Mathématiques

SUITES ET NOMBRES COMPLEXES

2ème année Maturité
niveau renforcé

$$e^{i\pi}$$

Gymnase de Burier

Jean-Marc Faillétaz
André Waser

Chapitre 2

Nombres complexes

Soit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(a;b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition et de la multiplication suivantes :

- $(a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$
- $(a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc)$

Exemple 2.1.

Effectuer les opérations suivantes :

a) $(3;4) + (5;-2) =$

b) $(3;4) \cdot (5;-2) =$

c) $(-2;5) \cdot (1;0) =$

d) $(0;1) \cdot (-2;5) =$

e) $(2;-1)^2 =$

f) $(0;1)^2 =$

Propriétés des opérations

1) L'addition et la multiplication sont **commutatives**.
2) $(0;0)$ est l'**élément neutre** de l'addition : $(a;b) + (0;0) = (0;0) + (a;b) = (a;b)$
3) $(1;0)$ est l'**élément neutre** de la multiplication : $(a;b) \cdot (1;0) = (1;0) \cdot (a;b) = (a;b)$
4) Tout élément $(a;b) \neq (0;0)$ possède un inverse :

   $(a;b)^{-1} =$

2.1 Nombres complexes $\mathbb{C}$

Avec les notations

- $(1;0) = 1$ et $(a;0) = a(1;0) = a$
- $(0;1) = i$ et $(0;b) = b(0;1) = bi$
- $(a;b) = a(1;0) + b(0;1) = a + bi$

L'ensemble des **nombres complexes** est défini par

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

- Si $z = a + bi$, a est la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire** de z.
  On note $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.
- $z = bi$, avec $b \neq 0$, est dit **imaginaire pur**.

Remarque 2.1.
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales :

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Opérations dans $\mathbb{C}$

addition

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mutiplication

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemple 2.2.

a) $(-2 + 4i) - (5 - 3i) =$

b) $i^4 =$

c) $(4 - 5i)(3 + 2i) =$

d) $(3 - 5i)^2 =$

e) $(1 - i)(1 + i) =$

f) $(3 + i)^3 =$

Inverse et division

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$

Exemple 2.3.

Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a+bi$.

a) $\dfrac{1}{5-12i} =$

b) $\dfrac{15-35i}{3+4i} =$

2.2 Conjugué et module

- Le **conjugué** de $z = a+bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.
- Le **module** de $z = a+bi$ est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Remarque 2.2.

On peut obtenir le module d'un nombre complexe à l'aide du conjugué : $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Propriétés du module et du conjugué

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4) $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ si $\lambda \in \mathbb{R}$
5) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
8) $|z^m| = |z|^m$
9) $|z| = 0 \iff z = 0$

2.3 Racines carrées d'un nombre complexe

Les solutions de l'équation $z^2 = u$ sont appelées les **racines carrées** du nombre complexe u.

Exemple 2.4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 4$

b) $z^2 = 32$

c) $z^2 = -25$

Racines carrées d'un complexe non réel

Exemple 2.5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 15 + 8i$.

Cas général

$$(x+yi)^2 = a+bi \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

2.4 Equations dans $\mathbb{C}$

On résoud une équation dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ à l'aide des mêmes principes d'équivalence.

Equations du premier degré

Exemple 2.6.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z - 2 = (4 - z) \cdot i$

Equations du deuxième degré

Pour résoudre l'équation du deuxième degré en z

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation possède alors les deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

qui sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et identiques (solution double) si $\Delta = 0$.

Exemple 2.7.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+3i)z + i - 5 = 0$.

2.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $\mathbb{C}[z]$ l'ensemble des polynômes en la variable z à coefficients complexes.

Théorème fondamental de l'algèbre (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855)

- Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré n se décompose en un produit de n polynômes du premier degré à coefficients complexes.
- Toute équation polynomiale à coefficients complexes de degré n admet n solutions complexes (distinctes ou non). La somme de la multiplicité des solutions est égale à n.

Exemple 2.8.

Factoriser dans $\mathbb{C}[z]$ les polynômes suivants :

1 $P(z) = z^2 - 2z + 5 =$

2 $Q(z) = z^2 - (2+3i)z + i - 5 =$

2.6 Conséquences du théorème fondamental pour les polynômes à coefficients réels

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en la variable x à coefficients réels.

