§ 6. Fonction logarithme Fonction exponentielle

Dans les cours d'algèbre élémentaire, l'expression a^x n'est définie de manière complète que si x est rationnel. On fait cependant la supposition que la définition de a^x peut être prolongée à des exposants réels quelconques de telle manière que les règles de calcul sur les exposants soient encore valables.

On suppose alors que la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$ est bijective si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La **fonction logarithme** $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est alors définie comme la réciproque de $\exp_a$, et ses propriétés établies à partir de celles de $\exp_a$.

Dans ce paragraphe, nous allons procéder de manière inverse en définissant une fonction logarithme (la fonction logarithme naturel) à l'aide d'une intégrale. Cette fonction sera bijective ; elle permettra de définir de manière rigoureuse l'exponentielle comme réciproque et de démontrer les résultats admis aux cours d'algèbre élémentaire.

1. Primitive de la fonction inverse

Nous avons vu (page 78) que, si $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, alors $\int t^q\, dt = \dfrac{t^{q+1}}{q+1} + c$.

Ce calcul n'est pas applicable au cas $q = -1$. Cependant $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ existe si $x > 0$, car la fonction inverse $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue entre 1 et x.

Pour trouver les propriétés de la fonction F, dérivons les fonctions $G(x) = F(kx)$ et $H(x) = F(x^q)$, $k \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{Q}$.

On obtient $G'(x) = F'(kx) \cdot k = \dfrac{1}{x}$. Il existe donc une constante c telle que $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x > 0$. Comme $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$, on a $c = F(k)$, et $F(kx) = F(k) + F(x)$.

Comme $H'(x) = F'(x^q) \cdot q\, x^{q-1} = \dfrac{q}{x}$, on déduit de même $F(x^q) = q \cdot F(x)$.

La fonction F transforme donc les produits en sommes et les puissances en produits, et elle vaut 0 en 1 ; elle a donc les mêmes propriétés que les fonctions logarithmiques étudiées dans les cours d'algèbre élémentaire.

2. Fonction logarithme naturel

2.1 Définition

> On appelle **fonction logarithme naturel** la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

2.2 Propriétés

a) La fonction ln est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

b) Le signe de $\ln(x)$ est donné par le tableau

x		0		1	
$\ln(x)$			$-$	0	$+$

c) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

La fonction ln est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

e) Pour tout x, y réels strictement positifs et tout q rationnel, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln(x^q) &= q \cdot \ln(x) \end{aligned}}$$

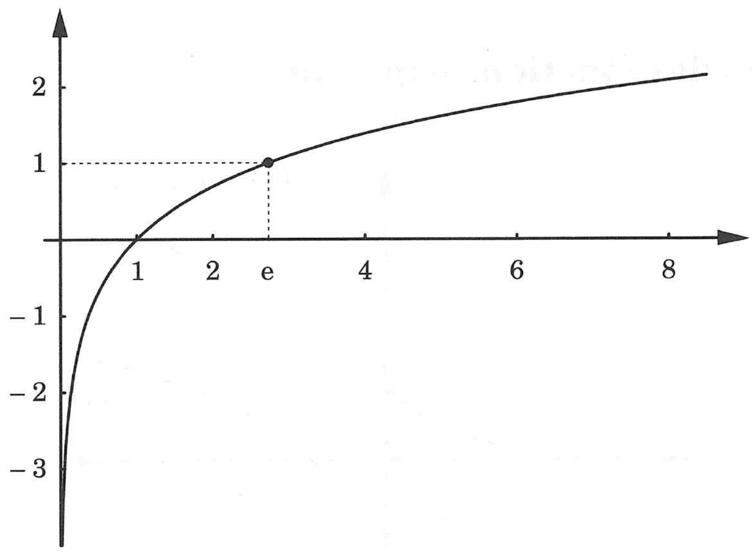
f) La fonction $g(x) = \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi, $\ln|x|$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ pour tout x non nul.

g) Si f est une fonction positive et dérivable, $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

h) Si f est une fonction dérivable, $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$.

i) Si f est une fonction qui ne s'annule pas et qui est continûment dérivable sur l'intervalle I, alors $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$.

2.3 Graphe de la fonction ln.



On désigne par **e** l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$ ($e \cong 2,71828$).

3. Fonction exponentielle

3.1 Définition

La **fonction exponentielle** $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

En d'autres termes

$\ln(\exp(x)) = x$ pour tout x réel

$\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$

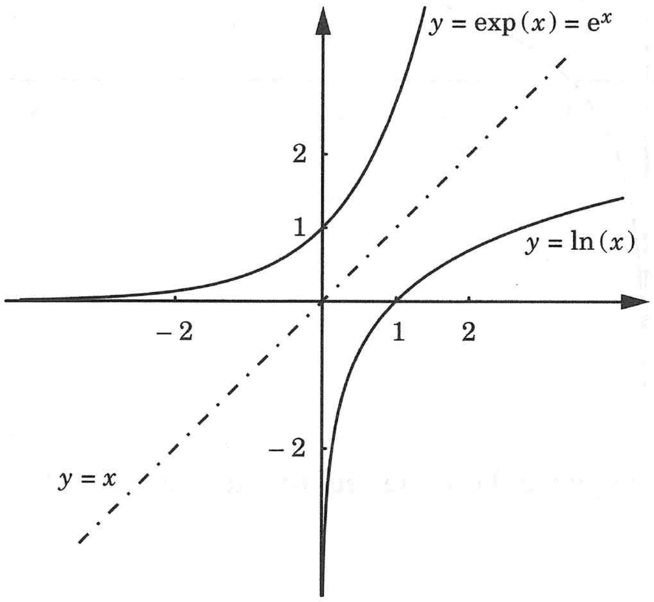
Remarque

Pour tout q rationnel, on a $\ln(e^q) = q \cdot \ln(e) = q = \ln(\exp(q))$. Il en résulte que, pour tout q rationnel, $\exp(q) = e^q$. On étend cette égalité aux nombres réels.

