§ 5. Intégrale

1. Présentation

1.1 Aire d'une surface

On considère la parabole d'équation $y = 4 - x^2$. On veut calculer l'aire A du domaine borné limité par cette parabole et l'axe Ox.

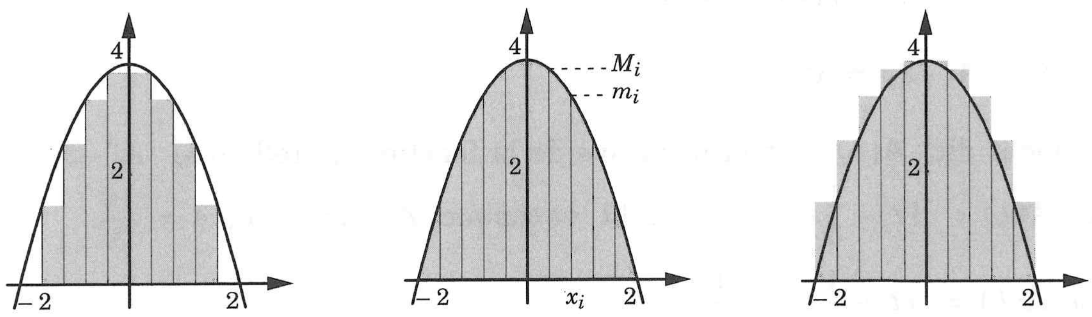
Première méthode: encadrement de l'aire

La première idée consiste à approcher cette aire par excès et par défaut à l'aide de rectangles, puis de calculer la limite de ces approximations lorsque la largeur des rectangles tend vers zéro.

On partage l'intervalle $[-2\,;2]$ en n intervalles $[x_{i-1}\,;x_i]$ que nous choisissons d'égale longueur Δx, $1 \le i \le n$.

En notant M_i le maximum et m_i le minimum de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ sur $[x_{i-1}\,;x_i]$, on a

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + \ldots + m_n \cdot \Delta x \le A \le M_1 \cdot \Delta x + M_2 \cdot \Delta x + \ldots + M_n \cdot \Delta x$$



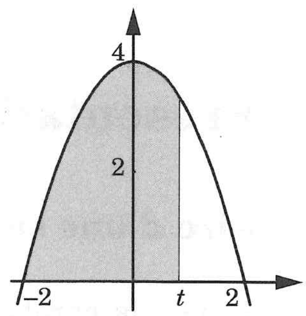
c'est-à-dire $$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \le A \le \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = S_n$$

On peut montrer que l'approximation par défaut s_n et l'approximation par excès S_n tendent vers la même limite A lorsque $n \to \infty$.

Cette méthode peut fournir de bonnes approximations, mais les calculs sont en général longs et difficiles (page 179).

Deuxième méthode: variation des constantes

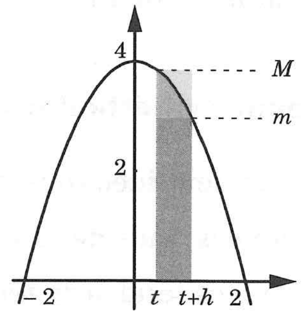
L'idée est de considérer un problème plus général dont la résolution est ici en fin de compte plus simple. On se propose de calculer l'aire $A(t)$ du domaine borné limité par la parabole d'équation $y = 4 - x^2$, l'axe Ox et la verticale d'équation $x = t$ pour tout t tel que $-2 \leq t \leq 2$.



Si M est le maximum et m le minimum de $f(x) = 4 - x^2$ sur $[t; t+h]$, alors on a

$$m \cdot h \leq A(t+h) - A(t) \leq M \cdot h \text{ donc}$$

$$m \leq \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \leq M$$



Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c compris entre t et $t+h$ tel que $A(t+h) - A(t) = f(c) \cdot h$

Par suite $\dfrac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(c)$ et $A'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(t)$

La fonction $A(t)$ a donc les propriétés suivantes

1) $A'(t) = f(t) = 4 - t^2$

2) $A(-2) = 0$

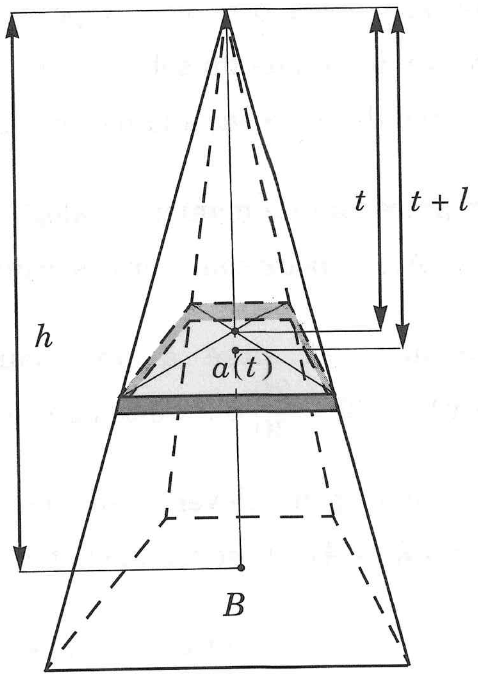
Autrement dit $A(t)$ est la primitive de la fonction f telle que $A(-2) = 0$.
Donc $A(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $A(-2) = 0$, $c = \frac{16}{3}$.

Ainsi $A(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{16}{3}$.

L'aire du domaine est donc $A(2) = \frac{32}{3}$.

1.2 Volume d'un solide

On considère une pyramide de hauteur h dont la base a une aire égale à B. On veut calculer le volume V de cette pyramide.



En procédant de manière analogue à l'exemple précédent, on va calculer le volume $V(t)$ d'une pyramide de hauteur variable t.

L'aire de la base de la pyramide de hauteur t est égale à $a(t) = B \cdot \left(\frac{t}{h}\right)^2$. Comme $a(t)$ est une fonction croissante, on a:

$$a(t) \cdot l \leq V(t+l) - V(t) \leq a(t+l) \cdot l$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c entre t et $t + l$ tel que:

$$V(t+l) - V(t) = a(c) \cdot l = B \cdot \left(\frac{c}{h}\right)^2 \cdot l$$

Par suite, lorsque l tend vers 0, $\frac{V(t+l) - V(t)}{l} = a(c)$ tend vers $a(t)$ et

$$V'(t) = \lim_{l \to 0} \frac{V(t+l) - V(t)}{l} = a(t)$$

La fonction $V(t)$ a donc les propriétés suivantes:

1) $V'(t) = a(t) = B\left(\frac{t}{h}\right)^2$

2) $V(0) = 0$

Autrement dit $V(t)$ est la primitive de la fonction a telle que $V(0) = 0$.

