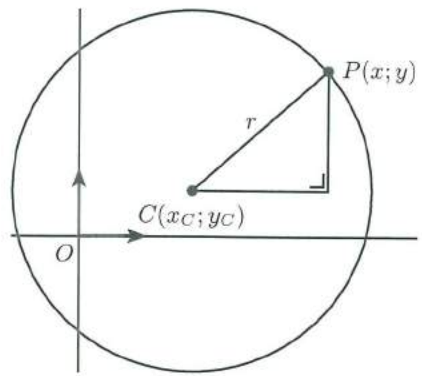
4 Équation du cercle dans le plan

Dans les chapitres précédents, nous avons parlé de droites dont l'équation est de degré un. Nous allons passer à une courbe dont l'équation est de degré deux : le cercle.

Ce chapitre introduira l'équation du cercle et traitera de la position d'objets géométriques par rapport à un cercle.

4.1 Généralités

Le **cercle** Γ de centre $C(x_C; y_C)$ et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points $P(x; y)$ du plan situés à une distance r de C.



$$P \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CP}\| = r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2} = r$$

En élevant au carré, on obtient l'équation du cercle Γ

$$(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2$$

Exemples.

1. *Déterminer l'équation du cercle centré en $C(-3;2)$ et de rayon $\sqrt{20}$.*

$$\left(x-(-3)\right)^2+(y-2)^2=(\sqrt{20})^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x+3)^2+(y-2)^2=20$$

En développant, on obtient $x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

2. *Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-16x+12y+19=0$. On réécrit cette équation*

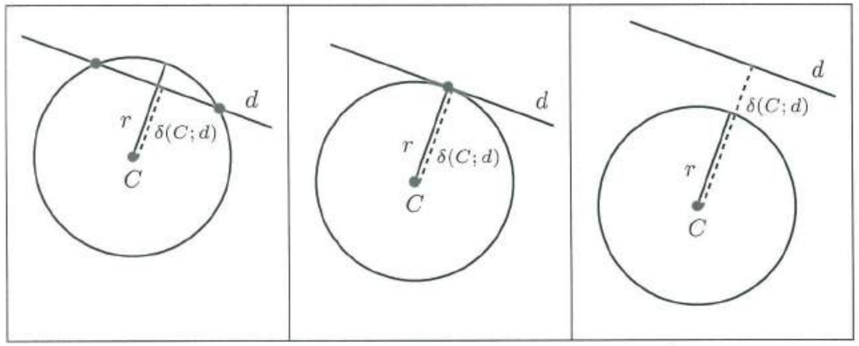
$$(x-8)^2-64+(y+6)^2-36+19=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-8)^2+(y+6)^2=81$$

Le centre est $C(8;-6)$ et le rayon est 9.

4.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

On considère un cercle Γ de centre C et de rayon r ainsi qu'une droite d. Pour situer la droite d par rapport au cercle Γ, on compare la distance $\delta(C;d)$ du centre C à la droite d avec le rayon r.

1. $\delta(C;d)<r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est sécante à Γ (deux points d'intersection)
2. $\delta(C;d)=r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est tangente à Γ (un point d'intersection)
3. $\delta(C;d)>r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est extérieure à Γ (aucun point d'intersection)



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de d et Γ, on peut résoudre par substitution le système formé par les équations du cercle et de la droite.

Exemple 1. *Déterminer l'intersection de la droite $d: 2x-3y-5=0$ et du cercle $\Gamma: (x-2)^2+(y+5)^2=40$. On résout le système*

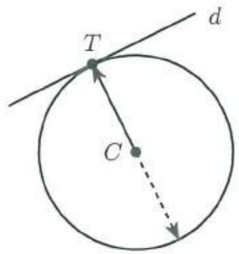
$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+5)^2=40\\ 2x-3y-5=0\end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire $y=\dfrac{2x-5}{3}$ qu'on substitue dans la première équation

$$(x-2)^2+\left(\frac{2x-5}{3}+5\right)^2=40 \quad\Leftrightarrow\quad 13x^2+4x-224=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x_1=4 \text{ et } x_2=-\tfrac{56}{13}$$

Le cercle Γ et la droite d ont donc deux points d'intersection $I_1(4;1)$ et $I_2(-\frac{56}{13};-\frac{59}{13})$.

Exemple 2. *Considérons la droite $d: x-2y+16=0$ et le cercle Γ de centre $C(2;-1)$ et de rayon $r=4\sqrt{5}$.*
Pour déterminer l'intersection de d et de Γ, nous pouvons résoudre un système d'équations comme dans l'exemple précédent. Nous pouvons aussi remarquer que $\delta(C;d)=\dfrac{|2+2+16|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}=r$ et en déduire que d est tangente à Γ en un point T.