Définition

> Pour tout x réel, on définit le nombre $\mathbf{e^x}$ par $e^x = \exp(x)$

3.2 Graphes des fonctions exp et ln



3.3 Propriétés

a) $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

b) $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

d) La fonction e^x est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

e) Pour tout x, y réel et tout q rationnel, on a

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$
$$(e^x)^q = e^{x \cdot q}$$

f) La fonction e^x est égale à sa dérivée: $(e^x)' = e^x$ pour tout x réel. Ainsi, e^x est une primitive de e^x pour tout x réel.

g) Si f est une fonction dérivable, $(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

h) Si f est une fonction continûment dérivable, $\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

3.4 Théorème

Les seules fonctions égales à leur dérivée sont les multiples de la fonction exponentielle par une constante. Plus généralement

> Soit k un réel et f une fonction positive et dérivable sur un intervalle I. Si $f' = k \cdot f$ en tout point de I, il existe une constante positive c telle que $f(x) = c\, e^{kx}$

4. Fonctions logarithme et exponentielle de base *a*

Dans tout cet alinéa, la lettre a désigne un réel strictement positif et différent de 1.

4.1 Fonction logarithme de base *a*

Définition

> On appelle **fonction logarithme de base *a*** la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Propriétés

a) La fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

b) La fonction $\log_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$

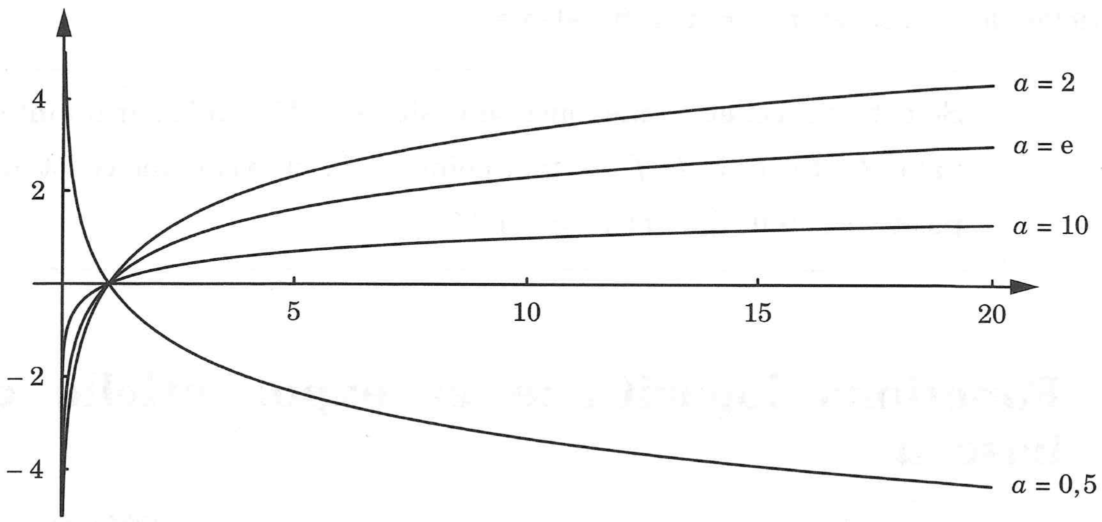
c) Pour tout x, y réel strictement positif et tout q rationnel, on a

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\qquad$ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^q) = q \cdot \log_a(x)$ $\qquad$ $\log_a(a^q) = q$

d) $\log_e(x) = \ln(x)$

Représentation graphique



4.2 Fonction exponentielle de base a

Définition

> La **fonction exponentielle de base** a $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la réciproque de la fonction $\log_a$.

En d'autres termes

$\log_a(\exp_a(x)) = x$ pour tout x réel

$a^{\log_a(x)} = x$ pour tout $x > 0$

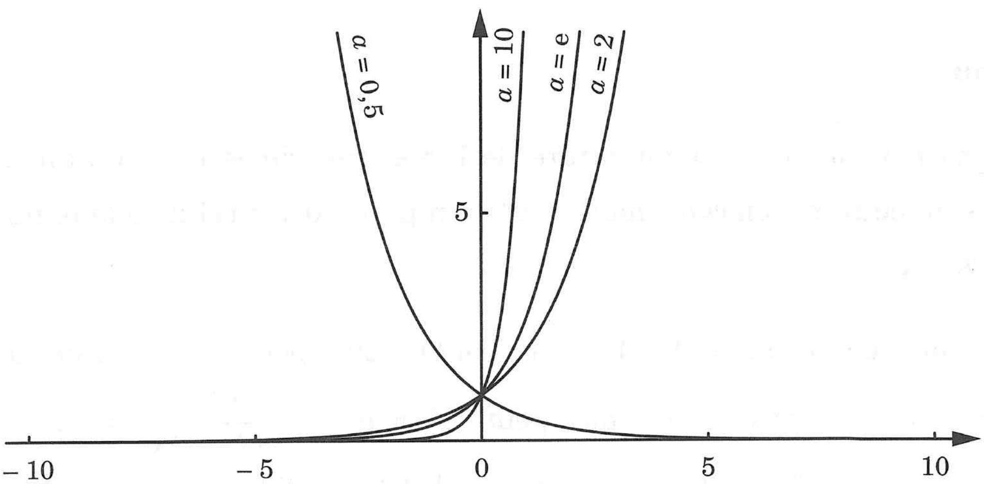
Remarque

Pour tout q rationnel, on a $\log_a(a^q) = q = \log_a(\exp_a(q))$. Il en résulte que, pour tout q rationnel, $\exp_a(q) = a^q$. On étend cette égalité aux nombres réels.

Définition

Pour tout x réel, on définit le nombre $\boldsymbol{a^x}$ par $a^x = \exp_a(x)$

Représentation graphique



Propriétés

Pour tout x , y réel et b réel strictement positif, on a

a) $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

b) $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

c) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

d) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$

e) La fonction a^x est dérivable pour tout x réel et $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

f) La fonction a^x est une bijection strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

4.3 Exercice résolu

La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant (loi de Newton).

Si la température d'un objet passe de 200 °C à 140 °C en 20 minutes lorsqu'il a pour milieu ambiant de l'air à la température constante de 20 °C ,

a) quel est le temps nécessaire pour que la température de l'objet passe de 140 °C à 50 °C ?

b) quelle est sa température 1 heure après avoir atteint 100 °C ?

Solution

Désignons par $\theta(t)$ la température de l'objet (exprimée en °C) au temps t (exprimé en heures), en convenant que le temps $t = 0$ est celui où la température est de 200 °C .