Donc $V(t) = \frac{B \cdot t^3}{3h^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $V(0) = 0$, $c = 0$.

Ainsi $V(t) = \frac{B \cdot t^3}{3h^2}$.

Le volume de la pyramide est donc $V(h) = \frac{B \cdot h}{3}$.

1.3 Travail d'une force

Dans le cas d'une force constante exercée dans la direction et dans le sens du déplacement, le travail est égal au produit de l'intensité de la force par la longueur du déplacement.

Un sac d'un poids $F = 20$ Newton est percé en son fond. Lorsqu'on le soulève verticalement à vitesse constante, il perd progressivement son contenu. On admet que son poids diminue proportionnellement à la hauteur à laquelle le sac se trouve au-dessus du sol. A 30 m du sol, le sac est vide. Quel est le travail fourni pour soulever ce sac à la hauteur de 30 m ?

En procédant de manière analogue aux exemples précédents, on va calculer le travail $A(x)$ pour soulever le sac du sol jusqu'à la hauteur variable x .

Lorsqu'il est situé à une hauteur x au-dessus du sol, le sac pèse $p(x) = 20 - \frac{20}{30}x$. L'intensité de la force exercée vers le haut est égale à $p(x)$.

Le travail pour élever le sac de la hauteur x à la hauteur $x+h$ est égal à $A(x+h)-A(x)$ et comme la fonction $p(x)$ est décroissante, on a

$$p(x+h)\cdot h \leq A(x+h)-A(x) \leq p(x)\cdot h$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c compris entre x et $x+h$ tel que

$$A(x+h)-A(x) = p(c)\cdot h = \left(20 - \frac{2}{3}c\right)\cdot h$$

Par suite, $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} = p(c)$ et

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = p(x) .$$

La fonction $A(x)$ a donc les propriétés suivantes

1) $A'(x) = p(x) = 20 - \frac{2}{3}x$

2) $A(0) = 0$

Autrement dit $A(x)$ est la primitive de la fonction p telle que $A(0) = 0$.

Donc $A(x) = 20x - \frac{1}{3}x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $A(0) = 0$, $c = 0$.

Ainsi $A(x) = 20x - \frac{1}{3}x^2$.

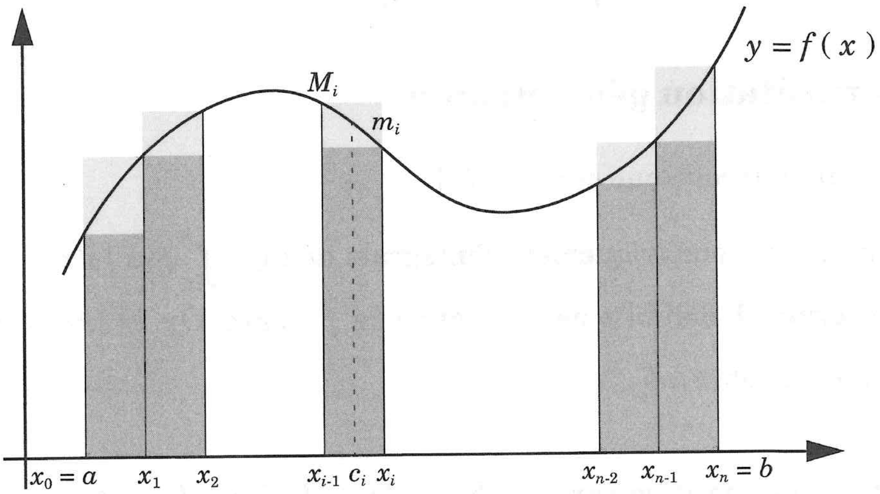
Le travail fourni est donc $A(30) = 600 - 300 = 300$ Joule.

2. Intégrale définie

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles $[x_{i-1}\,;x_i]$ de même longueur $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Si M_i est le maximum de f sur $[x_{i-1}\,;x_i]$, m_i le minimum de f sur $[x_{i-1}\,;x_i]$ et si $c_i \in [x_{i-1}\,;x_i]$, alors on a:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$



Il est possible de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Définitions

On appelle **intégrale définie** de f sur $[a\,;b]$ et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \dfrac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x$.

Dans l'expression $\int_a^b f(x)\,dx$, x est appelée la **variable d'intégration**, les nombres a et b les **bornes d'intégration**.

Remarques

1) On peut se libérer de la contrainte $a < b$ et envisager deux cas:

   Si $a = b$, on définit $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

   Si $a > b$, on définit $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ se présente comme «une somme infinie de quantités infiniment petites».

3) L'intégrale définie ne dépend pas du nom de la variable d'intégration:

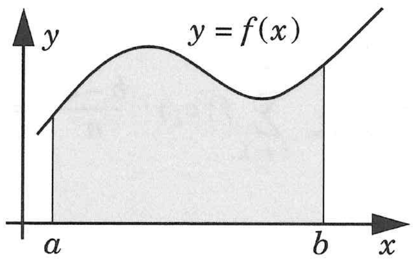
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

2.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

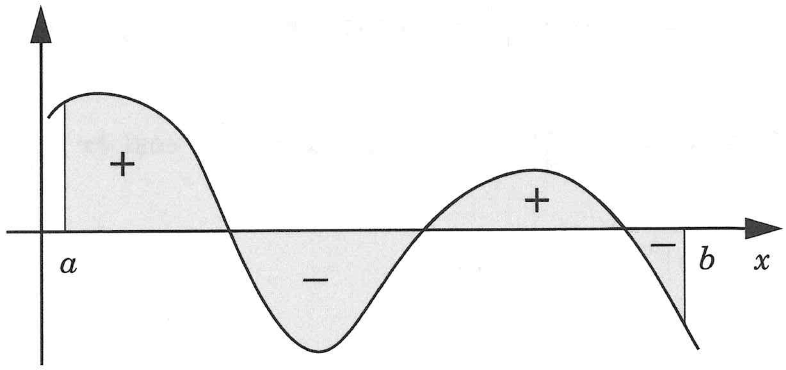
Afin d'interpréter géométriquement l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, on considère le domaine borné D délimité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'**aire** du domaine D.



Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'opposé de l'aire du domaine D.

Si f change de signe sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à la somme des aires munies chacune d'un signe. Les aires des parties de D situées au-dessus de l'axe Ox sont comptées positivement et les autres négativement.



2.2 Un moyen de calcul

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$. La fonction $A : I \to \mathbb{R}$ définie par $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de la fonction f telle que $A(a) = 0$.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notation

Dans le calcul des intégrales, l'expression $F(b) - F(a)$ se note $F(x)\Big|_a^b$

Remarque

Il résulte du théorème fondamental que toute fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ admet une primitive sur cet intervalle.

