



Gymnase de Burier
Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz



EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

JUIN 2022

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau Renforcé

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Durée de l'épreuve : 4 heures

Consignes : Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés

Matériel autorisé : Formulaires officiels non annotés

Calculatrice : TI 30 ECO RS

Problème 1 (21 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère

- la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$;
 - le plan $\alpha : 3x - 4z - 15 = 0$;
 - le point $P(7; 8; -6)$.
- a) Déterminer les coordonnées du centre C de la sphère, ainsi que son rayon r .
- b) Démontrer que α et Σ sont tangents.
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan β , perpendiculaire à α et contenant les points C et P .
- d) Déterminer une équation paramétrique de la droite passant par C et P .
- e) Déterminer une équation cartésienne d'une sphère Σ' satisfaisant aux conditions suivantes :
- son centre C' est situé sur la droite CP ;
 - Σ' est tangente à α ;
 - Σ' est tangente extérieurement à Σ .

Problème 2 (11 points)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}$$

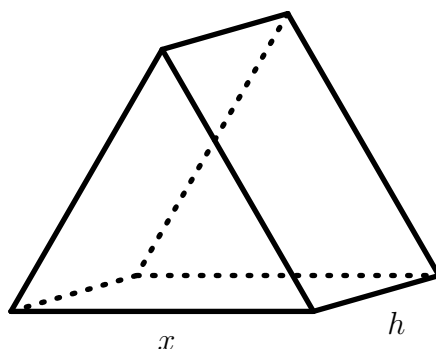
- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- b) Étudier le signe de f .
- c) Déterminer, par calculs, si f possède une asymptote horizontale.
- d) Montrer que

$$f'(x) = \frac{(2\sqrt{x} + x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

- e) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 4.

Problème 3 (18 points)

Un chocolatier prépare un nouveau produit dont l'emballage est un prisme droit à base triangulaire. La base de ce prisme est un triangle équilatéral. Afin de minimiser le matériau servant à la fabrication de l'emballage, le chocolatier cherche à déterminer les dimensions de ce prisme, sachant que son volume vaut 483 cm^3 .



- a) Montrer que l'aire totale de cet emballage, en cm^2 , est donnée par :

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}$$

où x est la mesure, en cm, du côté du triangle équilatéral.

- b) Montrer que

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}(x^3 - 1932)}{x^2}$$

- c) Déterminer les dimensions de cet emballage au millimètre près pour que l'aire totale du prisme à base triangulaire soit minimale.

Problème 4 (20 points)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = (1; 3; 6) \quad f(e_2) = (-3; -5; -6) \quad f(e_3) = (3; 3; 4)$$

avec $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

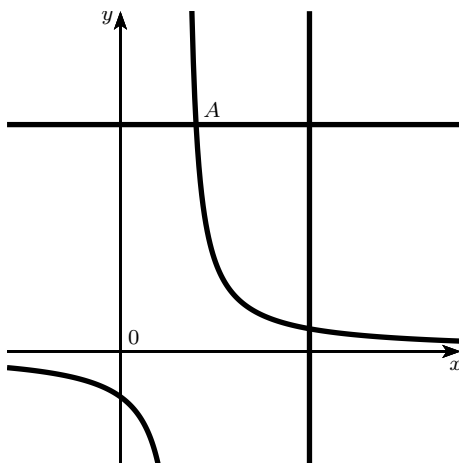
- Déterminer la matrice M de l'application linéaire f relativement à la base canonique.
 - Calculer l'image du vecteur $u = (x; y; z)$.
 - Prouver que cette application est bijective.
 - Déterminer le polynôme caractéristique de f , et en déduire que les valeurs propres sont -2 et 4 .
 - Déterminer une base $\mathcal{B}'$ relativement à laquelle la matrice M' de f est diagonale.
 - Déterminer la matrice P de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner la matrice M' de f relativement à $\mathcal{B}'$.
-

Problème 5 (8 points)

On considère :

- la courbe $c : y = \frac{6}{3x-5}$;
- le point $A(\dots; 6)$ appartenant à la courbe c ;
- la droite horizontale a passant par A ;
- la droite $b : x = 5$.

Calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine fermé délimité par la courbe c et les deux droites a et b .



Problème 6 (18 points)

Simon planifie une randonnée de cinq étapes. L'ordre des cinq étapes est fixé à l'avance mais il peut, lors de chaque étape, passer par le bord de mer, par les montagnes ou par la route.

Partie A

- a) De combien de façons différentes Simon peut-il planifier sa randonnée ?
- b) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut uniquement passer par le bord de mer ?
- c) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il ne veut pas passer par la route ?
- d) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut faire 2 étapes par la mer, 2 étapes par les montagnes et 1 étape par la route ?
- e) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut passer au moins une fois par les montagnes ?

Partie B

Lors de chaque étape, Simon choisit au hasard s'il passe par le bord de mer, par les montagnes ou par la route. Par le bord de mer, il a 40% de chance de voir des dauphins. Par les montagnes, il a 30% de chance de voir un ours. Par la route, il n'a aucune chance de voir un animal. Depuis le bord de mer on ne peut pas voir d'ours et depuis les montagnes on ne peut pas voir de dauphin.

- a) Représenter la situation de la première étape par un arbre des probabilités.
- b) Quelle est la probabilité que Simon ait vu un dauphin lors de sa première étape ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dauphin ou un ours lors de sa première étape ?
- d) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un des deux animaux lors de sa première étape sachant qu'il n'est pas passé par la route ?
- e) Quelle est la probabilité que Simon ait vu au moins une fois un dauphin lors de sa randonnée sachant qu'il a fait toutes les étapes au bord de la mer ?