- Si un nombre complexe $z = a + bi$ est un zéro d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ à coefficients réels, alors son conjugué $\overline{z} = a - bi$ est également zéro de ce polynôme.
- Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n se décompose en un produit de polynômes du premier degré à coefficients réels et de polynômes du deuxième degré à discriminant négatif.
- Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré impair possède un zéro réel.

Exemple 2.9.

a) Vérifier que $z = 1 + i$ est un zéro du polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.
En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

b) Factoriser $Q(x) = x^4 + 64$ dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

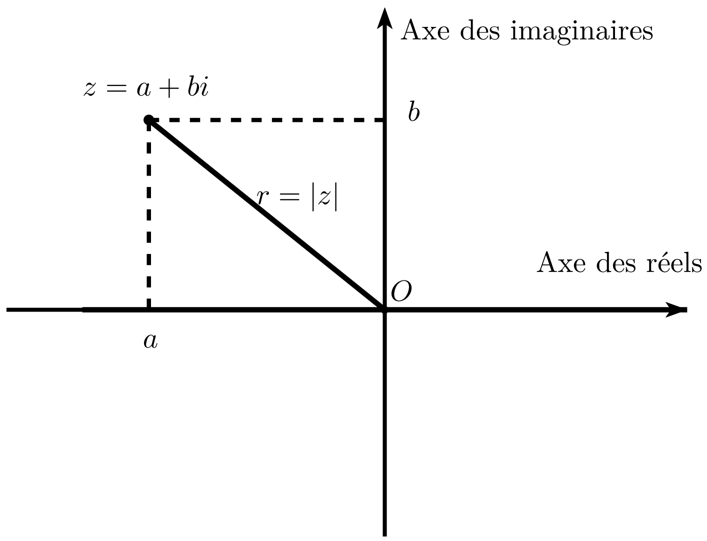
2.7 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.7.1 Représentation géométrique

On représente géométriquement les nombres complexes dans le **plan d'Argand-Cauchy** ou **plan de Gauss** :

On associe à un nombre complexe $z = a + bi$ le point $P(a; b)$ dans un système orthonormé Oxy.

- L'axe Ox est appelé l'**axe des réels**
- L'axe Oy est appelé l'**axe des imaginaires**
- Le nombre complexe $z = a + bi$ associé à un point $P(a; b)$ du plan est appelé l'**affixe** de P



Remarque 2.3.

1) Les points correspondants à $z = a + bi$ et à son conjugué $\overline{z} = a - bi$ sont symétriques relativement à Ox.
2) Le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de $z = a + bi$ est la distance entre l'origine $(0; 0)$ et le point $P(a; b)$ qui représente z.
3) **L'addition de nombres complexes** correspond à **une addition vectorielle**.

   Plus précisément, soient $P(a; b)$ et $Q(c; d)$ deux points du plan de Gauss, ainsi que $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$ les affixes respectives de P et Q.

   Le nombre complexe $z = z_1 + z_2$, somme des nombres complexes z_1 et z_2, est l'affixe du point R du plan de Gauss tel que
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

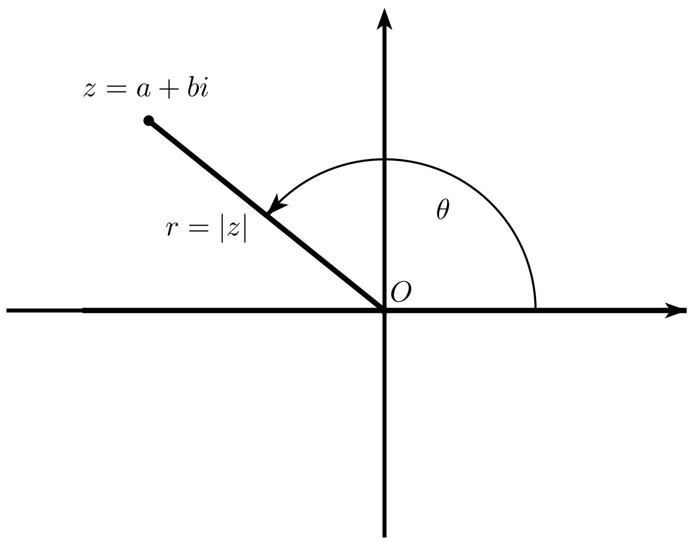
2.7.2 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique de $z = a + bi$ est donnée par

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ est le **module** de z
- θ est l'angle orienté de côté initial Ox et de côté final OP, où $P(a; b)$ est le point associé à z
- θ est appelé un **argument** de z.