Le vecteur $\overrightarrow{CT}$ est un vecteur normal à d. Il est donc colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et a pour norme $4\sqrt{5}$. Ainsi

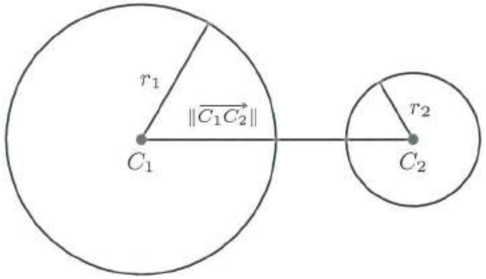
$$\overrightarrow{CT}=\pm 4\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_T-2\\y_T+1\end{pmatrix}$$

et donc $T_1(6;-9)$ et $T_2(-2;7)$. Le point T_1 n'appartient pas à d. On en déduit que T_2 est le point de contact cherché.

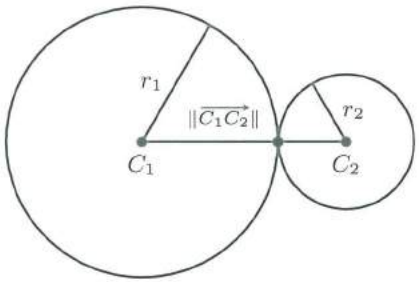
4.3 Positions relatives de deux cercles

On considère les cercles Γ_1 de centre C_1 et de rayon r_1 et Γ_2 de centre C_2 et de rayon r_2. Pour situer Γ_1 par rapport à Γ_2, on compare la distance $\|\overrightarrow{C_1C_2}\|$ entre les centres avec $r_1 + r_2$ et $|r_1 - r_2|$.

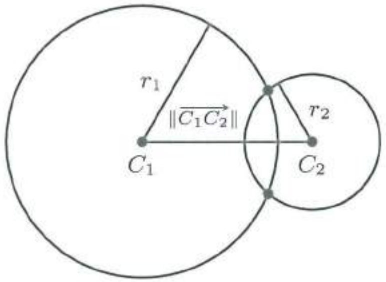
1. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow$ Γ_1 est à l'extérieur de Γ_2 (aucun point d'intersection).



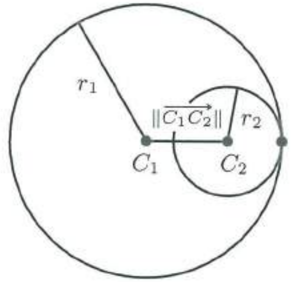
2. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow$ Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement (un point d'intersection).



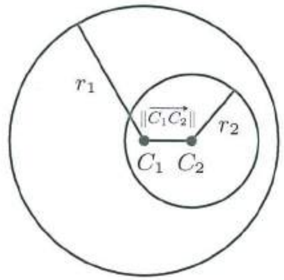
3. $|r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow$ Γ_1 et Γ_2 sont sécants (deux points d'intersection).



4. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = |r_1 - r_2| \quad \Leftrightarrow$ Γ_1 et Γ_2 sont tangents intérieurement (un point d'intersection).



5. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| < |r_1 - r_2| \quad \Leftrightarrow$ l'un des cercles est à l'intérieur de l'autre (aucun point d'intersection).



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de Γ_1 et Γ_2, on résout le système formé des équations des deux cercles.

Exemple. *Déterminer l'intersection des cercles de centre $C_1(1;-3)$ et $C_2(5;5)$ et de rayons respectifs $5\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$.*

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2=50\\(x-5)^2+(y-5)^2=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+6y=40\\x^2+y^2-10x-10y=-40\end{cases}\quad\left|\begin{array}{l}\cdot 1\\\cdot(-1)\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+6y=40\\x+2y=10\end{cases}$$

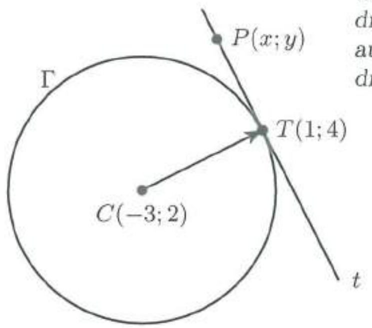
$$\begin{cases}(10-2y)^2+y^2-2(10-2y)+6y=40\\x=10-2y\end{cases}$$

Nous trouvons $y_1 = 2$ et $y_2 = 4$ et donc deux points d'intersection $I_1(6;2)$ et $I_2(2;4)$.