Exemples

a) $\int_{-2}^{0} 4x^3\,dx = x^4\Big|_{-2}^{0} = -16$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -(\cos(2\pi)-\cos(0)) = 0$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}(\sin(4x)\cdot 4)\,dx = \frac{1}{4}(-\cos(4x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c\,x\Big|_a^b = c\,(b-a)$

2.3 Propriétés de l'intégrale définie

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et k un réel

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

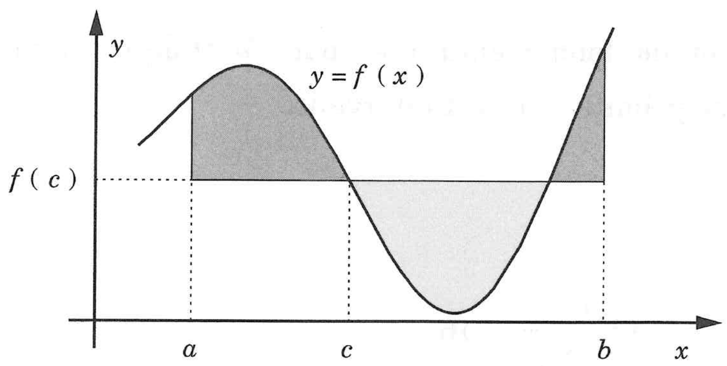
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \text{ si } f(x)\le g(x) \text{ pour tout } x\in[\,a\,;b\,]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ ,\quad c\in[\,a\,;b\,]$$

Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. Il existe un réel $c\in[\,a\,;b\,]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$

Le nombre $f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de la fonction f sur $[\,a\,;b\,]$



3. Méthodes d'intégration

Le calcul d'une intégrale nécessite la recherche d'une primitive. Dans les cas simples, on recherche cette primitive comme au § 3.5 (page 77).

D'autres cas nécessitent des méthodes appropriées.

3.1 Intégration par substitution ou changement de variable

Première forme

Cette forme permet de calculer dans certains cas l'intégrale de fonctions composées.

Si f est une fonction continûment dérivable (f' continue) sur $[\,a\,;b\,]$ et si g est une fonction continue entre $f(a)$ et $f(b)$, on a

$$\boxed{\int_a^b g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,du}$$

On a posé $f(x) = u$.

Exemple

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\;dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\cdot 2x\;dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{u}\;du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right)\Bigg|_0^3 = \sqrt{3}$$

On a posé $x^2-1 = u$.

Seconde forme

Si g est une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ et si f est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle $[\,c\,;d\,]$ et telle que $f(c) = a$ et $f(d) = b$, on a

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,dx = \int_c^d g(f(t))\cdot f'(t)\,dt}$$

On a posé $x = f(t)$.

Exemple

Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

Puisque $\sin\colon [\,0\,;\frac{\pi}{2}\,] \to [\,0\,;1\,]$ est continûment dérivable avec $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et comme $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$ sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$, on a

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

3.2 Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. On a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\, dx}$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)\, dx = x\cdot(-\cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

On a posé $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$, d'où $f'(x) = 1$ et, par exemple, $g(x) = -\cos(x)$.

4. Intégrales généralisées ou impropres

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,[$, mais non définie ou non continue en b .

Si $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} b} \int_a^t f(x)\, dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \underset{<}{\to} b} \int_a^t f(x)\, dx$$

Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]\,a\,;b\,]$, mais non définie ou non continue en a.

> Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ >}} \int_t^b f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t \to a \\ >}} \int_t^b f(x)\,dx$$
>
> Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$.

> Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit
>
> $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$
>
> Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

On définit de même $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

> Si $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ne divergent pas, alors on définit
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Exemples

a) $$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} 2\sqrt{x}\,\Big|_t^4 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} (4-2\sqrt{t}) = 4$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{t \to -\infty} (\arctan(0)-\arctan(t)) + \lim_{u \to +\infty} (\arctan(u)-\arctan(0)) =$$

$$0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

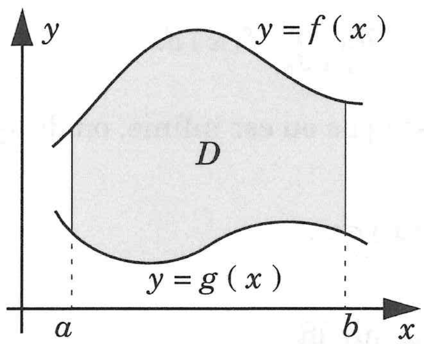
5. Applications

5.1 Aire d'une région située entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a\,;b]$ et D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. On veut calculer l'aire A du domaine D.

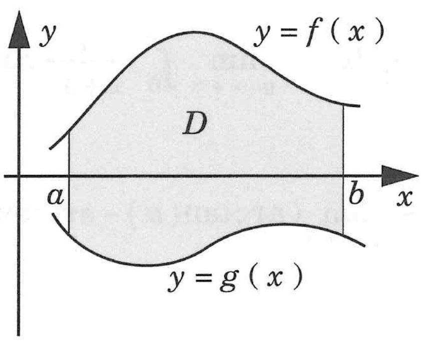
Si g est positive sur $[a\,;b]$, alors A = «aire sous f» − «aire sous g», donc

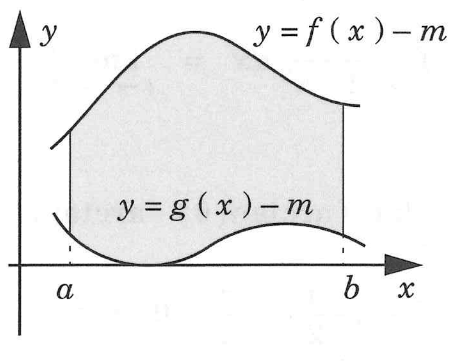
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Si g prend des valeurs négatives sur $[a\,;b]$, on translate les graphes de f et de g vers le haut de façon que le domaine D soit au-dessus de l'axe Ox. Soit m le minimum de g sur $[a\,;b]$. Comme $g(x) \geq m$, $g(x) - m \geq 0$ et la fonction $g - m$ est positive sur $[a\,;b]$. Comme l'aire d'une région n'est pas modifiée par translation, l'aire A de la région limitée par f et g est la même que celle de la région limitée par $f - m$ et $g - m$. Ainsi

