



Gymnase de Burier
Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz



EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2023

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau Renforcé

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Dure de l'épreuve : 4 heures

Consignes : Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés

Matériel autorisé : Formulaires officiels non annotés

Calculatrice : TI 30 ECO RS

Problème 1 (21 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{x + 1}$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
- b) Étudier le signe de la fonction.
- c) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes.
- d) Étudier la croissance de la fonction en donnant les coordonnées des extrema.
- e) Représenter graphiquement la fonction.

Problème 2 (18 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne

- les points $A(3; 1; 0)$ et $P(3; -4; 5)$;
- le plan α d'équation $4x + y + 7z - 13 = 0$;
- la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 12y + 4z - 16 = 0$;
- et le cercle γ déterminé par l'intersection de la sphère Σ avec le plan α :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 12y + 4z - 16 = 0 \\ 4x + y + 7z - 13 = 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon R de la sphère Σ .
- b) Calculer les coordonnées du centre M et le rayon r du cercle γ .
- c) Vérifier que le point A appartient au cercle γ .
- d) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Γ coupant la sphère Σ selon le cercle γ et passant par le point P .

Problème 3 (10 points)

Une station service décide de faire une action en baissant le prix de l'essence pendant un mois afin d'attirer de nouveaux clients. La fonction f représentant le nombre de litres d'essence vendus après x jours de cette promotion s'exprime par

$$f(x) = 60x^2 \cdot e^{-0,25x} + 1'500$$

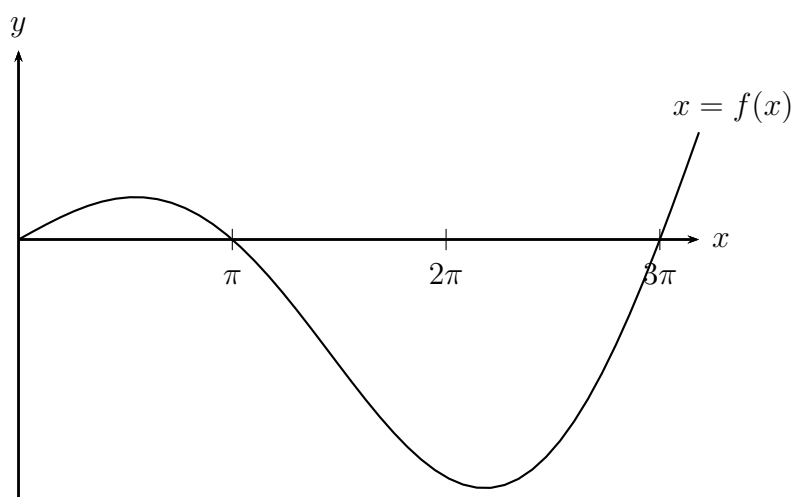
- Déterminer le nombre de litres d'essence vendus juste avant la promotion ($x = 0$).
- Combien de jours faut-il attendre pour vendre un maximum de litres d'essence ?
- Déterminer le nombre maximal de litres d'essence vendus en un jour.

Problème 4 (9 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Déterminer une primitive F de la fonction f en intégrant par parties.
- Calculer la valeur exacte de l'aire géométrique totale des domaines bornés limités par la courbe $y = f(x)$ et l'axe Ox entre les verticales $x = 0$ et $x = 3\pi$.



Problème 5 (7 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-x}{x}.$$

On désigne par D le domaine borné limité par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = 1$ et $x = 2$. Calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox .

Problème 6 (17 points)**Partie 1**

Soit k un réel et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$H = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 5/3 & 2/3 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Pour quelle valeur de k l'endomorphisme h est-il surjectif? Justifier.

Partie 2

Pour $k = 3$, la matrice de H s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 5/3 & 2/3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculer l'image par h de $u = (-1/2; -1/2; 1/2)$.
- Déterminer une base de l'image de h .
- Déterminer, par calcul, une base relativement à laquelle la matrice de h est diagonale.

Problème 7 (16 points)

Dès le mois de décembre 2022, la compagnie ferroviaire MOB, Montreux-Oberland-Bernois, propose une nouvelle liaison Montreux-Interlaken avec le train GoldenPass Express (GPX). En gare de Montreux, le matériel roulant à disposition est le suivant :

- deux types de locomotives qui se distinguent par leur couleur : blanche ou noire ;
 - deux types de wagons qui se distinguent par leur classe : 1^{re} ou 2^e classe.
- a) Un train GPX est composé d'une locomotive en tête de train suivie de quatre wagons. Combien y a-t-il de trains GPX possibles si :
- 1) il n'y a aucune restriction ;
 - 2) il doit y avoir un wagon de 1^{re} classe et trois wagons de 2^e classe ;
 - 3) il doit y avoir au moins un wagon de 1^{re} classe.
- b) Au cours des cinq premiers mois d'exploitation, la direction a observé que la ponctualité de ses trains GPX dépendait beaucoup des conditions météorologiques. En effet, la neige ou la pluie tombent en grande quantité sur cette région.

Statistiquement la météo est défavorable pour un train GPX sur vingt. Les trains GPX sont à l'heure neuf fois sur dix si la météo est favorable alors que les trains GPX sont en retard une fois sur cinq si la météo est défavorable.

- 1) Représenter cette situation par un arbre.
- 2) Montrer que la probabilité qu'un train GPX soit à l'heure vaut 89.5%.
- 3) Sachant qu'un train GPX est en retard, calculer la probabilité que la météo soit défavorable.
- 4) Chaque jour, huit trains GPX circulent sur cette ligne. Calculer la probabilité qu'au plus un train GPX soit en retard.