Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau Renforcé

Problème 1 (21 points)

a) $(\Sigma):\ x^2+(y-2)^2+z^2=9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(0;2;0)\ ;\ r=3\,[\text{u}]}$

b) $\delta(C;\alpha)=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 0-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{15}{5}=3\,[\text{u}]=r \qquad \boxed{\text{CQFD}}$

c) $\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}7\\6\\-6\end{pmatrix}$, vecteurs directeurs de β

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}24\\-10\\18\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}12\\-5\\9\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\beta):\ 12x-5y+9z+d=0$$

$$\overset{C\in\beta}{\Rightarrow} \quad -10+d=0 \Leftrightarrow d=10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\beta):\ 12x-5y+9z+10=0}$$

d) $(CP):\ \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x&=&7k\\ y&=&2+6k\\ z&=&-6k\end{array}\right. ,k\in\mathbb{R}}$

e) (i) $C'(7k;2+6k;-6k)$

(ii) $\delta(C';\alpha)=r' \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|3\cdot 7k-4\cdot(-6k)-15|}{5}=r'$

(iii) $\|\overrightarrow{CC'}\|=r+r' \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(7k)^2+(6k)^2+(-6k)^2}=3+r' \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{121\,k^2}=3+r'$

$$\Leftrightarrow \quad 11\cdot|k|=3+r' \quad \Leftrightarrow \quad r'=11\cdot|k|-3$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \quad \frac{|45k-15|}{5}=11\cdot|k|-3 \quad \Leftrightarrow \quad |9k-3|=11\cdot|k|-3 \quad \Leftrightarrow \quad 9k-3=\pm\big(11\cdot|k|-3\big)$$

$\Rightarrow$ (1) $9k-3=11\cdot|k|-3 \quad \Leftrightarrow \quad 9k=11\,|k| \quad \Leftrightarrow \quad k=0 \quad \longrightarrow \quad \Sigma$

(2) $9k-3=-11\,|k|+3 \quad \Leftrightarrow \quad 9k-6=-11\,|k| \quad \Leftrightarrow \quad 9k-6=\pm 11\,|k|$

$\Rightarrow$ (3) $9k-6=11k \quad \Leftrightarrow \quad k=-3$

(4) $9k-6=-11k \quad \Leftrightarrow \quad k=\dfrac{3}{10}$

(a) si $k=-3$, $C'(-21;-16;18)$ et $r'=11\cdot 3-3=30\,[\text{u}]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\Sigma'):\ (x+21)^2+(y+16)^2+(z-18)^2=900}$$

(b) si $k=\dfrac{3}{10}$, $C'\left(\dfrac{21}{10};\dfrac{19}{5};-\dfrac{9}{5}\right)$ et $r'=11\cdot\dfrac{3}{10}-3=\dfrac{3}{10}\,[\text{u}]$

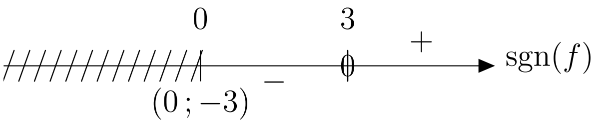
$$\Rightarrow \quad \boxed{(\Sigma'):\ \left(x-\frac{21}{10}\right)^2+\left(y-\frac{19}{5}\right)^2+\left(z+\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{100}}$$

Problème 2 (11 points)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) $\boxed{ED(f) = \mathbb{R}_+}$

b) 

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{"} +\infty\cdot(+\infty)\text{"} = +\infty \Rightarrow$ aucune AHD.

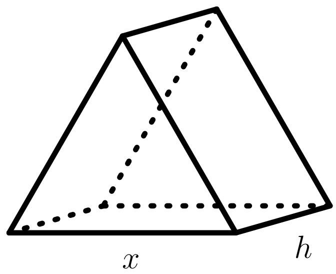
d) $f'(x) = 1\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(2\sqrt{x}+x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

e)
- point de tangence : $f(4) = \mathrm{e}^2 \Rightarrow T(4\,;\mathrm{e}^2)$
- pente : $m_4 = f'(4) = \dfrac{5\,\mathrm{e}^2}{4}$
- l'équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ passant par T est :

  $(t) : y = \dfrac{5\,\mathrm{e}^2}{4}\cdot x + h$ passe par $T \iff \mathrm{e}^2 = \dfrac{5\,\mathrm{e}^2}{4}\cdot 4 + h \iff h = -4\,\mathrm{e}^2$

  $\Rightarrow \boxed{(t):\ y = \dfrac{5\,\mathrm{e}^2}{4}\cdot x - 4\,\mathrm{e}^2} \iff \boxed{(t):\ 5\,\mathrm{e}^2\cdot x - 4y - 16\,\mathrm{e}^2 = 0}$