Par la loi de Newton, on a $\theta'(t) = -c \cdot (\theta(t) - 20)$ pour une certaine constante positive c. Cette équation peut s'écrire $\frac{\theta'(t)}{\theta(t) - 20} = -c$, donc $\int \frac{\theta'(t)}{\theta(t) - 20}\, dt = \int -c\, dt$, c'est-à-dire $\ln(\theta(t) - 20) = -ct + k$ pour un réel k. Il en résulte que $\theta(t) = 20 + e^{-ct+k}$.

On détermine les constantes c et k en utilisant les conditions $\theta(0) = 200$ et $\theta\left(\frac{1}{3}\right) = 140$:

$$\theta(0) = 200 \Leftrightarrow e^k = 180\ ,$$

$$\theta\left(\frac{1}{3}\right) = 140 \Leftrightarrow 120 = e^k \cdot e^{-\frac{c}{3}} \Leftrightarrow e^{-\frac{c}{3}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{-c} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

D'où $k \cong 5,1930$ et $c \cong 1,2164$

La température de l'objet au temps t est donc donnée par la formule

$$\theta(t) = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^t \cong 20 + e^{-1,2164\,t + 5,1930}$$

Nous sommes maintenant à même de répondre aux deux questions posées.

a) Cherchons à quel moment la température $\theta(t)$ est égale à 50 °C :

$$50 = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^t \Leftrightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^t = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t\ln\left(\frac{8}{27}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(6)}{\ln(8) - \ln(27)} \cong 1,47 \text{ h} \cong 1 \text{ h } 29 \text{ min}$$

b) Désignons par t_0 le moment où la température est égale à 100 °C :

$$100 = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0}.$$ On cherche $\theta(t_0 + 1)$:

$$\theta(t_0 + 1) = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0 + 1} = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)$$

$$= 20 + 80 \cdot \left(\frac{8}{27}\right) \cong 43,7 \text{ °C}$$

5. Quelques limites

Soit k un réel, a un réel strictement positif et n un entier strictement positif.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^k(x)}{x^a} = 0$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^x = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

6. Intégration de fonctions rationnelles

6.1 Introduction

Une des nombreuses utilités de la fonction logarithme est de permettre le calcul de certaines primitives de fonctions rationnelles $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des fonctions polynômes.

La méthode d'intégration est basée sur la décomposition de $q(x)$ en somme d'**éléments simples**. Nous l'illustrons par un exemple.

On veut déterminer les primitives de $q(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$.

On effectue d'abord la division euclidienne du numérateur par le dénominateur:

$$q(x) = 2 + \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 2 + \frac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2}$$

On détermine ensuite les nombres a, b et c tels que l'égalité

$$\frac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

soit vraie pour tout x différent de 0 et de 1 .

En multipliant les deux membres de cette égalité par $x \cdot (x-1)^2$, on obtient l'égalité

$$-x^2 + 3x + 1 = a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$$

qui doit être vraie pour tout x différent de 0 et de 1 .

Or, si cette égalité est vraie pour tout x réel, elle sera encore vérifiée si x est différent de 0 et de 1 . Il suffit donc de trouver trois nombres a , b et c vérifiant l'égalité ci-dessus pour tout x réel.

Première méthode

Les deux polynômes $-x^2 + 3x + 1$ et $a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$ étant égaux, les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a - b + c = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$

Ainsi $\dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$

Seconde méthode

On peut montrer que deux polynômes de degré 2 sont égaux s'ils prennent la même valeur pour trois valeurs distinctes de x .

Les polynômes $a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$ et $-x^2 + 3x + 1$ sont égaux s'ils prennent la même valeur en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = 2$:

si $x = 0$, on obtient $a = 1$,

si $x = 1$, on obtient $c = 3$,

si $x = 2$, on obtient $a + 2b + 2c = 3$, donc $b = -2$.

Finalement

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= 2x + \ln|x| - 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$$

dans chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

EXERCICES

Fonction logarithme naturel

6.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes.

Indication: pour certaines fonctions, on aura intérêt à modifier la forme de $f(x)$ avant d'en calculer la dérivée.

1) $f(x) = \ln(5x)$
2) $f(x) = \ln(x-1)$
3) $f(x) = \ln(1-x)$
4) $f(x) = \ln|1-x|$
5) $f(x) = \ln(x^2-x)$
6) $f(x) = \ln(x-x^2)$
7) $f(x) = \ln|x^2-x|$
8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$
9) $f(x) = \ln\sqrt{3-x^2}$
10) $f(x) = \ln(3x^5)$
11) $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+3}\right)$
12) $f(x) = x\ln(x) - x$
13) $f(x) = \ln|\cos(x)|$
14) $f(x) = \ln(\tan(2x))$
15) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
16) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

6.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive définie sur D_f

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
2) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$
3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$
4) $f(x) = x^2+x+1+\dfrac{3}{5x-1}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$
6) $f(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-3x+5}{x+2}$
7) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

6.3 Calculer les intégrales suivantes, lorsqu'elles existent

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x}$ 4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

5) $\displaystyle\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2-4x+2}{3x+4}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan(x)\,dx$

6.4 Calculer les zéros et l'extremum de $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$.

Fonction exponentielle

6.5 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$ 2) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{(1/x)}$ 4) $f(x) = \exp(\sqrt{x^2+x}\,)$

5) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$ 6) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$

7) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$ 8) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(x)$

6.6 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$.

6.7 Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x + x = 0$ admet une solution unique et calculer cette solution à $0,01$ près.

6.8 Calculer

1) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{2x+1}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^3 x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

5) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^x\,dx$ 6) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} x^2 \cdot \mathrm{e}^x\,dx$

Fonctions logarithme et exponentielle de base a

6.9 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = \log_2(3x+1)$
2) $f(x) = \log_3(x^2+x+1)$
3) $f(x) = \log_{10}|\sin(x)|$
4) $f(x) = 2^x$
5) $f(x) = \exp_3(x^2)$
6) $f(x) = \exp_2\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

6.10 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^x$
2) $f(x) = x^{\ln(x)}$

6.11 Calculer

1) $\displaystyle\int_1^3 4^x \, dx$
2) $\displaystyle\int_0^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} dx$
3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x \cdot 2^{x^2} \, dx$

6.12 Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = 2^x$, $x + y = 1$ et $x = 1$.