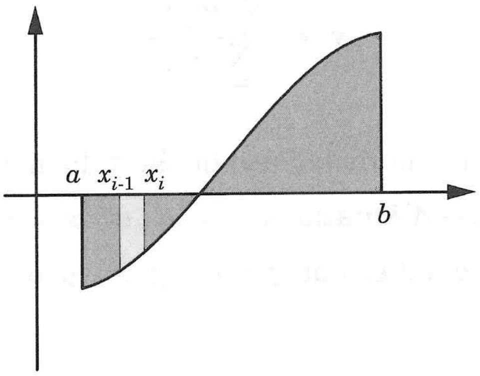
$$A = \int_a^b ((f(x) - m) - (g(x) - m))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

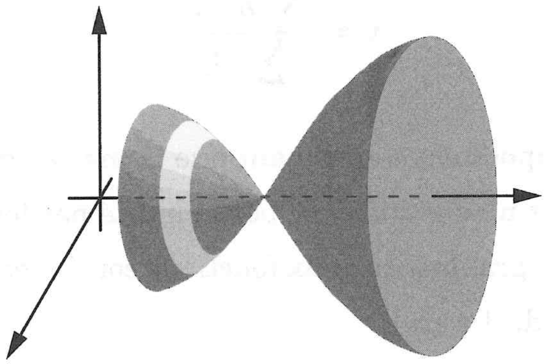




5.2 Volume d'un solide de révolution (découpage en disques)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. On veut calculer le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox.





On peut procéder comme dans les exemples précédents ou faire appel à la définition de l'intégrale définie (page 169). Nous choisissons ici la seconde méthode.

On partage l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ en n intervalles $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$ de même longueur Δx, $1 \le i \le n$. Le solide est alors partagé en n tranches.

Soit m_i le minimum de f sur $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$ et M_i le maximum de f sur $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$. Le volume d'une tranche est compris entre celui d'un cylindre de rayon m_i et d'épaisseur Δx et celui d'un cylindre de rayon M_i et d'épaisseur Δx.

Si Δx est assez petit, le volume d'une tranche est à peu près égal à $\pi f^2(c_i)\,\Delta x$ pour tout c_i de l'intervalle $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$. Il en résulte que le volume du solide est à peu près égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\,\Delta x$.

En faisant tendre n vers l'infini on a, puisque la fonction πf^2 est continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$,

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\,\Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

Par conséquent,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

5.3 Barycentre d'un domaine du plan

Les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ du barycentre d'un système de masses ponctuelles m_1, m_2, ..., m_n respectivement localisées aux points $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, ..., $P_n(x_n;y_n)$ sont données par les formules

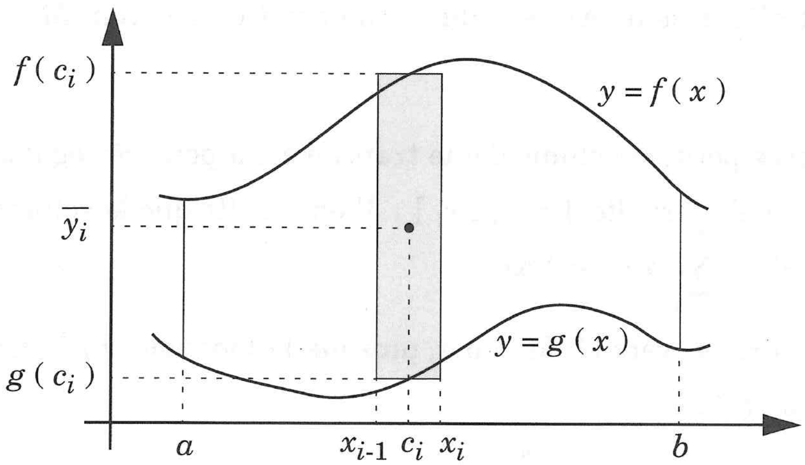
$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

Supposons maintenant que la masse totale m soit distribuée de façon homogène sur un domaine D borné limité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et les graphes de deux fonctions continues f et g telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a;b]$.

La masse superficielle σ représentant la masse par unité d'aire est alors constante sur le domaine D.

Découpons ce domaine D en tranches d'égale largeur Δx. La masse de chaque tranche est égale au produit de sa masse superficielle par son aire.

Par ailleurs chaque tranche peut être assimilée à un rectangle de base $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(c_i) - g(c_i)$ où pour simplifier c_i est le milieu de $[x_{i-1};x_i]$. On obtient ainsi $\Delta m_i = \sigma[f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x$.



Le centre de gravité de la tranche est alors assimilable à celui du rectangle dont le centre de gravité est le centre de symétrie de coordonnées

$$\bar{x}_i = c_i \qquad \bar{y}_i = \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2}$$

En localisant la masse de chaque tranche en son centre de gravité, on peut approcher les coordonnées du barycentre de D par

$$\bar{x} = \frac{\sum \sigma\,(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x \cdot c_i}{\sum \sigma\,(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} = \frac{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot c_i \cdot \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} \quad \text{et}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \sigma\,(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x \cdot \dfrac{f(c_i) + g(c_i)}{2}}{\sum \sigma\,(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot (f(c_i) + g(c_i)) \cdot \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x}$$

En passant à la limite lorsque Δx tend vers 0, on obtient finalement

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \quad \text{et}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \cdot (f(x) - g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

6. Exercices résolus

6.1 Calcul d'une aire par somme et par primitive

On considère la parabole d'équation $y = 4 - x^2$. On veut calculer l'aire A du domaine borné limité par la parabole et l'axe Ox.

En vertu de l'interprétation géométrique de l'intégrale définie, il s'agit de calculer l'intégrale définie $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$. Nous allons effectuer ce calcul de deux manières, d'abord en suivant la définition, puis en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral.

Première méthode

On partage l'intervalle $[-2\,;2]$ en n intervalles de longueur $\Delta x = \frac{4}{n}$. Le i-ème intervalle est $[x_{i-1}\,;x_i] = [-2 + (i-1)\frac{4}{n}\,; -2 + i\frac{4}{n}]$, $1 \le i \le n$.

On a donc $A = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (4 - x_i^2) \cdot \frac{4}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(4 - \left(-2 + i\frac{4}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{4}{n} =$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \left(4 - \frac{16\,i}{n} + \frac{16\,i^2}{n^2}\right)\right) \cdot \frac{4}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{64\,i}{n^2} - \frac{64\,i^2}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{64}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i - \frac{64}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{32}{3}.$$

Seconde méthode

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

6.2 Volume d'une boule

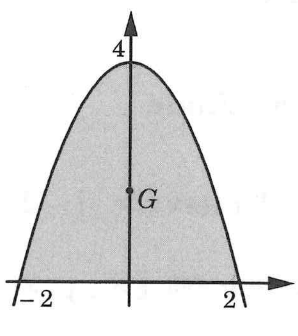
On considère la boule de rayon R comme le solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine D limité par le graphe de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'axe Ox.

