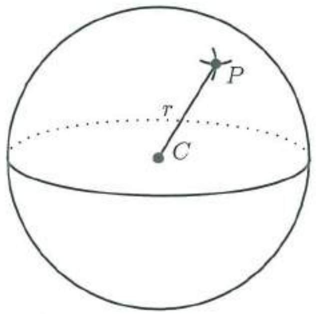
7 Équation de la sphère

Au chapitre 4, nous avons étudié le cercle et son équation dans le plan. Dans ce chapitre, nous allons reprendre une grande partie de ce qui a été fait dans le plan et l'adapter à l'étude de la sphère dans l'espace.

7.1 Généralités

La **sphère** Σ de centre $C(x_C; y_C; z_C)$ et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points $P(x; y; z)$ de l'espace situés à une distance r de C.



$$P \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CP}\| = r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} = r$$

En élevant au carré, on obtient l'équation de la sphère Σ

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

Exemple 1. *Déterminer l'équation de la sphère centrée en $C(-3; 2; -1)$ et de rayon $r = 3$.*

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

En développant, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Exemple 2.
On considère la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 12y - z + \frac{1}{4} = 0$.
Cherchons son centre et son rayon.

On peut écrire cette équation de la manière suivante.

$$(x-8)^2 - 64 + (y+6)^2 - 36 + (z - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 0$$

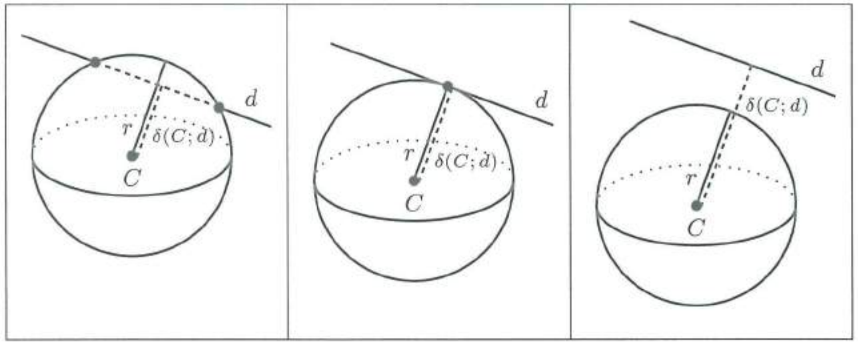
On obtient $(x-8)^2 + (y+6)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = 100$.
Il s'agit de l'équation de la sphère de centre $C(8; -6; \frac{1}{2})$ *et de rayon* 10.

7.2 Positions relatives

7.2.1 Positions relatives d'une droite et d'une sphère

On considère la sphère Σ de centre C et de rayon r ainsi qu'une droite d. Pour situer la droite d par rapport à la sphère Σ, on compare la distance $\delta(C; d)$ du centre C à la droite d avec le rayon r.

1. $\delta(C; d) < r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est sécante à Σ (deux points d'intersection)
2. $\delta(C; d) = r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est tangente à Σ (un point d'intersection)
3. $\delta(C; d) > r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est extérieure à Σ (aucun point d'intersection)



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de d et Σ, on résout par substitution le système formé par les équations de la sphère et de la droite.

Exemple. *On considère la sphère* Σ *de centre* $C(3; -2; 1)$ *et de rayon* r *ainsi que la droite* $d : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 8 + 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$.
Discuter la position relative de d *et* Σ *en fonction de* r.

On calcule la distance du centre C *à la droite* d : $\delta(C; d) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

où $A(4; 8; 5)$ *est un point de* d *et* $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *un vecteur directeur de* d.

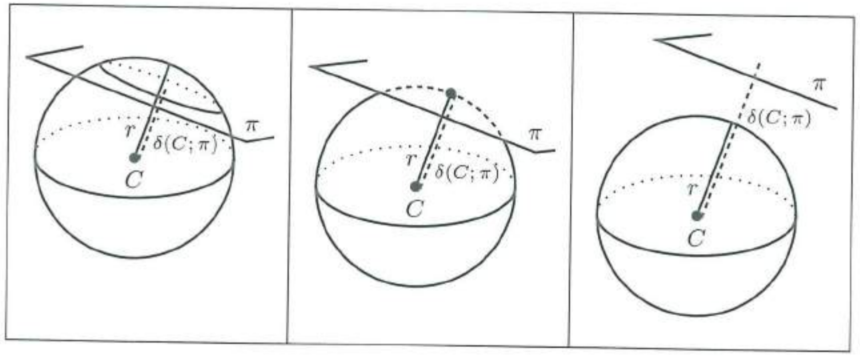
$$\delta(C; d) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{9}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \right\|}{3} = 6$$