Remarque 2.4.

1) La forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'abrège $z = r\,cis(\theta)$
2) La forme trigonométrique n'est pas unique : il y a une infinité de choix possible de l'angle θ.
3) Les arguments d'un même nombre complexe diffèrent d'un multiple de 2π.

Exemple 2.10.
Exprimer les nombres complexes $z_1 = -4+4i$, $z_2 = 2\sqrt{3}-2i$ et $z_3 = 2+7i$ sous forme trigonométrique.

2.7.3 Produit et division sous forme trigonométrique

Soit $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) = r_1\, cis(\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = r_2\, cis(\theta_2)$ deux nombres complexes donnés sous forme trigonométrique. Le produit et la somme sous forme trigonométrique sont les suivants.

- $z_1 z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2\, cis(\theta_1 + \theta_2)$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) = \dfrac{r_1}{r_2}\, cis(\theta_1 - \theta_2)$

Remarque 2.5.

Le module du produit est le produit des modules ; l'argument du produit est la somme des arguments.

Exemple 2.11.

A l'aide de la forme trigonométrique de $z_1 = -4 - 4i$ et de celle de $z_2 = -2i$, déterminer la forme trigonométrique de $z_1 \cdot z_2$ et de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Vérifier le résultat en effectuant le calcul sous forme algébrique.

2.8 Racines n-ième d'un nombre complexe

2.8.1 Formule de De Moivre

$$z^n = [r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Exemple 2.12.

Calculer $(1+i)^{10}$ en utilisant la formule de De Moivre.

2.8.2 Racines n-ième

Soit $u = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ un nombre complexe non nul et n un entier positif.

Les racines n-ième de u sont les solutions complexes de $z^n = u$.

u possède n racines n-ième distinctes données par :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, \dots, n-1$$

Exemple 2.13.

a) Déterminer les racines cubiques de $z = 1$.

b) Déterminer les racines sixièmes de $z = -1$.

2.9 Exercices

2.1) Calculer oralement.

1) $z_1 = 1 + 4\,i$ $z_2 = 2 - 5\,i$ $z_1 + z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) $z_1 = 1 + 6\,i$ $z_2 = 2 + 5\,i$ $z_1 + z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) $z_1 = 2 + 4\,i$ $z_2 = 2 - 4\,i$ $z_1 + z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) $z_1 = 8 + 7\,i$ $z_2 = -8 - 7\,i$ $z_1 + z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.2) Calculer oralement.

1) $z_1 = 1 + 2\,i$ $z_2 = 2 + i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 2 - 5\,i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 2 + 2\,i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) $z_1 = -3 + i$ $z_2 = 2 + 3\,i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5) $z_1 = -1 + 3\,i$ $z_2 = 3 - 5\,i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6) $z_1 = -2 - 2\,i$ $z_2 = -1 + 3\,i$ $z_1 z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.3) Soit $z_1 = 7 - 5\,i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -5 + 2\,i$, $z_4 = -10 - 3\,i$, $z_5 = 8$ et $z_6 = 8\,i$.

Calculer

1) $z_1 - z_3 - z_5$ 2) $z_2 + (z_3 - z_4)$ 3) $z_5 - (z_6 - z_1)$

4) $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4$ 5) $z_1^2 + z_2^2$ 6) $z_3^2 + z_4^2$

7) $z_2 \cdot (z_4 - z_6)$ 8) $i \cdot z_4 - z_3 \cdot z_6$ 9) $\operatorname{Re}(z_1 + 4\,z_2)$

10) $\operatorname{Re}(z_1^2 \cdot z_3)$ 11) $\operatorname{Im}(2z_2 - 3z_3)$ 12) $\operatorname{Im}(z_2^2 \cdot z_4)$

2.4) Calculer l'inverse $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ de z (a et b sont des nombres réels non nuls).