On remarque que l'équation $x + 2y = 10$ obtenue dans le troisième système d'équations représente la droite passant par I_1 et I_2, appelée axe radical des deux cercles. Elle est perpendiculaire à la droite passant par les centres des deux cercles.

4.4 Tangente à un cercle

Exemple. *Considérons le cercle d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$.*
Le point $T(1;4)$ appartient au cercle puisqu'il vérifie l'équation $(1+3)^2 + (4-2)^2 = 20$.
On veut trouver l'équation de la tangente t au cercle au point T.



On considère un point $P(x;y)$ de t. La droite passant par T et P étant tangente au cercle, elle est perpendiculaire à la droite (CT). On a donc $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$$

$$4(x-1) + 2(y-4) = 0$$

$$4x - 4 + 2y - 8 = 0$$

$$2x + y - 6 = 0$$

$$y = -2x + 6$$

On considère un point T du cercle Γ de centre C et de rayon r et on note t la tangente au cercle en T. De manière générale, on a

$$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$

Il existe une autre façon de trouver l'équation de la tangente à Γ en utilisant le centre et le rayon de ce cercle

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$

$$\overrightarrow{CT} \cdot \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CP}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$

$$-\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{TC}^2 = \|\overrightarrow{TC}\|^2 = r^2$$

Finalement on obtient

$$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

Exemple. *Reprenons le cercle centré en $C(-3;2)$ et de rayon $r = \sqrt{20}$ avec le point de tangence $T(1;4)$.*

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} = 20$$

$$4(x+3) + 2(y-2) = 20$$

$$4x + 12 + 2y - 4 = 20$$

$$4x + 2y + 8 = 20$$

$$2x + y - 6 = 0$$

Cette dernière équation est celle de la tangente t comme vu dans l'exemple précédent.
Nous aurions pu obtenir différemment l'équation de cette droite. Nous savons que $\vec{n} = \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $t : 2x + y + k = 0$.
Or t passe par $T(1;4)$, donc $k = -6$ et $t : 2x + y - 6 = 0$.

Généralisons le résultat ci-dessus en notant $T(x_T; y_T)$. On a

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

$$\begin{pmatrix} x_T - x_0 \\ y_T - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = r^2$$

On obtient l'équation de la tangente t à Γ en T.

$$(x_T - x_0)(x - x_0) + (y_T - y_0)(y - y_0) = r^2$$

4.5 Tangentes par un point extérieur au cercle

On considère un cercle Γ et un point A extérieur à Γ. Il existe alors deux tangentes à Γ passant par A. Voyons comment déterminer les équations de ces droites.

Exemple. *Soit le cercle Γ de centre $C(-1;2)$ et de rayon $r = \sqrt{10}$ ainsi que le point $A(1;6)$.*
On peut vérifier que $\|\overrightarrow{CA}\| > r$ et que le point A est donc extérieur au cercle.
Soit $t : y = mx + h$ une droite passant par A. Comme A appartient à t, on a $6 = m + h$.

Ainsi $h = 6 - m$ et on a donc $t : y = mx + 6 - m$ ou $mx - y + 6 - m = 0$. Parmi les droites passant par A, celles qui sont tangentes au cercle Γ sont à une distance $r = \sqrt{10}$ du centre C.

Comme $\delta(C;t) = r$, on a $\dfrac{|-m-2+6-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10}$.

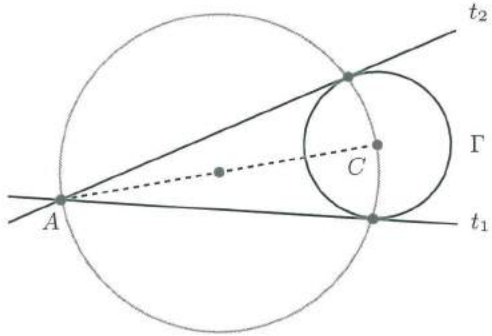
D'où

$$\begin{aligned} -m-2+6-m &= \pm\sqrt{10(m^2+1)} \\ (-2m+4)^2 &= 10(m^2+1) \\ 3m^2+8m-3 &= 0 \end{aligned}$$

D'où $m_1 = \frac{1}{3}$ et $m_2 = -3$. Et donc $h_1 = \frac{17}{3}$ et $h_2 = 9$. On en déduit les équations des deux tangentes à Γ passant par A :

$$t_1 : y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \qquad \text{et} \qquad t_2 : y = -3x + 9$$

Nous aurions aussi pu déterminer les points de contact en considérant l'intersection du cercle Γ et du cercle de Thalès du segment d'extrémités A et C.