6.13 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe d'équation $y = 2^{-x}$ entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

Quelques limites

6.14 Calculer les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$
2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$
3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan(2x)}$
4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x}{1 - e^x}$

5) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1}$

6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$

7) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x}$

8) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(x)}$

9) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x \cdot (1 - e^x)}{(1+x) \cdot \ln(1-x)}$

10) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

11) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)}$

12) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{-3/x}}{x^2}$

13) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$

14) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

6.15 Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ pour $a > 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

6.16 Déterminer les asymptotes de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 2x + 3}$

4) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

7) $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

8) $f(x) = (x+3)\, e^{\frac{4}{x-1}}$

6.17 Etudier les fonctions suivantes

1) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

2) $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$

3) $f(x) = \ln(x^2 + 9)$

4) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

5) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

6) $f(x) = \ln|\ln(x)|$

7) $f(x) = \ln(e^{2x} + 3e^x + 2)$

8) $f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$

6.18 Par un calcul de logarithme en base 10, déterminer le nombre de chiffres des nombres naturels suivants

1) $1'000^{1'000}$ 2) $1'001^{999}$

3) $999^{1'001}$ 4) $2^{859'433}-1$

5) $2^{1'398'269}-1$ (c'était le plus grand nombre premier connu le 16 novembre 1996)

Intégration de fonctions rationnelles

6.19 Calculer

1) $\displaystyle\int \frac{12x^3+42x^2+24x+12}{2x+3}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{2x-1}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x-1)^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x^2-9)}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-3x^3}\,dx$

Exercices récapitulatifs

6.20 On considère les courbes γ_1 d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ et γ_2 d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(x)$.

1) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes γ_1 et γ_2.

2) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

6.21 Sous quel angle les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{x+2}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ se coupent-elles ?

6.22 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2^x$ passant par le point $(1 ; 0)$.

6.23 Déterminer le nombre réel a pour lequel les courbes d'équations $y = e^x$ et $y = a x^3$ sont tangentes. Calculer les coordonnées du point de contact.

6.24 Démontrer que, quels que soient les nombres réels a et b, les courbes $y^2 = a - 2x$ et $y = e^{x+b}$ se coupent à angle droit.

6.25 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$

Indication: on déterminera tout d'abord deux nombres réels a et b tels que $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = a + b\,\dfrac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

6.26 Tant qu'il y a assez de nourriture, la population d'une culture de bactéries croît proportionnellement à la quantité de bactéries présentes. Le nombre de bactéries au début d'une expérience est égal à 100 et leur nombre double chaque heure.

1) Combien y aura-t-il de bactéries deux heures et demie après le début de l'expérience ?

2) Au bout de combien de temps la population sera-t-elle de 100'000 bactéries ?

6.27 Une substance radioactive se désintègre à une vitesse proportionnelle à la quantité de matière présente. Si le 30 % d'une telle substance se désintègre en 15 ans, quelle est la demi-vie de la substance ? La **demi-vie** (ou période) est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la matière.

6.28 Sous l'effet de la désintégration radioactive, une masse initiale M de carbone 14 évolue en fonction du temps t (en années) de la manière suivante: $M(t) = M_0 \cdot e^{-0,000'121\,t}$, M_0 étant la masse initiale.

1) Calculer la demi-vie du carbone 14 .

2) On admet que la concentration du carbone 14 dans l'atmosphère a

toujours été constante au cours du temps. Les organismes vivants ingèrent durant toute leur existence du carbone et en particulier du carbone 14 . Ainsi, durant la vie, l'absorption de carbone 14 compense exactement la partie de carbone 14 qui se désintègre. Dès la mort, la quantité de carbone 14 commence à décroître. Estimer l'âge d'un morceau de charbon retrouvé dans les grottes de Lascaux (et ainsi l'âge probable des peintures) sachant qu'il donnait en 1950 un taux de $0,97$ désintégrations par minute et par gramme alors que du bois vivant donne un taux de $6,68$ désintégrations par minute et par gramme.

6.29 Dans les premières semaines qui suivent sa naissance, l'augmentation de poids d'un bébé est proportionnelle à son poids. Un bébé qui pesait 4 kg à sa naissance pèse $4,4$ kg deux semaines plus tard. Quel était son poids selon ce modèle 5 jours après sa naissance ?

6.30 Le modèle de *Jenss* est généralement considéré comme le plus précis dans la prévision de la taille d'un enfant à l'âge préscolaire. Selon ce modèle, la taille $h(x)$ (en cm) est donnée par $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}$ où x est exprimé en années et $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$. Sous les mêmes hypothèses, un autre modèle donne $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222\ln(x)$

En utilisant chacun des deux modèles,

1) prévoir la taille et le taux instantané de croissance d'un enfant de 1 an

2) calculer le moment où ce taux est le plus élevé, le plus faible.

6.31 Dans le calcul des probabilités on appelle **fonction de densité** (ou densité de probabilité) une fonction positive f définie sur un intervalle $[a ; b]$ et telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Déterminer la constante c pour que la fonction donnée ci-dessous soit une fonction de densité.

1) $f(x) = \dfrac{cx}{x^2 + 4}$ sur $[0 ; 3]$

2) $f(x) = c\,x\,e^{-x^2}$ sur $[0 ; 10]$

6.32 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur l'axe Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

6.33 Calculer la plus courte distance entre les courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \ln(x)$.

6.34 De l'origine on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Quelles sont les coordonnées du point de contact ?

6.35 Pour quelles valeurs de $a > 0$ la courbe d'équation $y = a^x$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = x$?

6.36 Prouver que $x > \ln(x)$ pour tout $x > 0$.

6.37 On considère une famille de fonctions f_a définie par $f_a(x) = (x+a) \cdot e^x$, a étant un nombre réel.

1) Montrer que le graphe de f_a admet un point P_a à tangente horizontale; déterminer les coordonnées de P_a et le lieu de P_a quand a décrit $\mathbb{R}$.

2) Montrer que le graphe de f_a admet un point d'inflexion Q_a ; déterminer les coordonnées de Q_a et le lieu de Q_a quand a décrit $\mathbb{R}$.

6.38 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant les deux conditions

i) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $f(a) = 1$.

On se propose de démontrer qu'une telle fonction est un logarithme.

1) Prouver que $f(1) = 0$.