1) $z = 2 + i$ 2) $z = 4 + 3\,i$ 3) $z = -24 - 7\,i$

4) $z = i$ 5) $z = a$ 6) $z = b\,i$

2.5) Exprimer les nombres complexes sous la forme $a + b\,i$.

1) $15\,i : 3$	2) $15 : 5\,i$	3) $30 : 6\,i$
4) $8i : (-12\,i)$	5) $(-100) : 20\,i$	6) $(5 + 3\,i) : (2 + 4\,i)$
7) $(63 + 16\,i) : (4 + 3\,i)$	8) $(56 + 33\,i) : (12 - 5\,i)$	9) $(13 - 5\,i) : (1 - i)$
10) $\dfrac{1+2\,i}{2+i}$	11) $\dfrac{-1+3\,i}{3-5\,i}$	12) $\dfrac{1+i}{1-i}$
13) $\dfrac{3-2\,i}{4\,i+5}$	14) $\dfrac{1+2\,i}{1-2\,i}$	15) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

2.6) Soit $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer $z^2, z^3, 1+z+z^2$.

2.7) Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système suivant (z et z' sont les inconnues complexes).

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \\ (1+i)z - iz' = 2+i \end{cases}$$

2.8) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$.

2.9) Calculer le module $|z|$ des nombres complexes suivants.

1) $z = 2+3i$	2) $z = 1+i$	3) $z = 2i$
4) $z = -3i$	5) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	6) $z = 5$
7) $z = -6$	8) $z = 0$	9) $z = \cos(t) + i\sin(t)$

2.10) 1) Calculer $(a + bi)\cdot(a - bi)$

2) Calculer $z_1 = (a + b\,i)(c + d\,i)$ et $z_2 = (a - b\,i)(c - d\,i)$; quel lien y a-t-il entre z_1 et z_2 ?

3) En utilisant les résultats obtenus aux points 1 et 2, montrer comment transformer le produit de la somme de deux carrés $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ en une somme de deux carrés.

2.11) Résoudre les équations dans les nombres complexes.

1) $2z - 3 + i = 0$	2) $(1 - 4\,i)\,z = 6 - 7\,i$
3) $5z = 8i\,z + (81 - 5\,i)$	4) $(2+i)\,z - (5 + 2\,i) = 8 - 3\,i$

5) $(1+2\,i)\,z=(5-i)z+(7+26\,i)$ 6) $(z+5\,i)(4+2\,i)-(z+2)(4+2\,i) \;=\; 24+2\,i$

2.12) Quelles sont les racines carrées des nombres complexes suivants ?

1) -16 2) $8\,i$ 3) $5+12\,i$

4) $-32+24\,i$ 5) $16-30\,i$ 6) $15-8\,i$

7) $-8-6\,i$ 8) i

2.13) Résoudre dans les complexes les équations réelles quadratiques suivantes.

1) $x^2=25$ 2) $x^2=-169$ 3) $(x-2)^2=289$

4) $(2x-5)^2=-25$ 5) $x^2+6x=-25$ 6) $2x^2+10x=-13$

2.14) Résoudre dans les complexes les équations quadratiques suivantes.

1) $(1+i)\,z^2+(i-6)\,z+(2-3\,i)=0$ 2) $2\,i\,z^2+3(1+i)\,z+(3-i)=0$

3) $(i-3)\,z^2+(7-11\,i)\,z+(4+6\,i)=0$ 4) $z^2-(1+12\,i)\,z-(13+9\,i)=0$

5) $z^4+2\,(2\,i-1)\,z^2-(3-4\,i)=0$.

2.15) On considère la fonction complexe *f* définie sur $\mathbb{C}-\{-i\}$ par $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z)=i$.

2) Trouver les éléments z invariants par *f*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)=z$.

2.16) Soit l'équation complexe $z^3-i\,z^2-i\,z-1=0$.

1) Vérifier que $z=i$ est solution de cette équation.

2) Résoudre complètement l'équation ci-dessus.

2.17) Soit l'équation $3z^3+2z^2+7z-20=0$.