4.6 Exercices relatifs au chapitre 4

Équation du cercle

1. Déterminer l'équation du cercle

a) de rayon 3 centré en $C(2;5)$;

b) de rayon 5 centré en $C(6;-3)$;

c) centré à l'origine et passant par le point $A(-2;7)$;

d) de centre $C(-3;5)$ et passant par l'origine ;

e) de centre $C(4;2)$ et passant par le point $A(2;-3)$;

f) de diamètre $[AB]$ avec $A(3;2)$ et $B(-1;6)$;

g) centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x+4y-15=0$;

h) de centre $C(1;-1)$ et tangent à la droite d'équation $y = \frac{5}{12}x + \frac{3}{4}$;

i) passant par les points $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et ayant son centre sur la droite d'équation $y = 3x-2$;

j) passant par les points $A(1;0)$ et $B(5;0)$ et tangent à l'axe Oy.

2. On considère le cercle de rayon $r = 5$ centré en $C(-4;0)$.

a) Déterminer l'équation de ce cercle.

b) Déterminer les éventuels points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

c) Le point $P(-1;-3)$ appartient-il au cercle ?

d) Représenter graphiquement la situation.

3. Dans chaque cas, déterminer si l'équation proposée est celle d'un cercle. Si oui, en donner son centre et son rayon.

a) $x^2+y^2+4x-10y-35=0$

b) $x^2+y^2-35=0$

c) $4x^2+4y^2-4x+8y-59=0$

d) $x^2+y^2-6x-8y+25=0$

e) $9x^2+4y^2+6x+4y=18$

f) $x^2+y^2+4x-6y+25=0$

g) $x^2+y^2+10x-11=0$

h) $3x^2+3y^2+16x-12y=0$

4. a) Déterminer l'équation du cercle centré en $C(3;-4)$ et passant par $A(15;-9)$.
   b) Quelle est la position des points $P_1(3;-17)$, $P_2(13;-12)$ et $P_3(10;8)$ par rapport à ce cercle ?

5. Déterminer l'équation du cercle passant par les points $A(-3;-1)$, $B(4;-2)$ et $C(1;7)$.

6. Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC avec $A(7;-1)$, $B(6;4)$ et $C(4;-4)$.

7. Déterminer l'équation du cercle inscrit dans le triangle ABC donné par les équations de ses côtés.
   $(AB) : 4x+3y-12=0$ $\qquad (BC) : y=2$ $\qquad (AC) : x=10$

8. Déterminer l'équation du cercle inscrit dans le triangle ABC donné par les équations de ses côtés, ainsi que les équations des cercles exinscrits de ce triangle.
   $(AB) : x=1$ $\qquad (BC) : 3x+4y-31=0$ $\qquad (AC) : 4x-3y-58=0$

9. Déterminer l'équation du cercle
   a) centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x+4y-15=0$;
   b) centré en $C(1;2)$ et tangent à la droite (AB) où $A(-4;-8)$ et $B(8;1)$;
   c) de centre $C(3;-1)$ et tangent à la droite d'équation $y=x-2$;
   d) de centre $C(1;-1)$ et tangent à la droite d'équation $y=\frac{5}{12}x+\frac{3}{4}$;
   e) passant par les points $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et ayant son centre sur la droite d'équation $y=3x-2$.

10. Déterminer l'intersection du cercle centré en O de rayon $\sqrt{10}$ et de la droite $y=-2x+1$.

11. Déterminer l'intersection du cercle d'équation $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ et de la droite $y=7x+12$.

12. Soit le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-11=0$. Déterminer l'équation du diamètre passant par le milieu de la corde située sur la droite d'équation $x-2y-3=0$.

13. On donne deux cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer les points d'intersection de ces cercles pour
   a) $\Gamma_1 : x^2+y^2-12x-10y+41=0$ et $\Gamma_2 : x^2+y^2-8x+4y-9=0$
   b) $\Gamma_1 : x^2+y^2-2x-4y-95=0$ et $\Gamma_2 : x^2+y^2-26x-22y+265=0$

14. Déterminer l'équation du cercle qui passe par le point $A(1;-1)$ et par les points d'intersection des cercles d'équations $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ et $x^2+y^2-6x+12y-35=0$.

