : TI 30 ECO RS

Problème 1 (14 points)

On considère la fonction f définie par :

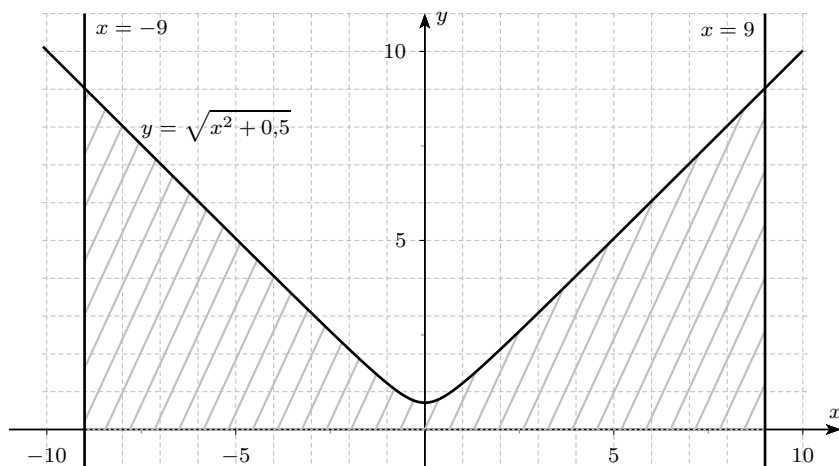
$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 - 2x - 3}$$

- Déterminer l'ensemble de définition $ED(f)$ de la fonction.
- Montrer que $f'(x) = \frac{48(x-1)}{(x+1)^2(x-3)^2}$
- Étudier la croissance de la fonction et donner les coordonnées des extrema.
- Déterminer une équation de la tangente t au graphe de f en son point d'abscisse $x = 2$.

Problème 2 (6 points)

Un sablier est construit sur le modèle d'un solide de révolution, engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine fermé et limité par les droites d'équation $x = -9$ et $x = 9$, par l'axe Ox et par la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 + 0,5}$.

Déterminer le volume du sablier.



Problème 3 (18 points)

On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice H relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

$$H = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 \\ -9 & -11 & -4 \\ 2 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Soit $u = (6; -2; -8) \in \mathbb{R}^3$. Calculer l'image de u par h .
- b) h est-il un automorphisme, c'est-à-dire un endomorphisme bijectif? Justifier la réponse.
- c) Montrer, à l'aide du polynôme caractéristique, que les valeurs propres de h sont :
 $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4 \quad \lambda_3 = 3$.
- d) Le sous-espace propre E_0 associé à $\lambda_1 = 0$ est engendré par $(3; -1; -4)$.
Déterminer les sous-espaces propres E_{-4} et E_3 .
- e) Déterminer une base $\mathcal{B}^*$ dans laquelle la matrice H^* de h est diagonale.
Déterminer également H^* exprimée dans la base $\mathcal{B}^*$.
- f) Déterminer le noyau de h .

Problème 4 (23 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, on considère :

- les points $A(0; 4; 6)$, $B(2; 1; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(0; 1; 1)$ et $E(2; 0; -1)$
 - la sphère Σ de centre C et passant par A .
- a) Montrer que B , D et E ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan α passant par ces points.
- En cas de doute, prendre $(\alpha) : x - 2y + 2z = 0$ pour la suite du problème*
- b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère Σ .
- c) Déterminer une équation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan α et passant par le centre de la sphère Σ .
- d) Calculer la distance du point A à la droite d .
- e) Déterminer les extrémités du diamètre de la sphère Σ perpendiculaire au plan α .
- f) Prouver que le plan α coupe la sphère Σ .
- g) L'intersection de α et Σ est un cercle γ . Déterminer son centre C' et son rayon r' .