Son volume est donc donné par

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

6.3 Barycentre d'un segment parabolique

On veut calculer les coordonnées du barycentre du domaine borné limité par la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ et l'axe Ox.



Par symétrie, l'abscisse du barycentre est nulle. Son ordonnée est donnée par

$$\overline{y} = \frac{\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(4-x^2)\cdot(4-x^2)\,dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^{2}}{4x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}$$

Ainsi, le barycentre de ce segment parabolique est le point $G\left(0\,;\,\frac{8}{5}\right)$.

Exercices

Intégrale définie

5.1 Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_0^4 (2x+1)\,dx$

2) $\int_{-1}^3 (6x^2-4x-6)\,dx$

3) $\int_{-1}^2 (4+3x-x^2)\,dx$

4) $\int_{-1}^1 (x^4+1)\,dx$

5) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3}+x^2\right) dx$

6) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3u^2\,du$

7) $\int_1^4 -4t^{-4}\,dt$

8) $\int_a^{2a} ay\,dy$

9) $\int_4^{25} (x^2+2\sqrt{x})\,dx$

10) $\int_{-1}^5 |x|\,dx$

11) $\int_0^2 |x^2-1|\,dx$

12) $\int_{-4}^2 \sqrt{|x|}\,dx$

13) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

14) $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right) dx$

15) $\int_{1/2}^2 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

16) $\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x^4}\,dx$

18) $\int_a^{a+\pi} \cos(t)\,dt$

19) $\int_\pi^{2\pi} \sin(x)\,dx$

20) $\int_0^{\pi/2} (a\sin(t)+b\cos(t))\,dt$

21) $\int_{-r}^r rx^2\,dx$

22) $\int_0^1 rx^2\,dr$

5.2 Sachant que $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$ et $\int_2^3 f(x)\,dx = -8$, calculer

1) $\int_0^2 f(x)\,dx$

2) $\int_0^1 3f(x)\,dx$

3) $\int_0^3 8f(x)\,dx$

4) $\int_3^1 2f(x)\,dx$

5.3 Montrer que pour une fonction f continue sur $[-a\,;a]$, on a

1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ lorsque f est paire

2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ lorsque f est impaire.

5.4 Déterminer les réels k pour lesquels on a

1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} k\,x^2\,dx = \frac{2}{3}$

2) $\displaystyle\int_{4}^{k} (x^2-3x+7)\,dx = \frac{129}{2}$

3) $\displaystyle\int_{0}^{k/2} \sin(2t)\,dt = 1$

4) $\displaystyle\int_{0}^{k/2} \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$

5) $\displaystyle\int_{k}^{0} \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = -\int_{0}^{k} \frac{3}{(x+3)^2}\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{k} (x+1)\,dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{k} (x+1)^3\,dx$

5.5 Déterminer la nature des extremums des fonctions f suivantes

1) $\displaystyle f:\ x \mapsto \int_{0}^{x} (t^3-t)\,dt$ 2) $\displaystyle f:\ t \mapsto \int_{0}^{t} \sqrt{x+1}\,dx$

5.6 On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} (at+b)\,dt$. Déterminer a et b pour que le point $(-2\,;4)$ soit un point d'inflexion du graphe de la fonction f. Ensuite, calculer les extremums de cette fonction.

5.7 Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$, puis déterminer les valeurs de $c \in [a\,;b]$ telles que $f(c) = \mu$

1) $f(x) = x^2$	$a = 0$	$b = 4$
2) $f(x) = 2x+1$	$a = 1$	$b = 5$
3) $f(x) = \sqrt{2x}$	$a = 0$	$b = 8$
4) $f(x) = \sin(x)$	$a = 0$	$b = \pi$
5) $f(x) = A\cos(\omega t)$	$a = -\dfrac{\pi}{2\omega}$	$b = \dfrac{\pi}{2\omega}$

5.8 Vérifier que $\dfrac{x}{x+1}$ et $-\dfrac{1}{1+x}$ sont des primitives de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ à l'aide de chacune de ces primitives.

5.9 On considère la fonction f donnée par $f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t < 5 \\ (t-6)^2 & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$.

1) Tracer le graphe de la fonction f pour $0 \leq t \leq 6$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$.

3) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Expliciter $F(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;6\,]$ et tracer le graphe de F.

4) Déterminer F' sur l'intervalle $]\,0\,;6\,[$.

5.10 Une fonction f continue et deux réels a_1 et a_2 étant donnés, on définit $F_1(t) = \displaystyle\int_{a_1}^t f(x)\,dx$ et $F_2(t) = \displaystyle\int_{a_2}^t f(x)\,dx$.

Montrer que les fonctions F_1 et F_2 diffèrent par une constante que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

5.11 On définit $F(p) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin(x) - \sin(p)|\,dx \quad \left(0 \leq p \leq \frac{\pi}{2}\right)$

1) On pose $f(x) = |\sin(x) - \sin(p)|$. Esquisser le graphe de f pour $p = \dfrac{\pi}{6}$.

2) Calculer $F(p)$ pour $0 \leq p \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3) Déterminer les valeurs maximales et minimales prises par la fonction F dans l'intervalle $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$.

Méthodes d'intégration

5.12 Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_0^3 (1-x)^3\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{5}{(2x+3)^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$

5) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x(1+x^2)^2\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+3}{(x+1)^3}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$

8) $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt{2x^2+1}\,dx$

9) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\,du$

10) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+9x}}\,dx$

11) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[n]{1-x}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}^*$

12) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+8}}\,dt$

13) $\displaystyle\int_{0}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

15) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2\omega} \cos(\omega t)\,dt$

16) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} 6\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$

17) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$

18) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\,dx$

19) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$

5.13 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué

1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2}\,dx \qquad x = t^2-2$

2) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \qquad x = 3\sin(t)$

3) $\displaystyle\int_{a}^{2a} x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx\,,\quad a>0 \qquad x = \sqrt{a^2+t^2}$

5.14 Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2\omega} x^2\sin(\omega x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2(3x)\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx$

5.15 Calculer $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ de trois manières différentes

1) en effectuant le changement de variable $x = u-1$

2) en effectuant le changement de variable $x = t^2-1$

3) en effectuant une intégration par parties

Intégrales généralisées ou impropres

5.16 On considère la fonction $F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $F(x) = \int_0^x E(t)\,dt$, où $E(t)$ est la partie entière de t.

1) Calculer $F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

2) Dessiner le graphe de la fonction F pour $x \in [0\,;4]$ et déterminer la dérivée F' là où elle existe.