2) En considérant x comme une constante, on définit les fonctions $g : y \mapsto f(x \cdot y)$ et $h : y \mapsto f(x) + f(y)$. Calculer les dérivées de g et de h, puis utiliser la relation i) pour en déduire $x \cdot f'(x \cdot y) = f'(y)$.

3) Déduire de 2) que $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = f'(1) \cdot \ln(x) + c$, où c est une constante.

4) Montrer que $c = 0$.

5) Déduire de ii) que $f'(1) = \dfrac{1}{\ln(a)}$, donc que $f(x) = \log_a(x)$.

6.39 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions

i) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tout x, $y \in \mathbb{R}$

ii) $f(1) = a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

On se propose de démontrer qu'une telle fonction est une exponentielle.

1) Prouver que $f(0) = 1$.

2) Utiliser l'égalité $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$ pour prouver que $f(x) > 0$ pour tout x.

3) En considérant x comme une constante, on définit les fonctions $g : y \mapsto f(x+y)$ et $h : y \mapsto f(x) \cdot f(y)$. Calculer les dérivées de g et h, puis utiliser la relation i) pour en déduire $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.

4) Déduire de 3) et de 1) que $\ln(f(x)) = f'(0) \cdot x$ pour tout x.

5) Déduire de ii) que $f'(0) = \ln(a)$, donc que $f(x) = a^x$.

6.40 On donne la fonction f par $f(x) = \dfrac{\ln(x) - m}{x}$, m étant une constante positive. On note A son intégrale dans l'intervalle $[a\,;b]$ ($a > 0$, $b > 0$). Si le graphe de f coupe l'axe Ox en $x = a$ et atteint son maximum en $x = b$, montrer que le nombre A ne dépend pas de m.

6.41 Soit la fonction f définie par $f(x) = (ax - 3)\,e^{1/x}$. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que le nombre d'extremums de cette fonction suivant les différentes valeurs du paramètre a.

6.42 Montrer que la tangente à la courbe d'équation $y = \log_a(x)$, en son point d'abscisse e, passe par l'origine.

6.43 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme naturel, montrer que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$

2) On définit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$
En déduire que $S_n - 1 < \ln(n) < S_n$ et $\ln(n) < S_n < \ln(n) + 1$

6.44 Soit $f(x) = -\ln(x)$. Montrer que la fonction f est convexe. En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour a et b positifs.

6.45 Après avoir étudié la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, résoudre l'équation $a^b = b^a$, a et b étant des entiers positifs distincts.

6.46 En utilisant le fait que la fonction exponentielle est convexe montrer que $e^x \geq 1 + x$. Montrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution que $x = 0$.

6.47 Démontrer que l'équation $e^{-x/2} = 3 + 2x$ ne possède qu'une seule solution. Calculer cette solution à 10^{-4} près avec la méthode de Newton.

6.48 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le graphe Γ_n de la fonction $f_n(x) = e^{-x} \cdot x^n$.

1) Esquisser les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

2) Calculer l'aire du domaine plan limité par chacune de ces courbes et l'axe Ox pour $x > 0$. On cherchera une primitive de $e^{-x} \cdot x^n$ sous la forme $e^{-x} \cdot P_n(x)$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

6.49 Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

6.50 En mécanique et en électricité, on rencontre souvent des fonctions trigonométriques et exponentielles ainsi que des combinaisons de ces fonctions. En voici trois exemples

1) $f(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$ qui donne l'horaire de la position d'une masse attachée à un ressort et à un amortisseur.

2) $g(t) = e^{-t} + \sin(\omega t)$ qui donne la charge d'un condensateur mis en série avec une résistance et soumis à une tension sinusoïdale.

3) $h(t) = e^{-t} \cdot \cos(\omega t)$ qui donne l'horaire d'une oscillation amortie.

Représenter le graphe des fonctions f, g et h pour une valeur de ω.

6.51 Dans de l'eau de mer propre la lumière perd $75\ \%$ de son intensité par mètre de profondeur.

1) Représenter graphiquement l'intensité de la lumière en fonction de la profondeur.

2) A quelle profondeur la lumière n'a-t-elle plus que le millième de l'intensité qu'elle a à la surface de l'eau ?

6.52 1) Pour x compris entre 0 et 1, tracer dans un même repère les graphes des fonctions suivantes
$f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2+1$ et $h(x) = x+1$.

2) Le graphe de f partage le domaine compris entre les graphes de g et de h en deux parties. Calculer l'aire de ces deux parties.

6.53 On considère les deux domaines bornés limités par la courbe $y = a^x$, l'axe Ox et les verticales $x = p-1$, $x = p$ et $x = p+1$. Calculer le rapport de leurs aires.

6.54 La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de $1'000$ personnes. On admet que le nombre N de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par $N(t) = \dfrac{1'000}{1 + 999 \cdot 10^{-0,17t}}$.

1) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

2) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

3) Après combien de jours la vitesse de propagation de la maladie commence-t-elle à diminuer ? Quel est alors le nombre de personnes qui ont été atteintes ?

6.55 Le son le plus faible qu'une oreille humaine puisse percevoir est celui provoqué par une source de puissance $P_0 = 10^{-12}$ Watt.

En décibels (dB), le niveau sonore N d'un son de puissance P Watt est défini par $N = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$.

1) Une conversation normale correspond à une puissance sonore de 10^{-6} Watt. Calculer son niveau sonore.

2) Par quel facteur la puissance d'une source sonore est-elle multipliée lorsque son niveau sonore passe de 60 dB à 90 dB ?

3) Un niveau sonore supérieur à 90 dB est considéré comme nuisible pour les oreilles. La puissance sonore perçue à 100 m d'un avion au décollage est de 1 Watt. Ce son est-il nuisible ?

4) Si le niveau sonore de chacune de deux sources est de 45 dB, quel est le niveau sonore de la réunion de ces deux sources ?

6.56 L'échelle de Richter donne la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie E dissipée par le séisme. Cette échelle est définie par la relation $\log_{10}(E) = 1{,}5\,M + 4{,}4$ où E est mesurée en Joule.

1) Si l'énergie dissipée par un premier séisme de magnitude M_1 sur l'échelle de Richter est 10 fois inférieure à l'énergie dissipée par un second séisme de magnitude M_2, quelle est la différence de leurs magnitudes ?