Si $r = 6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont tangentes.*
Si $r > 6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont sécantes.*
Si $r < 6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont extérieures.*

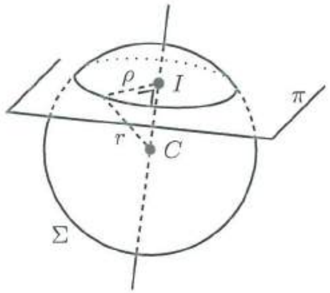
7.2.2 Positions relatives d'un plan et d'une sphère

On considère la sphère Σ de centre C et de rayon r ainsi qu'un plan π. Pour situer le plan π par rapport à la sphère Σ, on compare la distance $\delta(C; \pi)$ du centre C au plan π avec le rayon r.

1. $\delta(C; \pi) < r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est sécant à Σ (infinité de points d'intersection formant un cercle)
2. $\delta(C; \pi) = r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est tangent à Σ (un point d'intersection)
3. $\delta(C; \pi) > r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est extérieur à Σ (aucun point d'intersection)



Exemple. *On considère la sphère* $\Sigma : (x-8)^2+(y+6)^2+(z-1)^2 = 100$. *Le plan* $\pi : 2x-5y+4z = 5$ *coupe cette sphère en un cercle. Déterminer le centre* I *et le rayon* ρ *de ce cercle.*



On considère la droite passant par le centre de la sphère $C(8;-6;1)$ *et perpendiculaire au plan* π.

$$\begin{cases} x = 8+2t \\ y = -6-5t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

L'intersection I *entre cette droite et le plan* π *donne le centre du cercle.*

$$2(8+2t)-5(-6-5t)+4(1+4t) = 5 \quad \Rightarrow \quad 45t+50 = 5$$

$$\Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad I(6;-1;-3)$$

On a $\|\overrightarrow{CI}\|^2 = \| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \|^2 = 45$.

Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$\rho^2 = r^2 - \|\overrightarrow{CI}\|^2 = 100-45 = 55 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{55}$$

7.2.3 Positions relatives de deux sphères

On considère les sphères Σ_1 de centre C_1 et de rayon r_1 et Σ_2 de centre C_2 et de rayon r_2. Pour situer Σ_1 par rapport à Σ_2, on compare la distance $\|\overrightarrow{C_1C_2}\|$ entre les centres avec r_1+r_2 et $|r_1-r_2|$.

1. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 est à l'extérieur de Σ_2 (aucun point d'intersection)
2. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont tangentes extérieurement (un point d'intersection)

3. $|r_1-r_2| < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont sécantes (infinité de points d'intersection formant un cercle)
4. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = |r_1-r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont tangentes intérieurement (un point d'intersection)
5. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| < |r_1-r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ l'une des sphères est à l'intérieur de l'autre (aucun point d'intersection)

7.3 Plan tangent à une sphère

Exemple. *Soit la sphère d'équation* $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 30$. *Le point* $T(1;4;5)$ *appartient à cette sphère puisque ses coordonnées vérifient son équation.*

On veut trouver l'équation du plan π *tangent à la sphère en* T. *On considère un point* $P(x;y;z)$ *de* π.

Le plan π *passant par* T *et* P *étant tangent à la sphère, il est perpendiculaire à la droite passant par* C *et* T. *On a donc* $\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP} = 0$.

En développant, on obtient

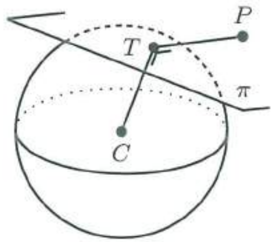
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x-1)+5(y-4)+2(z-5) = 0$$

L'équation du plan π *est donc* $x-5y-2z+29 = 0$.