5.17 Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_1^3 \frac{E(x)}{x^2}\,dx$ 2) $\int_0^4 E\left(\frac{x^2}{x+2}\right)dx$

5.18 Calculer, si elles existent, les intégrales suivantes

1) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ 2) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

3) $\int_3^{+\infty} \frac{5+y}{y^3}\,dy$ 4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

5) $\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$ 6) $\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

7) $\int_0^4 t^{-\frac{3}{2}}\,dt$ 8) $\int_0^8 t^{-\frac{2}{3}}\,dt$

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{z^2+1}\,dz$ 10) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

Applications

5.19 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ si

1) $f(x) = x^2+2$ $a = -3\,,\ b = 3$

2) $f(x) = 9-x^2$ $a = -4\,,\ b = 4$

3) $f(x) = \frac{4}{x^2}-1$ $a = 1\,,\ b = 4$

4) $f(x) = \cos(3x)$ $\qquad a = 0\ ,\ b = \frac{\pi}{2}$

5) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ $\qquad a = 2\ ,\ b = 10$

5.20 Calculer l'aire du domaine formé des points dont les coordonnées x et y remplissent les conditions suivantes

1) $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\sin(x) + 2\cos(x)$ **et** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $0 \leq y \leq \sqrt{x+1}$ **et** $x \leq 0$

5.21 Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox si

1) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $\qquad$ 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

3) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ $\qquad$ 4) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

5) $f(x) = -x^2 + 6|x| + 7$

5.22 La courbe d'équation $y = f(x)$ délimite avec l'axe Ox une infinité de domaines dont chacun est compris entre deux zéros consécutifs. Combien d'aires différentes définissent-ils ? Calculer ces aires.

1) $f(x) = \sin(2x)$ $\qquad$ 2) $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(x)$

3) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$

5.23 On donne les fonctions f et g. Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des deux fonctions

1) $f : x \mapsto x^2$ $\qquad g : x \mapsto 8 - x^2$

2) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ $\qquad g : x \mapsto -x^2 - x + 6$

3) $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x$ $\qquad g : x \mapsto x^3 - 7x^2 + 12x$

4) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3$ $\qquad g: x \mapsto \sqrt{2x}$

5) $f: x \mapsto x(6-2x^2)$ $\qquad g: x \mapsto x(2-x^2)$

6) $f: x \mapsto x^4$ $\qquad g: x \mapsto -x^2+2$

7) $f: t \mapsto t^2-3$ $\qquad g: t \mapsto 2t$

8) $f: t \mapsto t^3$ $\qquad g: t \mapsto 2t$

5.24 Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = 3x^2 - 2x$.

5.25 Les paraboles d'équations $y = 16 - x^2$, $y = (x-4)^2$ et $y = -x^2 + 5x + 1$ délimitent trois triangles curvilignes. Déterminer les coordonnées des sommets et l'aire de chacun de ces triangles.

5.26 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes d'équations $y^2 = 4-x$ et $y^2 = 4+x$.

5.27 Les paraboles d'équations $y = 3(x+3)^2$ et $y = 3(x-1)^2$ délimitent avec l'axe Ox un domaine borné. Calculer son aire.

5.28 La courbe d'équation $y^3 = x^2$ délimite avec la courbe d'équation $y = |x|$ deux domaines bornés. Calculer l'aire totale de ces deux domaines.

5.29 Quelle est l'aire de chacun des deux domaines bornés limités par la courbe d'équation $y = 2x - x^3$ et sa **normale** (perpendiculaire à la tangente) en son point d'inflexion ?

5.30 Pour quelle valeur du paramètre positif a la courbe d'équation $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ délimite-t-elle avec l'axe Ox , dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6 ?

5.31 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les graphes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ et $x \mapsto mx$ soit égale à 9 .

5.32 Les axes de coordonnées et la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le 1er quadrant. Déterminer la valeur c pour laquelle la droite d'équation $x = c$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

5.33 On considère le domaine borné du 1er quadrant limité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $y = 8$ et la courbe d'équation $y = \dfrac{4-x^2}{x^2}$. Déterminer la valeur b pour laquelle la droite d'équation $y = b$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

5.34 On donne la courbe d'équation $y = ax - x^3$ $(a > 0)$. Montrer que chacun des deux domaines limités par cette courbe et l'axe Ox est divisé en deux domaines d'aires égales par la courbe d'équation $y = x^3$.

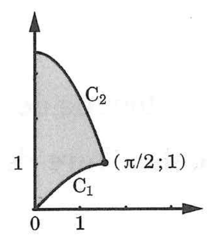
5.35 Déterminer la pente de la droite qui passe par l'origine et qui coupe en deux parties de même aire le domaine borné limité par la courbe d'équation $y = -x^2 + 3x$ et l'axe Ox.

5.36 La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe Ox en les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$. Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c pour que l'aire du domaine délimité par la parabole et l'axe Ox soit égale à $\dfrac{9}{2}$.

5.37 Les courbes d'équations $y = \sin(x)$ et $y = \cos(x)$ forment avec les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$, dans le 1er quadrant, trois domaines. Calculer les aires de ces trois domaines.

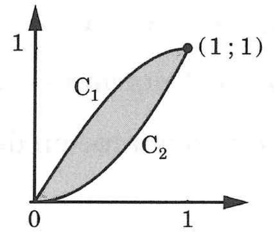
5.38 La parabole d'équation $y = x^2$ coupe le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq 2$ en deux domaines. Calculer l'aire du plus petit de ces deux domaines.

5.39 Calculer d'abord le paramètre a, puis l'aire du domaine grisé

1) 

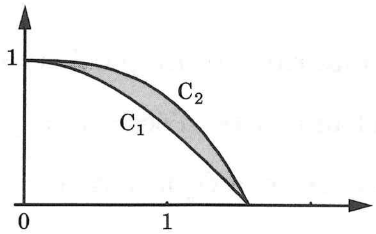
$C_1 : y = \sin(x)$

$C_2 : y = -x^2 + a$

2) 

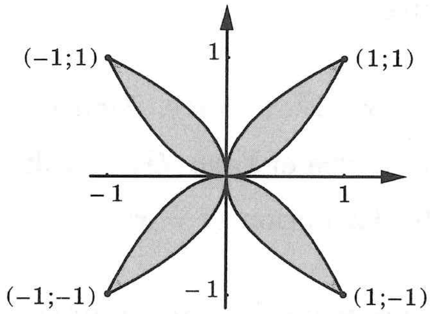
$C_1 : \; y = \sin(a x)$

$C_2 : \; y = x^2$

3) 

$C_1 : \; y = \cos(x)$

$C_2 : \; y = a x^3 + 1$

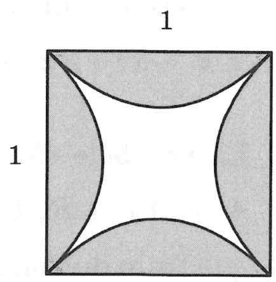
4) 

$C_1 : \; y^2 = a x^4$

$C_2 : \; x^2 = y^4$

5.40 Le domaine grisé est délimité par des arcs de parabole tangents aux diagonales du carré.

Calculer son aire.