Problème 3 (18 points)



a) La base du prisme est un triangle équilatéral : $A_{base}(x) = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$

Le volume du prisme : $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{4} h = 483 \;\Rightarrow\; h = \dfrac{483 \cdot 4}{\sqrt{3}\,x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}\,x^2}$

L'aire d'une face : $A_{face}(x) = h \cdot x = \dfrac{1932x}{\sqrt{3}\,x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}\,x} = \dfrac{1932\sqrt{3}}{3x}$

L'aire totale de cet emballage : $A(x) = 2 \cdot A_{base}(x) + 3 \cdot A_{face}(x) = \dfrac{2\sqrt{3}\,x^2}{4} + \dfrac{3 \cdot 1932\sqrt{3}}{3x}$

$$\Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}}$$

b) <u>Fonction</u> : $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + \dfrac{1932\sqrt{3}}{x}$

<u>Dérivée</u> : $A'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + \dfrac{1932\sqrt{3}}{x}\right)' = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} - 1932\sqrt{3}\,x^{-2}$

$$\Rightarrow \boxed{A'(x) = \frac{\sqrt{3}\,(x^3 - 1932)}{x^2}}$$

c) <u>Zéro de la dérivée</u> : $A'(x) = 0 \iff x^3 - 1932 = 0 \iff x^3 = 1932 \Rightarrow x \cong 12.5\,\text{cm}$.

<u>Condition</u> : $x > 0$

<u>Croissance</u> :

x	$-\infty$		0		12.5		$+\infty$
$\operatorname{sgn}(A')$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de A			$+\infty$	$\searrow$	403	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Minimum</u> : $x \cong 12.5$ et $A(12.5) \cong 403\,\text{cm}^2$

Alors la hauteur de cet emballage est donnée par $h = \dfrac{1932}{\sqrt{3}\,(12.5)^2} \cong 7.19\,\text{cm}$

Dimensions de cet emballage au millimètre près : $\boxed{x = 125\,\text{mm}\,;\, h = 72\,\text{mm}}$

Problème 4 (20 points)

a) $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+3z \\ 3x-5y+3z \\ 6x-6y+4z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{f(u) \;=\; (x-3y+3z; 3x-5y+3z; 6x-6y+4z)}$

c) Pour prouver que l'application linéaire est bijective, il suffit de montrer que $\text{Ker}(f) = \{(0;0;0)\}$, car c'est un endomorphisme.

Déterminons $\text{Ker}(f)$: $f((x;y;z)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ 3x-5y+3z=0 \\ 6x-6y+4z=0 \end{cases}$

Comme $\text{Det}(M) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1(-20+18) - 3(-12+18) + 6(-9+15) = 16 \neq 0$, la solution du système est unique, c'est donc la solution triviale $(0;0;0)$

$\Rightarrow \boxed{\text{Ker}(f) = \{(0;0;0)\} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}}$ *CQFD*

d)

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \text{Det}(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = \boxed{-(\lambda+2)^2(\lambda-4)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de h sont les zéros de $p(\lambda) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = 4}$

e) • Le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est le noyau de $f+2\lambda$:

Echelonnons $M+2I$: $\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x-y+z=0$

On pose $y=k$ et $z=l$ où $k,l\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}x=k-l\\ y=k\\ z=l\end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-2}=\{k(1;1;0)+l(-1;0;1)\,|\,k,l\in\mathbb{R}\}=L\left((1;1;0)\,;(-1;0;1)\right)}$

• Le sous-espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 est le noyau de $f-4\lambda$:

Echelonnons $M-4I$: $\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix} \underset{\frac{1}{6}L_3\to L_3}{\overset{\frac{1}{3}L_2\to L_2}{\backsim}} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{L_3-L_1\to L_3}{\overset{L_2-L_1\to L_2}{\backsim}} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \backsim$

$\underset{L_3-\frac{1}{2}L_2\to L_3}{\overset{-\frac{1}{4}L_2\to L_2}{\backsim}} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \overset{L_1-L_2\to L_1}{\backsim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

On pose $z=2k$, $k\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}x=k\\ y=k\\ z=2k\end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{E_4=\{k(1;1;2)\,|\,k\in\mathbb{R}\}=L\left((1;1;2)\right)}$

• $\Rightarrow \boxed{\mathcal{B}'=\left((1;1;0)\,;(-1;0;1)\,;(1;1;2)\right)}$

f) P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de f et M' est la matrice dont la diagonale est constituée des valeurs propres de h :

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{M'=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}}$$

Problème 5 (8 points)

- Le volume extérieur est un cylindre formé par la rotation de la droite a entre x_A et $x = 5$.