2) Comparer l'énergie dissipée lors du séisme qui détruisit San Francisco en 1906 ($M = 8{,}3$) à l'énergie de celui de Los Angeles en janvier 1994 ($M = 6{,}6$).

3) Quelle est la magnitude sur l'échelle de Richter de l'onde sismique provoquée par l'explosion d'une bombe H de 10 mégatonnes, c'est-à-dire d'une bombe libérant une énergie équivalente à celle produite par l'explosion de 10 millions de tonnes de TNT ? On sait qu'un kilogramme de TNT libère en explosant une énergie de $4{,}2 \cdot 10^7$ Joule.

6.57 On note $[H^+]$ la concentration d'ions d'hydrogène présents dans une substance (en moles par litre). Le pH d'une substance est déterminé à partir de la concentration par la formule $pH = -\log_{10}([H^+])$.

Le pH de l'eau distillée est égal à 7. Les acides ont un pH inférieur à 7, alors que les bases ont un pH supérieur à 7.

1) Pour les tomates $[H^+] = 6,3 \cdot 10^{-5}$. Font-elles partie des aliments acides? Même question pour le lait pour lequel $[H^+] = 4 \cdot 10^{-7}$.

2) Calculer la concentration en ions d'hydrogène d'une crème de corps ayant un pH égal à $5,5$.

6.58 Le profit P (exprimé en francs) d'une compagnie est donné par la formule $P(t) = 5'000 \cdot e^{0,3t - 0,001t^2}$ où t désigne le nombre d'années écoulées à partir du 1er janvier 1997. Calculer le taux instantané annuel d'augmentation du profit au 1er juillet 1998.

SOLUTION DES EXERCICES

6.1 1) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

2) $D_f =]1\,;+\infty[$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x-1}$

3) $D_f =]-\infty\,;1[$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x-1}$

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x-1}$

5) $D_f =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$ $\qquad f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

6) $D_f =]0\,;1[$ $\qquad f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

7) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$ $\qquad f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

8) $D_f =]-\infty\,;1[\ \setminus \{0\}$ $\qquad f'(x) = \frac{2-x}{x(1-x)}$

9) $D_f =]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$ $\qquad f'(x) = \frac{x}{x^2-3}$

10) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \frac{5}{x}$

11) $D_f =]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$ $\qquad f'(x) = \frac{2x(x^2+5)(x^2+1)}{(x^2+2)(x^2-1)(x^2+3)}$

12) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \ln(x)$

13) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\qquad f'(x) = -\tan(x)$

14) $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k\pi}{2}\,;\frac{(2k+1)\pi}{4}\right[$ $\qquad f'(x) = \frac{4}{\sin(4x)}$

15) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

16) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)}$

6.2 1) $F(x) = \ln|x+1|$ $\qquad D_F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$ $\qquad D_F = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

3) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 4|$ $\quad D_F = \mathbb{R}$

4) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{5}\ln|5x - 1|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{5} \}$

5) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x - 1|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$

6) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 5\ln|x + 2|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$

7) $F(x) = \ln|\sin(x)|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

6.3 1) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ 2) $\ln(3)$ 3) —

4) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{5}\right)$ 5) $140 + \ln\left(\frac{7}{3}\right)$ 6) $6\ln\left(\frac{10}{7}\right) - 1$

7) $\frac{1}{2}\ln(3)$

6.4 Zéros: 1 et e^4 ; maximum $\frac{1}{2}$ en $x = e$.

6.5 1) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 5e^{5x}$

2) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2x\,e^{x^2}$

3) $D_f = \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{(1/x)}$

4) $D_f =]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,e^{\sqrt{x^2+x}}$

5) $D_f =]-1 ; 1[$ $\quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}\,(1-x^2)}\,e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$

6) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \cos(x)\,e^{\sin(x)}$

7) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = x\,e^x(2 + x)$

8) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$

6.6 $f^{(n)}(x) = e^x(x + n)$

6.7 $x = -0,57$

6.8 1) $e^2 - 1$ 2) $\frac{1}{2}(e^7 - e^{-3})$

3) $\frac{1}{3}(e^{27} - e)$ 4) $-2(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})$

5) 1 6) $2\ln^2(2)-4\ln(2)+4-e$

6.9 1) $D_f = \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ $f'(x) = \dfrac{3}{\ln(2)(3x+1)}$

2) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2x+1}{\ln(3)(x^2+x+1)}$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\ln(10)\sin(x)}$

4) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \ln(2)\cdot 2^x$

5) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x\ln(3)\cdot 3^{x^2}$

6) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f'(x) = \dfrac{2\ln(2)\cdot 2^{\left(\frac{x}{x+2}\right)}}{(x+2)^2}$

6.10 1) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = x^x\cdot(\ln(x)+1)$

2) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}\cdot x^{\ln(x)}$

6.11 1) $\dfrac{60}{\ln(4)}$ 2) $\dfrac{1}{2\ln(2)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{11}}\right)$ 3) 0

6.12 $\dfrac{1}{\ln(2)}-\dfrac{1}{2}$

6.13 $\dfrac{15\pi}{8\ln(2)}$

6.14 1) e^2 2) 1 3) $\dfrac{1}{2}$ 4) -1

5) 1 6) -1 7) $\dfrac{\ln(2)}{2}$ 8) 4

9) 1 10) $-\dfrac{1}{2}$ 11) 1 12) 0

13) 4 14) —

6.15 $\ln(a)$

6.16 1) asymptotes: $x = 1$; $y = 0$ vers $+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; asymptote: $y = 0$ vers $\pm\infty$

3) asymptote: $y = 0$ vers $-\infty$

4) asymptotes: $y = -\frac{1}{2}$ vers $-\infty$; $y = 2$ vers $+\infty$

5) asymptotes: $y = -2$ vers $-\infty$; $y = 1$ vers $+\infty$

6) asymptotes: $y = -x$ vers $-\infty$; $y = 0$ vers $+\infty$

7) asymptotes: $x = 0$ pour $x > 0$; $y = x + 3$

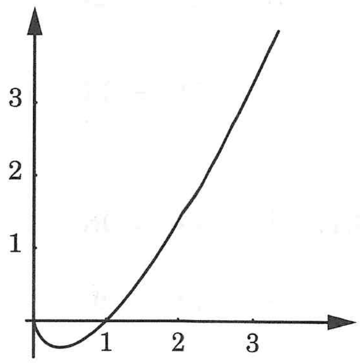
8) asymptotes: $x = 1$ pour $x > 1$; $y = x + 7$