1) Vérifier que le nombre complexe $u=-1+2\,i$ est solution de l'équation ci-dessus.

2) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

3) En déduire une factorisation du polynôme $p(x)=3x^3+2x^2+7x-20$ dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

2.18) Factoriser complètement les polynômes $p(x)$ suivants dans l'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à coefficients complexes et dans $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels.

1) $p(x) = x^4 - 1$ 2) $p(x) = x^4 + 1$

3) $p(x) = x^3 + 1$ 4) $p(x) = x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64$.

2.19) Décomposer le polynôme $T(z) = z^8 + 63z^4 - 64$ dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

2.20) Dans le plan de Gauss, on désigne par *A*, *B* et *C* les représentations géométriques des nombres complexes $z_1 = 1 + 2\,i$, $z_2 = 4 - 2\,i$ et $z_3 = 1 - 6\,i$.

Vérifier par calculs que le triangle *ABC* est isocèle et déterminer la longueur de ses côtés.

2.21) Dans le plan de Gauss, on désigne par *A*, *B*, *C* et *D* des points non alignés qui sont les représentations géométriques respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 . Prouver que *ABCD* est un parallélogramme si et seulement si $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$.

2.22) Exprimer les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique en donnant un argument compris entre 0 et 2π.

1) $1 - i$ 2) $\sqrt{3} + i$ 3) $-2 - 2\,i$

4) $-6\,i$ 5) -7 6) $4 - 3\,i$

2.23) Utiliser les formes trigonométriques pour calculer $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

1) $z_1 = -1 + i$ $z_2 = 1 + i$ 2) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ $z_2 = 5\,i$

3) $z_1 = 2\,i$ $z_2 = -3\,i$ 4) $z_1 = -10$ $z_2 = -4$

2.24) Calculer le module et un argument des nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et utiliser ce résultat pour calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2.25) Utiliser la formule de De Moivre pour écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique : $z_1 = \left(1+\sqrt{3}\ i\right)^7$, $z_2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}\right)^{10}$ et $z_3 = \left(-2-2\ i\right)^{10}$.

2.26) Calculer les quatre racines quatrièmes de $-1-\sqrt{3}\ i$.

2.27) Calculer les cinq racines cinquièmes de $1+i$.

2.28) Calculer les huit racines huitièmes de l'unité.

2.29) Déterminer les solutions complexes des équations suivantes.

1) $x^4 - 16 = 0$ 2) $x^3 + 8i = 0$

3) $x^4 + 81 = 0$.

2.30) En électricité, on utilise souvent la forme trigonométrique des nombres complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$ pour décrire le courant (I), la tension (U) et l'impédance (Z) d'un circuit à courant alternatif. L'impédance représente l'opposition du circuit électrique au passage du courant électrique. La relation entre ces trois quantités est $Z = \underline{U}/\underline{I}$. Calculer la quantité inconnue et exprimer le résultat sous forme algébrique en arrondissant le résultat à 2 décimales près (voir annexe).

1) $\underline{I} = 10\,\text{cis}(35°)$, $Z = 3\ \text{cis}(20°)$

2) $\underline{I} = 8\,\text{cis}(5°)$, $\underline{U} = 115\ \text{cis}(45°)$

3) $\underline{U} = 163\ \text{cis}(17°)$, $Z = 78\ \text{cis}(61°)$.

2.31) Le module de l'impédance Z représente l'opposition totale d'un circuit au passage du courant électrique. La valeur absolue de la partie réelle de Z représente la résistance, soit l'opposition d'un circuit au passage du courant électrique. La valeur absolue de la partie imaginaire de Z représente la réactance. L'unité pour ces trois grandeurs est le Ohm (Ω). Calculer l'opposition totale, la résistance et la réactance si $\underline{I} = 5\ \text{cis}(90°)$ et $\underline{U} = 220\ \text{cis}(34°)$ (voir annexe).

2.10 Réponses

2.1) 1) $3 - i$; 2) $3 + 11\,i$; 3) 4 ; 4) 0.

2.2) 1) $5\,i$; 2) $7 - 3\,i$; 3) $4\,i$; 4) $-9 - 7\,i$; 5) $12 + 14\,i$; 6) $8 - 4\,i$.