5.41 Calculer le réel positif a pour que l'aire du domaine du premier quadrant compris entre l'axe Ox et la courbe d'équation $y = -a x^3 + (a+1)x$ soit minimale.

5.42 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite d'équation $y = x$

a) en prenant x comme variable d'intégration

b) en prenant y comme variable d'intégration.

5.43 Un arc de forme parabolique d'axe vertical a une base longue de 10 mètres et son sommet se trouve à 12 mètres du sol. Calculer l'aire de la surface que délimite cet arc.

5.44 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume.

1) $f(x) = x+1$ $\qquad$ $a = 1$, $b = 3$

2) $f(x) = mx$ $\qquad$ $a = 0$, $b = h$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $0 < a < b$

4) $f(x) = 2 + \sin(x)$ $\qquad$ $a = 0$, $b = 2\pi$

5.45 Le domaine borné délimité par les deux paraboles d'équations $y = x^2 - 2x + 6$ et $y = -x^2 + 10$ tourne autour de l'axe Ox. Calculer le volume du corps ainsi engendré.

5.46 Le domaine borné limité par la courbe d'équation $y = k(1-kx)\sqrt{x}$ $(k > 0)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant du paramètre k.

5.47 Déterminer le volume d'une "bague" engendrée par la révolution autour de l'axe Ox du rectangle $ABCD$ défini par

$$A(3;2),\ B(4;3),\ C(2;5) \text{ et } D(1;4).$$

5.48 Formule des trois niveaux

On considère un solide S limité par deux plans horizontaux d'équations $z = a$ et $z = b$. Si $S(z)$ est l'aire de la section par un plan horizontal, on peut estimer le volume de S par

$$V = \frac{b-a}{6}\left(S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right)$$

a) Montrer que si $S(z)$ s'exprime comme un polynôme de degré trois au plus, alors la formule ci-dessus est exacte.

b) En déduire le volume des corps suivants

1) d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h

2) du tronc de cône de rayons R et r et de hauteur h

3) d'une piscine de forme pyramidale : une pyramide droite tronquée par deux carrés de côtés C et c, de profondeur égale à h.

5.49 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Estimer les volumes suivants à l'aide de la formule des trois niveaux et comparer avec la valeur exacte

1) $f(x) = 2 + \sin(x)$ $\qquad a = 0$, $b = 2\pi$

2) $f(x) = 3 - \dfrac{x^2}{16}$ $\qquad a = -4$, $b = 4$

5.50 Déterminer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = \dfrac{|3x+1| + |x-1|}{2}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

5.51 Un récipient cylindrique de rayon R est rempli d'eau à ras bord. Calculer le volume d'eau qui s'en écoule lorsqu'on l'incline d'un angle α.

5.52 On donne la courbe d'équation $y = (3-x)\sqrt{x+3}$

1) Quelle est l'abscisse de son point le plus haut ?

2) Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe et l'axe Ox.

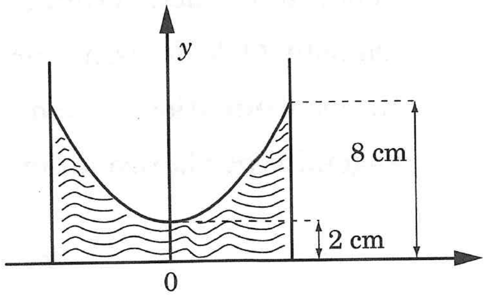
5.53 On fait tourner le domaine délimité par la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 1$ autour de l'axe Ox puis autour de l'axe Oy. Calculer les volumes des deux corps ainsi obtenus.

5.54 Les domaines bornés délimités par les courbes suivantes tournent aussi bien autour de l'axe Ox qu'autour de l'axe Oy. Calculer les volumes des deux corps ainsi obtenus.

1) $y^2 = 2x+3$, $x = 0$ et $x = 3$

2) $x^2 - 4y^2 = 16$ et $x = 8$

5.55 Un récipient cylindrique de rayon r, contenant un liquide, tourne autour de son axe de symétrie Oy. Une coupe de la surface du liquide selon un plan contenant Oy est la parabole illustrée ci-contre.



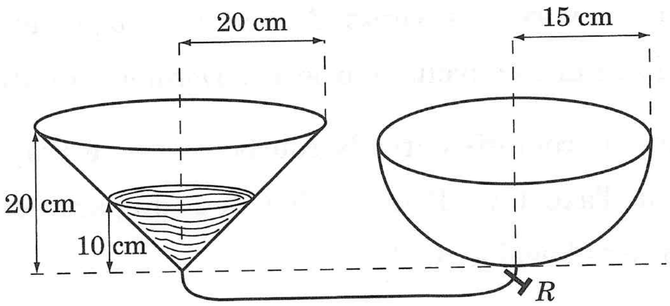
Calculer la hauteur du liquide dans le cylindre lorsque celui-ci est au repos.

5.56 1) Calculer le volume d'un verre en forme de tronc de cône de révolution sachant que sa hauteur mesure 12 cm et que les diamètres de ses bases mesurent 8 cm et 12 cm.

2) Calculer le volume de la bouteille engendrée par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = 3 + \sqrt[3]{x}$, l'axe Ox, la droite $x = -8$ et la droite $x = 8$.

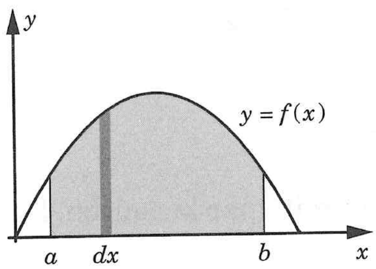
3) On verse le contenu de cette bouteille dans le verre. Quelle est la hauteur du liquide dans ce verre ?

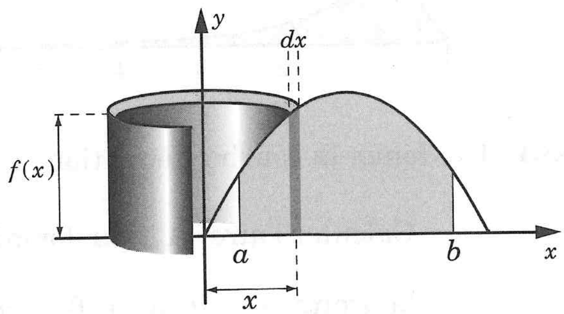
5.57



Déterminer la hauteur atteinte par le liquide dans le cône et la demi-sphère après l'ouverture du robinet R.