6.17 1) zéro 1, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) = 0$, pas d'asymptote

$f'(x) = 1 + \ln(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + \ln(x) = -\infty$

min $\left(\frac{1}{e} ; -\frac{1}{e}\right)$

$f''(x) = \frac{1}{x}$



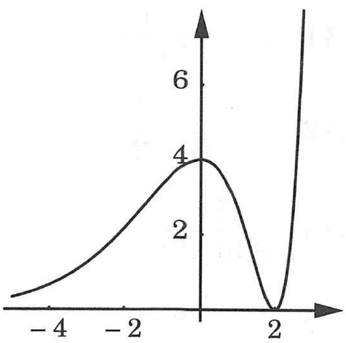
2) zéro 2, asymptote: $y = 0$ vers $-\infty$

$f'(x) = x(x-2)\,e^x$,

max $(0 ; 4)$, min $(2 ; 0)$

$f''(x) = (x^2 - 2)\,e^x$

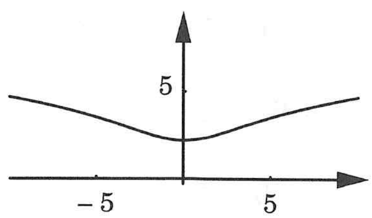
infl $(-\sqrt{2} ; 2,83)$, $(\sqrt{2} ; 1,41)$



3) f paire, pas d'asymptote

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+9}$, min $(0 ; \ln(9))$

$f''(x) = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}$, infl $(\pm 3 ; \ln(18))$



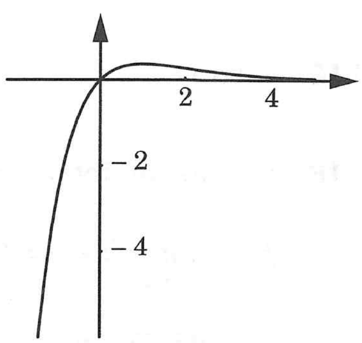
4) zéro 0, asymptote: $y = 0$ vers $+\infty$

$f'(x) = (1-x)\,e^{-x}$

max $(1 ; \frac{1}{e})$

$f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$

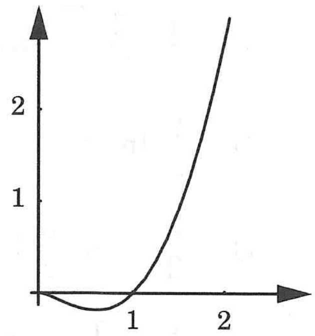
infl $(2 ; \frac{2}{e^2})$



5) zéro 1, pas d'asymptote

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$; min $\left(e^{-1/2} ; \dfrac{-1}{2e} \right)$

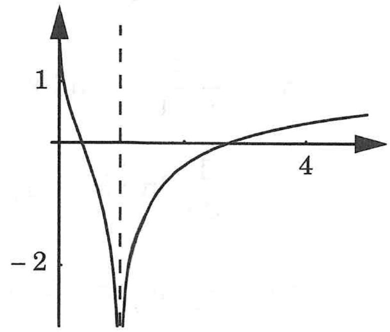
$f''(x) = 2\ln(x) + 3$; infl $\left(e^{-3/2} ; \dfrac{-3}{2e^3} \right)$



6) zéros e^{-1}, e ; asymptotes: $x = 0$, $x = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

$f''(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$; infl $(e^{-1} ; 0)$

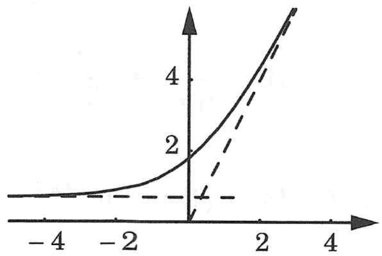


7) asymptotes: $y = \ln(2)$ vers $-\infty$,

$y = 2x$ vers $+\infty$

$f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} + \dfrac{e^x}{e^x + 2}$

$f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \dfrac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$



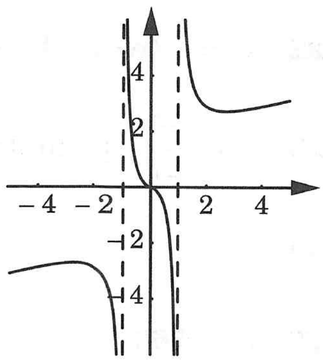
8) impaire ; asymptotes: $x = -1$, $x = 1$

$f'(x) = \dfrac{\ln|x| - 1}{\ln^2|x|}$

min $(e ; e)$, max $(-e ; -e)$

$f''(x) = \dfrac{-\ln|x| + 2}{x\ln^3|x|}$

infl $\left(e^2 ; \dfrac{e^2}{2} \right)$, $\left(-e^2 ; -\dfrac{e^2}{2} \right)$



6.18 1) 3'001 2) 2'998 3) 3'003

4) 258'716 5) 420'921

6.19 1) $2x^3 + 6x^2 - 6x + 15\ln|2x + 3| + c$

2) $\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}\ \ln|x+\sqrt{3}| + \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}\ \ln|x-\sqrt{3}| + c$

3) $\dfrac{5}{2}\ \ln|x-1| + \dfrac{13}{2}\ \ln|x-3| - 8\ \ln|x-2| + c$

4) $\dfrac{3}{2}\ x^2 + \dfrac{5}{2}\ \ln|x-4| + \dfrac{3}{2}\ \ln|x+2| + c$

5) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ \ln|2x-1| + c$

6) $\dfrac{-1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + c$

7) $\dfrac{1}{30}\ \ln|3x-1| + \dfrac{3}{10}\ \ln|x+3| + c$

8) $\dfrac{1}{18}\ \ln|x-3| + \dfrac{1}{18}\ \ln|x+3| - \dfrac{1}{9}\ \ln|x| + c$

9) $\dfrac{1}{4}\left(\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{2x}{x^2-1}\right) + c$

10) $\dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{9x} + \dfrac{1}{27}\ \ln\left|\dfrac{x-3}{x}\right| + c$

6.20 1) $(2k\pi\ ;\ e^{-2k\pi}),\ k \in \mathbb{Z}$

6.21 40, 40 °

6.22 $y = 2e(x-1)\ln(2)$

6.23 $a = \dfrac{e^3}{27}$; point de contact $(3\ ;\ e^3)$

6.25 $\dfrac{\pi}{4}$

6.26 1) 566 2) environ 10 heures

6.27 29, 15 ans

6.28 1) 5'728 ans 2) 13'997 av. J.-C.