2.3) 1) $4 - 7\,i$; 2) $7 + 6\,i$; 3) $15 - 13\,i$; 4) $367 - 315\,i$; 5) $27 - 66\,i$; 6) $112 + 40\,i$;

7) $-9 - 32\,I$; 8) $19 + 30\,i$; 9) 15 ; 10) 20 ; 11) -4 ; 12) -49.

2.4) 1) $\frac{1}{5}(2-i)$; 2) $\frac{1}{25}(4-3\,i)$; 3) $\frac{1}{625}(-24+7\,i)$; 4) $-i$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $-\frac{1}{b}\,i$.

2.5) 1) $5\,i$; 2) $-3\,i$; 3) $-5\,i$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $5\,i$; 6) $\frac{1}{10}(11-7\,i)$; 7) $12 - 5\,i$;

8) $3 + 4\,i$; 9) $9 + 4\,i$; 10) $\frac{1}{5}(4+3\,i)$; 11) $\frac{1}{17}(-9+2\,i)$; 12) i ; 13) $\frac{1}{41}(7-22\,i)$;

14) $\frac{1}{5}(-3+4\,i)$; 15) $\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

2.6) $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z^3 = 1, \quad 1 + z + z^2 = 0$.

2.7) $(3 - i\ ;\ 1 - 2i)$.

2.8) $z = \frac{4}{13} + i$.

2.9) 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2 ; 4) 3 ; 5) 1 ; 6) 5 ; 7) 6 ; 8) 0 ; 9) 1 .

2.10) 1) $a^2 + b^2$; 2) $z_1 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$; $z_2 = (ac - bd) - (ad + bc)\,i$; $z_2 = \overline{z_1}$;

3) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

2.11) 1) $z = \frac{3-i}{2}$; 2) $z = 2 + i$; 3) $z = 5 + 7\,i$; 4) $z = 5 - 3\,i$; 5) $z = 2 - 5\,i$; 6) aucune solution .

2.12) 1) $\pm 4\,i$; 2) $\pm (2 + 2\,i)$; 3) $\pm (3 + 2\,i)$; 4) $\pm (2 + 6\,i)$; 5) $\pm (5 - 3\,i)$; 6) $\pm (4 - i)$;

7) $\pm (1 - 3\,i)$; 8) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$.

2.13) 1) $\{\pm 5\}$; 2) $\{\pm 13\,i\}$; 3) $\{-15\ ;\ 19\}$; 4) $\left\{\frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}\,i\right\}$; 5) $\{-3 \pm 4\,i\}$; 6) $\left\{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\,i\right\}$.

2.14) 1) $\left\{2 - 3\,i\ ;\ \frac{1}{2}(1-i)\right\}$; 2) $\left\{i\ ;\ \frac{1}{2}(-3+i)\right\}$; 3) $\left\{3 - 2i\ ;\ \frac{1}{5}(1-3\,i)\right\}$;

4) $\{-1 + i\ ;\ 2 + 11\,i\}$; 5) $\{i\ ;\ -i\ ;\ 2 - i\ ;\ -2 + i\}$.

2.15) 1) -1 ; 2) $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$ et $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$.

2.16) $S=\left\{i;\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\right\}$.

2.17) 2) $S=\left\{-1+2\,i\,;-1-2\,i\,;\frac{4}{3}\right\}$; 3) $p(x)=(3x-4)\left(x^2+2x+5\right)$.

2.18) 1) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

2) $x^4+1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$

$=\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)$

3) $x^3+1=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

4) $x^6+12x^4+48x^2+64=(x+2\,i)^3(x-2\,i)^3=\left(x^2+4\right)^3$.

2.19) $T(z)=z^8+63z^4-64=(z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)\left(z^2-4z+8\right)\left(z^2+4z+8\right)=$

$=(x-1)(x+1)(z-i)(z+i)(z-2-2i)(z-2+2i)(z+2-2i)(z+2+2i)$.

2.20) isocèle en B ; longueur des côtés : 8 et 5.

2.22) 1) $1-i=\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$; 2) $\sqrt{3}+i=2\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $-2-2\,i=2\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

4) $-6\,i=6\,\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $-7=7\,\operatorname{cis}(\pi)$; 6) $4-3\,i=5\,\operatorname{cis}(5.640)$.