Problème 5 (13 points)

Une petite station de ski comprend cinq pistes et un unique téléphérique qui relie le bas de la station au sommet de la montagne. Depuis le sommet du téléphérique, les skieurs ont la possibilité de choisir entre une piste bleue (B_1), une piste rouge (R_1) et une piste noire (N_1). Ces trois pistes arrivent toutes au restaurant *Le Chamois*.

Depuis le restaurant, les skieurs peuvent à nouveau choisir entre deux pistes à savoir une piste bleue (B_2) et une piste noire (N_2) qui mènent toutes deux au bas de la station.

On considère qu'un skieur a effectué une descente lorsqu'il est parti du sommet et a rejoint le bas de la station.

Une étude a montré que depuis le sommet la moitié des skieurs s'élancent sur la piste B_1 , 30% des skieurs choisissent la piste R_1 et les autres skieurs optent pour la piste N_1 .

Une fois arrivés au restaurant *Le Chamois* :

- 85% des skieurs provenant de la piste B_1 choisissent de continuer sur la piste B_2 alors que 15% optent pour la piste N_2 ;
 - les skieurs provenant de la piste R_1 se repartissent équitablement entre les pistes B_2 et N_2 ;
 - les skieurs provenant de la piste N_1 sont 70% à continuer sur la piste N_2 alors que 30% poursuivent sur la piste B_2 .
- a) Représenter la situation à l'aide d'un diagramme en arbre en indiquant les probabilités sur chaque branche.
- b) Calculer la probabilité qu'un skieur pris au hasard à l'arrivée vienne de parcourir la piste R_1 puis la piste B_2 .
- c) Montrer que la probabilité qu'un skieur pris au hasard à l'arrivée d'une descente ait skié sur au moins une piste noire est de 42,5%.
- d) À l'arrivée de la première descente, on choisit 6 skieurs au hasard.
Calculer la probabilité qu'exactement un d'entre eux ait skié sur au moins une piste noire.
- e) On voit une skieuse arriver sur la piste N_2 .
Calculer la probabilité qu'elle ait skié sur la piste N_1 durant cette descente.
- f) Un jour, le téléphérique est tombé en panne et les skieurs n'ont pu effectuer qu'une seule descente.
Déterminer, parmi les cinq pistes, celle qui a la plus grande probabilité d'être pratiquée.
Justifier la réponse.

Problème 6 (6 points)

Un groupe de 7 amies décident d'aller skier ensemble.

- a) Dans combien d'ordres différents peuvent-elles skier si elles décident de se suivre ?
- b) Parmi les sept skieuses, ni Amandine ni Stéphanie ne souhaitent skier en tête ou en fin de groupe. Combien y a-t-il d'ordres possibles ?
- c) À la fin de la journée, les 7 amies décident de faire la course. Combien y a-t-il de podiums (classement des trois premières) possibles s'il n'y a pas d'égalités ?
- d) Afin de quitter la station, les amies doivent emprunter un bus qui descend en plaine. Lorsqu'elles se présentent devant le bus de 17h, il reste uniquement 3 places disponibles. Les amies décident alors de se séparer en un groupe de 3 et un groupe de 4. Combien existe-t-il de possibilités ?

Problème 7 (11 points)

Un chanteur peu connu a sorti une nouvelle chanson. Une étude a permis d'établir que le nombre d'écoutes quotidiennes de cette chanson sur une plateforme musicale en fonction du nombre de jours x écoulés depuis que la chanson est disponible est donné par :

$$N(x) = x^3 \cdot e^{-0,02x} \quad \text{avec } x \geq 1$$

- a) Montrer que la dérivée de la fonction $N(x)$ est donnée par :

$$N'(x) = \frac{1}{50} x^2 (150 - x) \cdot e^{-0,02x}$$

- b) Après combien de jours le nombre d'écoutes sera-t-il maximal ? Justifier la réponse.
- c) Combien y aura-t-il d'écoutes ce jour-là ?
(Si vous n'avez pas trouvé de réponse au point précédent, utiliser $x = 50$.)
- d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)$ et interpréter le résultat.