On considère un point T de la sphère Σ de centre C et de rayon r et on note π le plan tangent à la sphère en T. De manière générale, on a

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP} = 0$$



7.4 Exercices relatifs au chapitre 7

1. Les équations ci-dessous représentent-elles une sphère ? Si oui, on en donnera le centre C et le rayon r.

a) $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=9$

b) $x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+22=0$

c) $x^2+y^2+z^2-12x-2y+6z+56=0$

d) $x^2+y^2+z^2+4x-14y-8z+69=0$

e) $36x^2+36y^2+36z^2-108x+96y-144z+109=0$

2. Déterminer l'équation de la sphère

a) de centre $C(0;2;-4)$ et de rayon 5 ;

b) de centre $C(1;-2;-4)$ et passant par le point $P(3;2;-1)$;

c) de diamètre $[AB]$ où $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$;

d) passant par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$ et ayant son centre sur la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

e) centrée à l'origine et tangente à la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

f) de centre $C(4;1;-5)$ et tangente au plan d'équation $x+2y+2z-4=0$;

g) passant par les points $M(0;3;-4)$, $N(2;2;-3)$ et $P(10;1;-8)$ et de rayon $5\sqrt{2}$;

h) passant par les points $M(-2;2;3)$, $N(0;4;1)$ et $P(-5;5;-1)$ et ayant son centre sur le plan d'équation $x+3y-2z-7=0$;

i) passant par les points $E(5;7;-2)$, $F(3;1;0)$, $G(-5;12;3)$ et $H(-3;-2;-1)$;

j) passant par les points $M(8;8;9)$, $N(-1;-1;9)$ et $P(11;5;9)$ et tangente au plan (Oxy).

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une sphère Σ et d'une droite d dans les cas suivants.

a) $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0 \qquad d : \begin{cases} x=-3+2k \\ y=6-2k \\ z=-4+k \end{cases}$

b) $\Sigma : x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-9=0 \qquad d : \begin{cases} x=-2-k \\ y=4+k \\ z=4+k \end{cases}$

c) $\Sigma : x^2+y^2+z^2-3x+y+1=0 \qquad d : \begin{cases} x=1 \\ y=2+k \\ z=3+2k \end{cases}$

4. Le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$$

détermine un cercle. Calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

5. Trouver l'équation de la sphère passant par le point $P(2;-1;1)$ et qui contient le cercle déterminé par le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ 5x+2y-z-3=0 \end{cases} .$$

6. Déterminer l'équation de la sphère contenant les deux cercles Γ_1 et Γ_2 donnés par les systèmes d'équations

$$\begin{cases} x^2+z^2=25 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2+z^2=16 \\ y=3 \end{cases} .$$

7. On donne une sphère Σ et un point T. Après avoir vérifié que T appartient à Σ, trouver l'équation du plan tangent à Σ au point T.

a) $T(7;4;4)$ $\quad \Sigma : (x+3)^2+(y-15)^2+(z-2)^2=225$

b) $T(14;4;-6)$ $\quad \Sigma : (x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=289$

c) $T(-2;12;-5)$ $\quad \Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-10y+6z=27$

d) $T(3;-1;\frac{8}{7})$ $\quad \Sigma : 49x^2+49y^2+49z^2-70x+42y-294z+34=0$

8. Trouver les équations des plans tangents à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y - 2z = 48$ aux points d'intersection de cette sphère avec les axes de coordonnées.

9. On donne une sphère Σ et un plan α. Déterminer les équations des plans parallèles à α et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.
   a) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$
   $\alpha : 7x - 2y - z = 0$
   b) $\Sigma : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169$
   $\alpha : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$
   c) $\Sigma : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z = 87$
   $\alpha : x - y - z + 11 = 0$

10. On donne une sphère Σ et une droite d. Déterminer les équations des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.
   a) $\Sigma : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 49$
   $d : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 2 - 6k \\ z = -3k \end{cases}$
   b) $\Sigma : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 361$
   $d = (AB)$ où $A(-8; 5; 17)$ et $B(28; 7; 5)$

11. Soit la droite $d : \begin{cases} 8x - 11y + 8z = 30 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ et la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z = 15$. Déterminer les équations des plans contenant la droite d et tangents à la sphère Σ.

12. Montrer que les sphères d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$ sont tangentes et déterminer l'équation de leur plan tangent commun.