2.23) 1) $-2,\ i$; 2) $10\sqrt{3}-10\,i,\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{2}{5}\,i$; 3) $6,\ -\frac{2}{3}$; 4) $40,\ \frac{5}{2}$.

2.24) $z_1=\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$;

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2.25) $z_1=64+64\sqrt{3}\,i$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $z_3=32'768\,i$.

2.26) $w_0=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$, $w_1=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)$, $w_2=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$, $w_3=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i\right)$.

2.27) $w_0=\sqrt[10]{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{20}\right)$, $w_1=\sqrt[10]{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{20}\right)$, $w_2=\sqrt[10]{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{20}\right)$, $w_3=\sqrt[10]{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{20}\right)$,

$w_4=\sqrt[10]{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{33\pi}{20}\right)$.

2.28) $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_2 = i$, $w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_4 = -1$, $w_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$w_6 = -i$, $w_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

2.29) 1) $S = \{-2, 2, -2\,i, 2\,i\}$; 2) $S = \{2\,i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}$;

3) $S = \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i \right\}$.

2.30) 1) $\underline{U} = 17.21 + 24.57\,i$; 2) $Z = 11.01 + 9.24\,i$; 3) $\underline{I} = 1.50 - 1.45\,i$.

2.31) résistance totale : 44 Ω ; résistance : 24.6 Ω ; réactance : 36.5 Ω.

Annexe : Les nombres complexes en électricité

Dès la fin du XIXème siècle, les nombres complexes se révéleront particulièrement pratiques en électricité pour l'étude du courant alternatif.

La loi d'Ohm, du nom du physicien allemand Georg Simon Ohm, est une loi physique reliant l'intensité I (mesurée en ampères) d'un courant électrique traversant un circuit, la tension ou différence de potentiel U (mesurée en volts) aux bornes du circuit et la résistance R (mesurée en ohms). Dans le cas d'un courant continu, la loi d'Ohm s'écrit $U = R \cdot I$

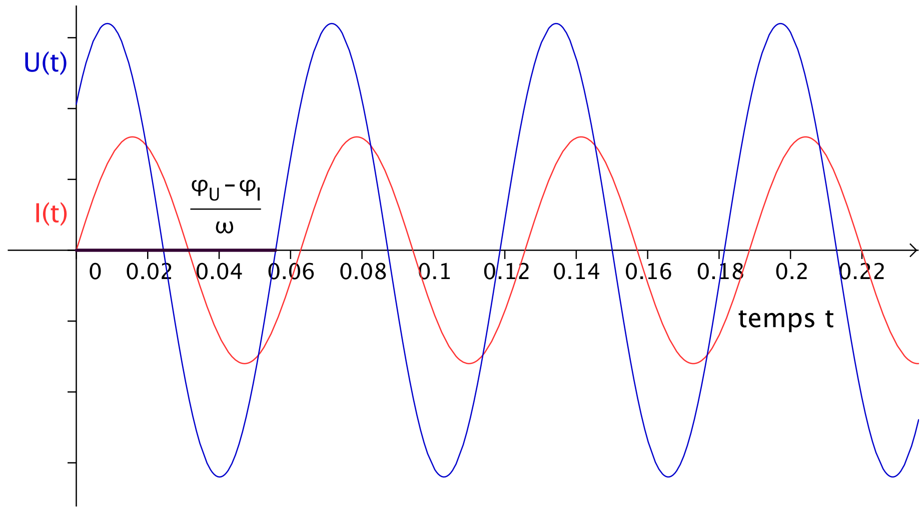
Or, pour des raisons de techniques de production, le courant qui arrive dans nos prises électriques est généralement de type alternatif. Ainsi, dans un circuit électrique, le courant I et la tension U sont décrites par des fonctions sinusoïdales :

$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_I)$ $\qquad$ $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U)$

où I_0 est l'amplitude de I, U_0 l'amplitude de U, ω la pulsation (en radians par seconde)[1], t le temps (en secondes), φ_I et φ_U les phases à l'origine (en radians) de I et de U.