15. Déterminer les distances entre le point $P(-7;2)$ et le point le plus proche et le plus éloigné du cercle $\Gamma : x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

16. Vérifier que le point T appartient à la droite d_1 et trouver les équations des cercles tangents à d_1 en T et tangents à d_2 dans les cas suivants.
   a) $T(3;7)$ $\qquad d_1 : 3x-4y+19=0$ $\qquad d_2 : 4x+3y-58=0$
   b) $T(4;3)$ $\qquad d_1 : y=5x-17$ $\qquad d_2 : x-5y-5=0$

17. Déterminer les équations des cercles centrés sur la droite d et tangents aux droites a et b dans les cas suivants.
   a) $d : 3x+7y-39=0$ $\qquad a : 3x-4y+12=0$ $\qquad b : x=0$
   b) $d : 4x-5y-3=0$ $\qquad a : 2x-3y-10=0$ $\qquad b : 3x-2y+5=0$

18. Déterminer les équations des cercles tangents aux deux droites d_1 et d_2 et passant par le point A dans les cas suivants.

a)	$d_1 : x - 2y + 2 = 0$	$d_2 : y = 2x - 17$	$A(6; -1)$
b)	$d_1 : y = -2x - 2$	$d_2 : y = -2x + 18$	$A(1; 0)$
c)	$d_1 : 4x + 3y - 36 = 0$	$d_2 : 3x - 4y + 23 = 0$	$A(-1; -3)$

19. Déterminer les équations de tous les cercles de rayon r tangents à la fois aux droites a et b dans les cas suivants.

a)	$a : 4x + 3y - 12 = 0$	$b : y = 0$	$r = 2$
b)	$a : 3x - 4y + 12 = 0$	$b : 12x + 5y - 15 = 0$	$r = 3$

20. On considère les deux cercles $\Gamma_1 : (x + 9)^2 + (y - 12)^2 = 180$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 45$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2.

b) Soit A l'un de ces points d'intersection et C le centre de Γ_1. Montrer que le triangle OAC est rectangle en A.

c) Trouver les coordonnées du centre H de l'homothétie de rapport positif transformant Γ_1 en Γ_2.

21. On considère la droite $d : y = -x$ et les trois cercles
$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$, $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$ et
$\Gamma_3 : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

a) Montrer que Γ_3 est le symétrique de Γ_2 par rapport à d.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_3.

c) Trouver un point P de Γ_1 et un point Q de Γ_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à d.

Tangente au cercle

22. On considère le cercle centré en $A(5; 0)$ et passant par l'origine.

a) Calculer les coordonnées des points d'abscisse 1 de ce cercle.

b) Déterminer les équations des tangentes à ce cercle en ces points.

23. Déterminer les équations des cercles de rayon 5 dont les centres sont sur la droite d'équation $y = -2x + 1$ et qui sont tangents à la droite d'équation $3x + 4y - 34 = 0$.

24. On donne un cercle Γ et un point A. Après avoir vérifié que A appartient à Γ, trouver l'équation de la tangente à Γ au point A.

a)	$\Gamma : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$	$A(-2; 1)$
b)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 37$	$A(3; 4)$
c)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$	$A(2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$
d)	$\Gamma : 3x^2 + 3y^2 - 7x + 12y = 28$	$A(5; -2)$

25. Déterminer les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ aux points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

26. On considère le cercle de centre $C(4; -1)$ et de rayon $r = 2$. Déterminer l'équation de la (des) tangente(s) de pente 2 à ce cercle.

27. On donne le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite $y = mx$

a) est-elle tangente à ce cercle ?

b) coupe-t-elle ce cercle ?

28. a) Montrer que les cercles d'équations $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ et $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ sont tangents.

b) Trouver le point de tangence T.

c) En déduire l'équation de la tangente commune en ce point T.

29. On considère le cercle Γ centré à l'origine et passant par le point $M(3; 4)$. La tangente à Γ au point M coupe l'axe Ox en un point P. On trace la droite joignant le point P au point $B(0; 5)$ qui recoupe Γ en un point A. Calculer l'aire du triangle OAB.

30. Calculer l'angle aigu formé par la droite d'équation $y = 3x - 1$ et le cercle d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forme cette droite avec la tangente en l'un de ses points d'intersection avec le cercle).

31. Calculer l'angle sous lequel se coupent les cercles d'équations $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forment les deux tangentes en l'un des points d'intersection des deux cercles).

32. Déterminer les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ perpendiculaires à la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.

33. Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ passant par le point P.

a)	$\Gamma : x^2 + y^2 = 25$	$P(7;1)$
b)	$\Gamma : (x+1)^2 + y^2 = 20$	$P(1;6)$
c)	$\Gamma : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$	$P(10;3)$
d)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$	$P(-1;5)$
e)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$	$P(3;2)$
f)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$	$P(9;4)$

34. Déterminer les équations des tangentes communes aux cercles Γ_1 et Γ_2.

a)	$\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$	$\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
b)	$\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 25$	$\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 24y + 143 = 0$

35. On donne le point $C(0;9)$ et le cercle $\Gamma : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

a) Construire le triangle ABC isocèle de sommet A sachant que Γ en est le cercle inscrit et que l'abscisse de A est positive.

b) Calculer les coordonnées des sommets A et B et des points de contact A', B' et C' du cercle Γ avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement.

36. On donne les sommets $A(-15;-5)$ et $B(1;7)$ d'un triangle ABC.

a) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine du repère.

b) Montrer que ce triangle est rectangle.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

37. On donne les sommets $A(7;3)$, $B(1;-1)$ et $C(9;0)$ d'un triangle. Considérons le cercle Γ de diamètre $[AC]$ et T le point où la droite (BC) recoupe Γ. La tangente t à Γ en T coupe le côté $[AB]$ en M.

a) Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

b) Calculer l'aire du quadrilatère $AMTC$.

38. On considère les points $A(0;5)$, $B(6;-3)$ et $C(7;4)$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et déterminer l'équation du cercle Γ_1 circonscrit à ce triangle.

b) Déterminer l'équation du cercle Γ_2 de rayon $\frac{5}{2}$ qui coupe Γ_1 en A et dont le centre E, d'abscisse strictement positive, est situé sur la droite d'équation $4x - 2y + 5 = 0$.

c) Déterminer les équations des tangentes t_1 et t_2 en A à Γ_1 et Γ_2 respectivement et montrer que ces tangentes sont perpendiculaires.

Divers

39. On considère le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 + 10y = 0$, la droite $d : y = -2x + 6$ et le point $A(-4;-2)$.

a) Vérifier que le point A est situé sur Γ.

b) Déterminer l'équation de la tangente t au cercle Γ en A.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection B des droites d et t.

d) Calculer les coordonnées des points d'intersection C et D du cercle Γ avec la droite d.

e) Montrer que les triangles ABC et ABD sont isocèles (préciser en quel sommet).

f) Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|$.

40. On considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$ et $C(0;5\sqrt{3})$. La droite perpendiculaire p à (BC) élevée en B coupe (AC) en D et la perpendiculaire q à (BC) élevée en C coupe (AB) en E.

a) Calculer les coordonnées des point d'intersection D et E.

b) Calculer les coordonnées du centre I_1 du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ADB et celles du centre I_2 du cercle Γ_2 circonscrit au triangle ACE.

c) Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents.

d) Déterminer l'angle aigu formé par les droites (I_1I_2) et la droite q.

e) Calculer l'aire du triangle I_1BI_2.

41. On considère un cercle Γ centré en $C(x_0;y_0)$ et de rayon r. Montrer que tout point $P(x;y)$ du cercle Γ vérifie les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(\varphi) \\ y = y_0 + r\sin(\varphi) \end{cases} \quad \text{avec } \varphi \in \mathbb{R}.$$

42. Montrer que les systèmes d'équations ci-dessous représentent des cercles dont on donnera le centre, le rayon et l'équation cartésienne.

a) $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(\varphi) \\ y = -2 + 2\sin(\varphi) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + \cos(\varphi) \\ y = -\sin(\varphi) \end{cases}$

43. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation donnée dans les cas suivants.

a) $x^2 + y^2 \leq 36$ b) $(x-3)^2 + (y+4)^2 > 8$

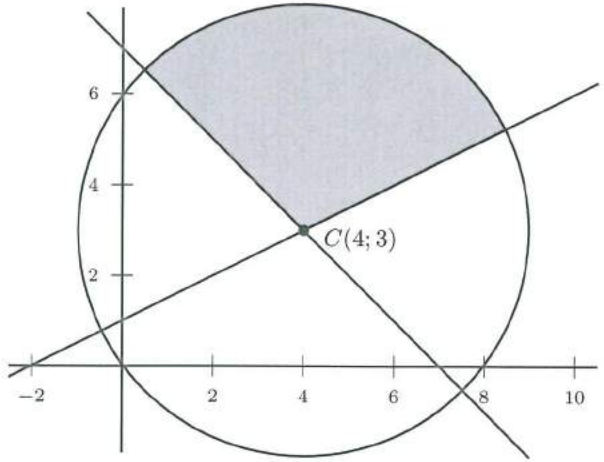
c) $x^2 + y^2 - 6y < 0$ d) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y + 5 \geq 0$

44. Représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient le système d'inéquations donné dans les cas suivants.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y < 20 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 > 75 \\ 2x + 3y + 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x - y + 5 \geq 0 \\ x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$

45. Trouver un système d'inéquations qui détermine la portion du plan représentée ci-dessous (y compris les frontières).



Réponses aux exercices du chapitre 4

1. a) $(x-2)^2+(y-5)^2=9$ b) $(x-6)^2+(y+3)^2=25$
c) $x^2+y^2=53$ d) $(x+3)^2+(y-5)^2=34$
e) $(x-4)^2+(y-2)^2=29$ f) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$
g) $x^2+y^2=9$ h) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
i) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$
j) deux solutions : $(x-3)^2+(y\pm\sqrt{5})^2=9$

2. a) $(x+4)^2+y^2=25$ b) $I_1(0;3)$, $I_2(0;-3)$, $I_3(-9;0)$ et $I_4(1;0)$
c) non

3. a) oui, $C(-2;5)$, $r=8$ b) oui, $C(0;0)$, $r=\sqrt{35}$
c) oui, $C(\frac{1}{2};-1)$, $r=4$ d) non car $r=0$ e) non
f) non g) $C(-5;0)$, $r=6$ h) oui, $C(-\frac{8}{3};2)$, $r=\frac{10}{3}$

4. a) $(x-3)^2+(y+4)^2=169$
b) P_1 appartient au cercle, P_2 intérieur et P_3 extérieur

5. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

6. $3x^2+3y^2-14x-4y-56=0$

7. $(x-\frac{43}{6})^2+(y+\frac{5}{6})^2=\frac{289}{36}$

8. cercle inscrit : $(x-6)^2+(y+3)^2=25$
cercles exinscrits : $(x-11)^2+(y-12)^2=100$, $(x-16)^2+(y+23)^2=225$ et $(x+29)^2+(y+8)^2=900$

9. a) $x^2+y^2=9$ b) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ c) $(x-3)^2+(y+1)^2=2$
d) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ e) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

10. $I_1(-1;3)$ et $I_2(\frac{9}{5};-\frac{13}{5})$

11. $I_1(-1;5)$ et $I_2(-2;-2)$

12. $y=-2x+3$

13. a) $I_1(2;3)$ et $I_2(\frac{442}{53};\frac{63}{53})$ b) $I(9;8)$

14. $x^2+y^2+6x-9y-17=0$

15. Plus courte distance : 2 et plus longue distance : 28

16. a) $x^2+(y-11)^2=25$ $(x-6)^2+(y-3)^2=25$
b) $(x-\frac{56}{9})^2+(y-\frac{23}{9})^2=\frac{416}{81}$ $(x+1)^2+(y-4)^2=26$

17. a) $(x+36)^2+(y-21)^2=1296$ $(x-\frac{18}{17})^2+(y-\frac{87}{17})^2=\frac{324}{289}$
b) $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$ $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

18. a) $(x-\frac{58}{9})^2+(y-\frac{13}{9})^2=\frac{500}{81}$ $(x-2)^2+(y+3)^2=20$
b) $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ $(x-\frac{9}{5})^2+(y-\frac{22}{5})^2=20$
c) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ $(x+\frac{62}{25})^2+(y+\frac{759}{25})^2=\frac{18769}{25}$

19. a) $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, $(x-7)^2+(y+2)^2=4$
b) $(x+\frac{11}{3})^2+(y-4)^2=9$, $(x-\frac{11}{3})^2+(y-2)^2=9$, $(x-\frac{9}{7})^2+(y-\frac{54}{7})^2=9$
$(x+\frac{9}{7})^2+(y+\frac{12}{7})^2=9$

20. a) $(3;6)$ et $(-\frac{33}{5};-\frac{6}{5})$ c) $H(9;-12)$

21. b) $(-3;0)$ et $(-4;1)$
c) deux solutions : $P_1(-3;0)$ et $Q_1(0;3)$ ou $P_2(-4;1)$ et $Q_2(-1;4)$

22. a) $T_1(1;3)$ et $T_2(1;-3)$ b) $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ et $y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

23. $(x+11)^2+(y-23)^2=25$ et $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