13. On donne la sphère $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 49$ et le plan $\alpha : 3x + 2y - 6z + 57 = 0$.
   a) Déterminer la distance minimale des points de la sphère Σ au plan α.
   b) Le point $Q(7; 3; c)$ (avec $c > 0$) se trouve sur la sphère Σ. Soit β le plan tangent à la sphère au point Q. Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

14. On donne la sphère $\Sigma : (x-7)^2 + (y-12)^2 + (z-6)^2 = 150$, le plan $\alpha : 3x + 4y = 19$ et la droite $d : \begin{cases} x = 5k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$.
   a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la droite d et du plan α.
   b) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ.
   c) Soit e la droite passant par le centre E de la sphère Σ et normale au plan α. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de la droite e et du plan α.
   d) Calculer le rayon r du cercle Γ d'intersection du plan α et de la sphère Σ.
   e) Déterminer les coordonnées des points B, C et D tels que $ABCD$ soit un carré inscrit dans le cercle Γ.

15. On donne les sphères Σ_1 de centre $C_1(7; 9; -3)$ et de rayon $2\sqrt{5}$ et Σ_2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 101$.
   a) Montrer que ces deux sphères sont sécantes.
   b) Déterminer le plan contenant le cercle d'intersection de ces deux sphères.
   c) Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection des deux sphères.

Réponses aux exercices du chapitre 7

1. a) sphère : $C(2;0;-1)$, $r=3$ b) sphère : $C(-3;5;2)$, $r=4$
c) rien d) point $C(-2;7;4)$ e) sphère : $C(\frac{3}{2};-\frac{4}{3};2)$, $r=\sqrt{5}$

2. a) $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$ b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=45$
c) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=56$
d) $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=45$ e) $x^2+y^2+z^2=\frac{175}{3}$
f) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=\frac{64}{9}$
g) $(x-5)^2+(y-6)^2+(z+8)^2=50$ ou
$(x-\frac{35}{11})^2+(y-\frac{6}{11})^2+(z+\frac{108}{11})^2=50$
h) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$
i) $(x+3)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=65$ j) $(x-5)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=49$

3. a) $(1;2;-2)$, $(3;0;-1)$ b) $(1;1;1)$, $(3;-1;-1)$
c) $(1;0;-1)$, $(1;\frac{3}{5};\frac{1}{5})$

4. $C(-1;2;3)$, $r=8$

5. $(x+\frac{13}{2})^2+(y+\frac{9}{2})^2+(z-\frac{9}{2})^2=\frac{387}{4}$

6. $x^2+(y+2)^2+z^2=41$

7. a) $10x-11y+2z=34$ b) $12x+8y-9z=254$
c) $3x-7y+2z+100=0$ d) $112x-28y-91z=260$

8. $8x-y-z=32$, $8x+y+z+96=0$, $4x+7y-z=56$, $4x-7y-z=42$,
$4x-y+7z=56$, $4x-y-7z=42$

9. a) $7x-2y-z=108$, $7x-2y-z+108=0$, $(14;-4;-2)$, $(-14;4;2)$
b) $12x+4y+3z=209$, $12x+4y+3z+129=0$, $(15;5;3)$, $(-9;-3;-3)$
c) $x-y-z=15$, $x-y-z+9=0$, $(\frac{9}{2};-6;-\frac{9}{2})$, $(-\frac{7}{2};2;\frac{7}{2})$

10. a) $2x-6y+3z=11$, $2x-6y+3z+87=0$, $(1;-1;1)$, $(-3;11;-5)$
b) $18x+y-6z=343$, $18x+y-6z+379=0$, $(18;1;-3)$, $(-18;-1;9)$

11. $3x-4y+2z=10$ $2x-3y+4z=10$

12. $2x+6y-3z=63$

13. a) 1 b) 85,32°

14. a) $A(5;1;1)$ c) $P(1;4;6)$ d) $r=5\sqrt{2}$
e) $B(5;1;11)$, $C(-3;7;11)$ et $D(-3;7;1)$

15. b) $x+2y-z=22$ c) centre $D(6;7;-2)$ et rayon $\sqrt{14}$

Annexe A

Représentations graphiques dans l'espace

Jusqu'ici les figures étaient destinées à illustrer un objet ou à éclairer un raisonnement. L'objet des pages suivantes est la représentation graphique elle-même.

Les auteurs, conscients qu'ils sont loin d'être exhaustifs, renvoient le lecteur intéressé et désireux d'en savoir plus à la lecture d'ouvrages spécialisés, en particulier dans le domaine de la géométrie descriptive.

A.1 Représentation d'un point

Pour représenter graphiquement un objet de l'espace, nous le dessinons dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$.

Les plans Oxy, Oxz et Oyz sont appelés respectivement **sol**, **paroi** et **mur**.