6.29 4, 14 kg

6.30 1) modèle de Jenss: 75, 77 cm et 15, 98 cm / an
autre modèle: 75, 33 cm et 14, 33 cm / an

2) pour les deux modèles le taux de croissance est le plus élevé à 3 mois et le plus faible à 6 ans

6.31 1) $c = \dfrac{2}{\ln(13) - \ln(4)}$ 2) $c = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{100}}{\mathrm{e}^{100} - 1}$

6.32 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;0\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;0\right)$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

6.33 $\sqrt{2}$ (Points de contact $(0\,;1)$ et $(1\,;0)$)

6.34 $(\mathrm{e}\,;1)$

6.35 Si $0 < a < 1$, un point d'intersection; si $1 < a < \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, deux points d'intersection

6.37 1) $P(-a-1\,;-\mathrm{e}^{-a-1})$; lieu de P : $y = -\mathrm{e}^{x}$

2) $Q(-a-2\,;-2\,\mathrm{e}^{-a-2})$; lieu de Q : $y = -2\,\mathrm{e}^{x}$

6.38 2) $g'(y) = x \cdot f'(xy)$; $h'(y) = f'(y)$

6.39 3) $g'(y) = f'(x+y)$; $h'(y) = f(x) \cdot f'(y)$

6.40 $A = \dfrac{1}{2}$

6.41 On pose $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$

si $a < 0$

x		0		x_2		x_1	
$f(x)$	↘		↘		↗		↘

si $0 \leq a \leq 12$

x		0	
$f(x)$	↗		↗

si $12 < a$

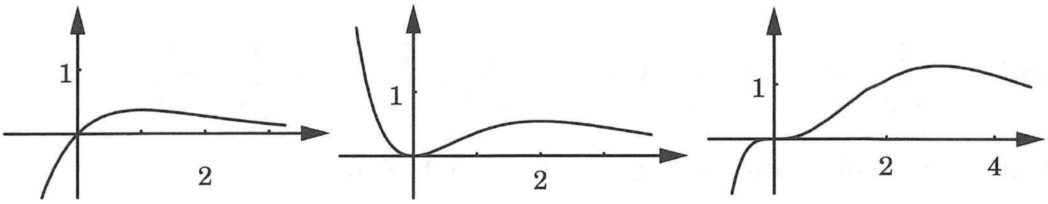
x		0		x_1		x_2	
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

6.42 $y = \dfrac{1}{x_0 \cdot \ln(a)}\, x + \dfrac{\ln(x_0) - 1}{\ln(a)}$

6.45 $a = 2$ et $b = 4$ ou $a = 4$ et $b = 2$

6.47 $-0,7665$

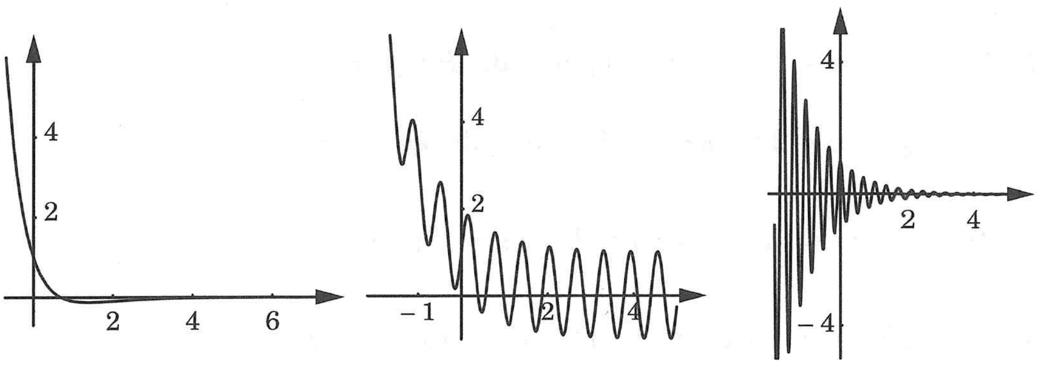
6.48 1)



2) Aire = 1 Aire = 2 Aire = 6

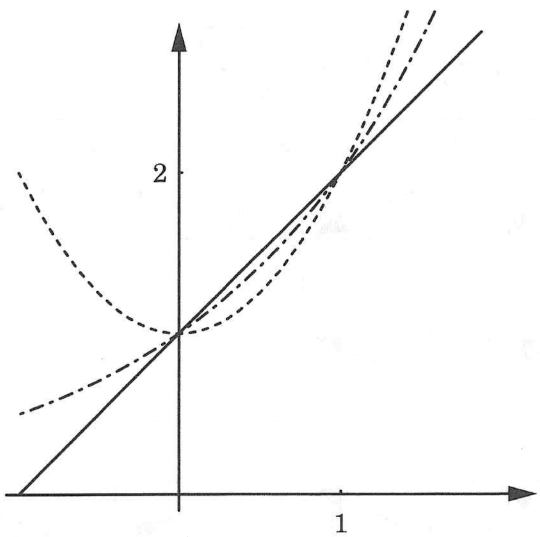
6.49 $x = 1$ et $x = 4$

6.50



6.51 2) A 5 mètres

6.52



Aires :

$\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln(2)} \cong 0,057$ et

$\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{4}{3} \cong 0,109$

6.53 Le rapport des aires vaut a

6.54 1) 715 personnes 2) 19 jours

3) 18 jours ; 500 personnes

6.55 1) 60 dB

2) 1’000

3) oui, le niveau sonore est de 120 dB

4) 48 dB

6.56 1) $M_2 - M_1 = \frac{2}{3}$

2) Le rapport des énergies est de $354,8$

3) $M = 8,82$

6.57 1) les tomates et le lait sont des aliments acides, leur pH vaut $4,2$ et $6,4$

2) $3,16 \cdot 10^{-6}$

6.58 $29,7$ %