  Sachant que $y_A = 6$ on résout

$$\frac{6}{3x-5} = 6 \;\Rightarrow\; 3x - 5 = 1 \;\Rightarrow\; x_A = 2 \;\Rightarrow A(2;6)$$

  Ainsi, le volume extérieur,

$$V_{ext} = \pi \cdot 6^2 \cdot (5-2) = 108\,\pi\,[\mathrm{u}^3]$$

- Pour le volume intérieur,

$$V_{int} = \pi \int_2^5 \left(\frac{6}{3x-5}\right)^2 dx = 36\,\pi \int_2^5 (3x-5)^{-2}\,dx = 36\,\pi \left[-\frac{1}{3}(3x-5)^{-1}\right]_2^5 =$$
$$= 36\,\pi \left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{3}\right) = \frac{54}{5}\,\pi\,[\mathrm{u}^3]$$

- Le volume de ce solide de révolution est donné par :

$$V = V_{ext} - V_{int} = 108\,\pi - \frac{54}{5}\,\pi = \boxed{\frac{486}{5}\,\pi\,[\mathrm{u}^3]}$$

Problème 6 (18 points)

Partie A

a) $\overline{A}_5^3 = 3^5 = \boxed{243}$ planifications différentes.

b) $\boxed{\text{Une seule façon}}$, rester en bord de mer.

c) $\overline{A}_5^2 = 2^5 = \boxed{32}$ planifications sans passer par la route.

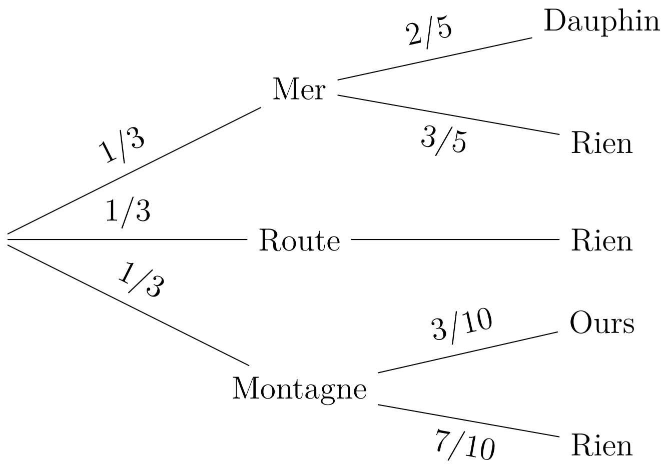
d) $\overline{P}_5\,(2\,;2) = \dfrac{5!}{2!\,2!} = \boxed{30}$ planifications avec 2 par la mer, 2 par les montagnes et 1 par la route.

Variante : $C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1$

e) $3^5 - 2^5 = \boxed{211}$ planifications en passant au moins une fois par les montagnes.

Partie B

a)



b) $P(\text{Mer} \cap \text{Dauphin}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15} \cong \boxed{13.33\,\%}$

c) $P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours}) = P(\text{Dauphin}) + P(\text{Ours}) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{30} \cong \boxed{23.33\,\%}$

d) $P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours} \,|\, \overline{\text{Route}}) = \dfrac{P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours})}{P(\overline{\text{Route}})} = \dfrac{7/30}{2/3} = \dfrac{7}{20} = \boxed{35\,\%}$

Variante : $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{7}{20}$

e) $P(\text{Au moins un dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer}) = 1 - P(\text{Aucun dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer})$
$= 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \cong \boxed{92.22\,\%}$

Répartition des points

Problème 1 Géométrie	
a)	2 points
b)	2 points
c)	6 points
d)	1 point
e)	10 points
Total	**21 points**

Problème 2 Analyse	
a)	1 point
b)	2 points
c)	2 points
d)	3 points
e)	3 points
Total	**11 points**

Problème 3 Optimisation	
a)	7 points
b)	3 points
c)	8 points
Total	**18 points**

Problème 4 Algèbre linéaire	
a)	1 point
b)	2 points
c)	2 points
d)	6 points
e)	7 points
f)	2 points
Total	**20 points**

Problème 5 Calcul intégral	
Total	**8 points**

Problème 6 Combinatoire - Probabilités	
Partie A	
a)	1 point
b)	1 point
c)	1 point
d)	2 points
e)	2 points
Partie B	
a)	3 points
b)	2 points
c)	2 points
d)	2 points
e)	2 points
Total	**18 points**

Total pour l'épreuve : 96 points

Echelle : La note se calcule avec l'échelle fédérale sur 96 points

Formule : $\dfrac{\text{nb de points obtenus}}{96} \cdot 5 + 1$ arrondi au demi-point le plus proche