24. a) $3x-4y+10=0$ b) $x+7y-31=0$ c) $x+y-2-4\sqrt{2}=0$
d) $x-5=0$

25. $x=8$, $x=-2$, $3x-4y+16=0$ et $3x+4y+16=0$

26. $y=2x-9+2\sqrt{5}$ et $y=2x-9-2\sqrt{5}$

27. a) $m=\pm\frac{3}{4}$ b) $|m|<\frac{3}{4}$

28. b) $T\left(\frac{20}{13};\frac{95}{13}\right)$ c) $12x+5y-55=0$

29. $\frac{375}{34}$

30. $45°$

31. $90°$

32. $6x-4y-22\pm5\sqrt{13}=0$

33. a) $3x+4y-25=0$ et $4x-3y-25=0$
b) $2x+y-8=0$ et $x-2y+11=0$
c) $4x-3y-31=0$ et $3x+4y-42=0$
d) $y=5$ et $4x-3y+19=0$
e) $x-3y+3=0$ et $3x+y-11=0$
f) $x-2y-1=0$ et $y=2x-14$

34. a) $y = 3$ et $4x - 3y - 19 = 0$
b) $y = \sqrt{8}x + 15$, $y = -\sqrt{8}x + 15$, $y = \sqrt{3}x + 10$ et $y = -\sqrt{3}x + 10$

35. $A(\frac{3}{2}; \frac{3}{4})$ $\quad B(-6; -3)$ $\quad A'(-3; 3)$ $\quad B'(\frac{6}{5}; \frac{12}{5})$ $\quad C'(0; 0)$

36. a) $C(10; -5)$ $\quad$ c) 150

37. $\frac{39}{5}$

38. a) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ $\quad$ b) $\Gamma_2 : (x-2)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{25}{4}$
c) $t_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ et $t_2 : 4x + 3y - 15 = 0$

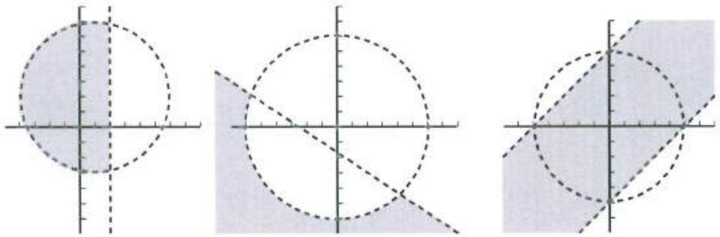
39. b) $t : 4x - 3y + 10 = 0$ $\quad$ c) $B(\frac{4}{5}; \frac{22}{5})$ $\quad$ d) $C(4; -2)$ et $D(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5})$
e) isocèles en A et en D respectivement

40. a) $D(0; -\frac{5\sqrt{3}}{3})$ et $E(-15; 0)$ $\quad$ b) $I_1(\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{6})$ et $I_2(-\frac{15}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$
d) $\frac{\pi}{3}$ $\quad$ e) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

42. a) $C(3; -2)$, $r = 2$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$
b) $C(1; 0)$, $r = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

43. a) intérieur et pourtour du cercle centré en l'origine et de rayon 6
b) extérieur du cercle centré en $(3; -4)$ et de rayon $\sqrt{8}$
c) intérieur du cercle centré en $(0; 3)$ et de rayon 3
d) extérieur et pourtour du cercle centré en $(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$ et de rayon 2

44.



45. $\begin{cases} y \geq 7 - x \\ x - 2y + 2 \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 25 \end{cases}$

5 Équations de la droite et du plan dans l'espace

Explorer la géométrie de l'espace amène une plus grande richesse de notions et de situations.

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une droite du plan peut être décrite par différentes équations : vectorielle, paramétriques et cartésiennes. Dans ce qui suit, nous allons voir qu'avec quelques ajustements c'est encore le cas dans l'espace. Il est aussi possible de décrire par les mêmes types d'équations des plans et d'étudier les positions relatives de droites et de plans. Nous calculerons aussi des angles formés par des droites et des plans.

Pour améliorer la compréhension de ce chapitre, il est judicieux de savoir représenter de manière réaliste des droites et des plans. À cet effet, l'étude de l'annexe A est recommandée.

5.1 Équations de la droite

Comme en géométrie plane, une droite de l'espace est entièrement déterminée par deux points distincts. Ceux-ci définissent un vecteur non nul, appelé **vecteur directeur** de la droite, qui indique la direction de cette droite. Pour décrire une droite dans l'espace, il suffit d'en connaître un point A et sa direction donnée par un vecteur directeur $\vec{d}$.

Pour tout point P de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre réel k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k\vec{d}$. Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k\vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Si la droite est déterminée par deux points distincts A et B, un vecteur directeur peut être $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.