Si le circuit ne contient qu'une résistance pure R (comme par exemple le circuit d'un corps de chauffe), I et U sont en phase, $\varphi_I = \varphi_U$, et la loi d'Ohm $U = R \cdot I$ reste valable.

Mais en présence de certains éléments de circuit, comme par exemple une bobine ou un condensateur, on observe une réactance X (mesurée en ohms, comme la résistance) qui provoque un déphasage entre I et U et la loi d'Ohm ne s'applique plus dans sa « version réelle ».



Graphes de $I(t)$ et $U(t)$ avec $I_0 = 0.8$, $U_0 = 1.6$, $\omega = 100$, $\varphi_I = 0$ et $\varphi_U = 0.7$.

[1] On utilise parfois la notion de fréquence f mesurée en Herz et telle que $\omega = 2\pi \cdot f$

On utilise alors un artifice de calcul, qui permet de retrouver la loi d'Ohm dans une « version complexe ». Le courant I et la tension U sont représentés par deux nombres complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$ tels que

$$\underline{I} = I_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_I)$$
$$\underline{U} = U_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U)$$

Ainsi, l'intensité du courant au temps t vaut $I = \mathrm{Im}(\underline{I})$ et la tension $U = \mathrm{Im}(\underline{U})$.

On définit l'impédance d'un circuit comme un nombre complexe Z dont la partie réelle est la résistance R et la partie imaginaire la réactance X.

$$Z = R + iX$$

Avec ces nouvelles définitions, la loi d'Ohm devient

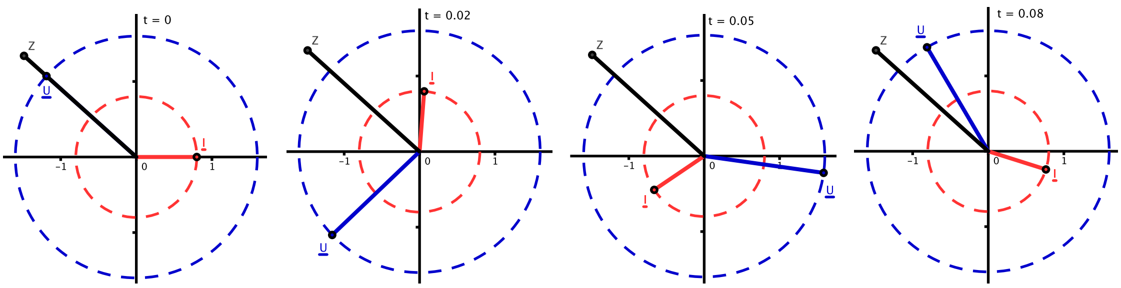
$$\underline{U} = Z\,\underline{I}$$

En explicitant Z, il vient

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U)}{I_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_I)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U - \omega \cdot t - \varphi_I) = \frac{U_0}{I_0} \cdot cis(\varphi_U - \varphi_I)$$

Ainsi, on constate que l'impédance ne dépend pas du temps. Son argument est égal au déphasage $\varphi_U - \varphi_I$ entre U et I et son module $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U_0}{I_0}$ correspond à l'opposition totale du circuit au passage du courant électrique.

Les figures ci-dessous représentent les positions de $\underline{U}$, $\underline{I}$ et Z dans le plan complexe pour différentes valeurs du temps t (comme précédemment, $I_0 = 0.8$, $U_0 = 1.6$, $\omega = 100$, $\varphi_I = 0$ et $\varphi_U = 0.7$.



Z est invariant alors que $\underline{U}$ et $\underline{I}$ effectuent des rotations sur deux cercles centrés à l'origine et de rayon respectif U_0 et I_0 à une vitesse angulaire égale et constante.

Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1998.

[2] Alex Willa, Cahier de la commission romande de mathématique n° 1 *: Suites de nombres réels*, CRM 2004.

[3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2005.

[4] Monographie de la commission romande de mathématique 19 *: Fundamentum de mathématique : Algèbre,* Editions du Tricorne, 1986.

[5] Gymnases cantonaux, fascicule 34, *: Les nombres complexes,* 1978

[6] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[7] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[8] H. Bovet et F. Détraz, *: Les nombres complexes, cours et exercices*, Gymnase de Beaulieu 2000.