5.58 Volume d'un solide de révolution (découpage en tubes cylindriques)





Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ avec $a \geq 0$. On note D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Montrer que le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy est donné par

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

1) On considère le domaine borné D délimité par la courbe d'équation $y = 5x - x^2$ et l'axe Ox. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy.

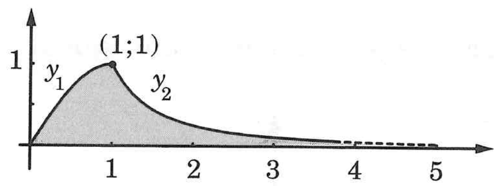
2) On considère le domaine borné D délimité par la courbe d'équation $y = \sin(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy.

5.59 On considère la famille de fonctions C_a définie par $C_a(x) = \frac{x^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ avec $a > 0$. Notons p_a et q_a les abscisses des minimums de C_a.

1) Lorsque a varie, les points $P_a(\,p_a\,;C_a(p_a))$ et $Q_a(\,q_a\,;C_a(q_a))$ engendrent une nouvelle courbe C. Donner l'équation de cette courbe.

2) Le domaine compris entre la courbe C et le graphe de C_a tourne autour de l'axe Oy. Pour quelle valeur du paramètre a le volume de ce corps est-il égal à 3π ?

5.60 Calculer d'abord le paramètre a, puis l'aire du domaine non borné grisé ci-dessous.



$$y_1 = \sin(ax)$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2}$$

5.61 On donne la courbe d'équation $y = \frac{4 - x^2}{x^4}$.

1) Calculer l'aire A_1 du domaine borné limité par la courbe, l'axe Ox et la droite $x = a$ avec $0 < a \leq 2$.

2) Calculer l'aire A_2 du domaine borné limité par la courbe, l'axe Ox et la droite $x = b$, avec $b > 2$.

3) Calculer $\lim\limits_{a \to 0} A_1$ et $\lim\limits_{b \to +\infty} A_2$.

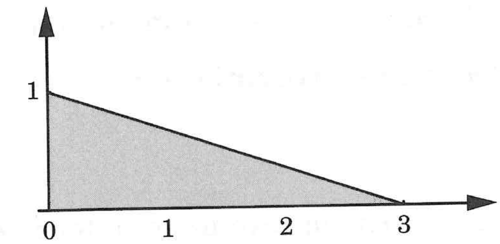
5.62 Le domaine non borné délimité par le graphe de la fonction f, l'axe Ox et le demi-plan $x \geq 1$ tourne autour de l'axe Ox. Calculer le volume du corps ainsi obtenu lorsque

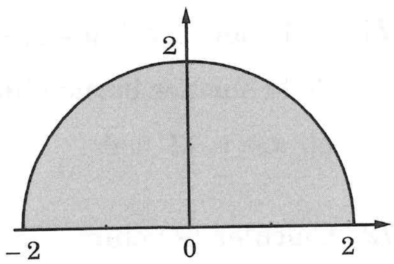
1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x) = 2x^{-3/2}$

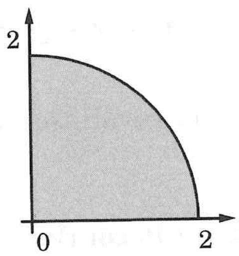
5.63 Le domaine non borné délimité par le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et le demi-plan $x \geq 1$ tourne autour de l'axe Ox. On désire découper ce corps, par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, en portions successives telles que chacune d'elles ait un volume égal à la moitié du volume de la précédente. Déterminer les équations de ces plans sachant que le premier a pour équation $x = 2$.

5.64 On considère la fonction f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Calculer l'aire du domaine non borné limité par l'axe Oy, le graphe de f et son asymptote horizontale.

5.65 Calculer les coordonnées du barycentre de chacun des domaines dessinés ci-dessous

1)


2)


3)


5.66 Un domaine est décrit par des inégalités. Calculer les coordonnées de son barycentre

1) $0 \geq y \geq x^3 - 2x^2 - 3x$ **et** $x \geq 0$ 2) $0 \leq y \leq 4 - \sqrt{x}$ **et** $x \geq 0$

3) $0 \leq y \leq \cos^2(x)$ **et** $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

5.67 Déterminer les coordonnées du barycentre du domaine délimité par deux paraboles d'équations

1) $y^2 = 4x$ **et** $y = \frac{x^2}{4}$ 2) $y = x^2$ **et** $y = 2 - x^2$

5.68 Calculer les coordonnées du barycentre d'un demi-disque inhomogène de rayon R en supposant que la densité de ce demi-disque en chaque point est proportionnelle à la distance de ce point au centre.

Exercices récapitulatifs

5.69 Les paraboles d'équation $y = \frac{x^2}{4}$ et $y = 5 - x^2$ délimitent une surface bornée S. Calculer le volume engendré par la révolution de S

1) autour de Ox 2) autour de Oy

5.70 Calculer le volume engendré par la révolution autour de Ox de la surface bornée située dans le premier quadrant et limitée par les courbes d'équations $y = 5x - x^3$ et $y = \frac{4}{x}$.

5.71 Calculer le volume engendré par la révolution autour de la droite $y = -1$ de la surface bornée limitée par les courbes d'équations $y = -x^2 - 3x + 6$ et $x + y - 3 = 0$.

5.72 Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de Ox du domaine plan borné limité par les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

5.73 Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de Ox du domaine plan borné limité par

1) l'axe Ox, les droites $x = 0$, $x = 2$ et la courbe $xy + y = 1$.

2) l'axe Ox , les droites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ et la courbe $y = \cos(x)$.

5.74 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de

1) Ox 2) Oy 3) la droite $x = 1$

4) la droite $x = 2$ 5) la droite $y = 3$ 6) la droite $y = 6$

5.75 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 3 . Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à Oy est un carré. Esquisser ce solide et calculer son volume.

5.76 De l'eau s'écoule d'un réservoir avec un débit instantané de $0,003\,t^2$ litres par seconde, pour $0 \leq t \leq 5$. Combien de litres s'écoulent-ils durant ces 5 secondes ?

5.77 De l'air s'échappe d'un ballon avec un débit instantané de $3t^2 + 2t$ centimètres cubes par seconde pour $0 \leq t \leq 36$. Quel volume d'air s'échappe-t-il pendant ces 36 secondes ?

5.78 A partir du temps $t = 0$, on verse du liquide dans un récipient avec un débit instantané de $r(t) = t$ litres par minute. Simultanément, une partie de ce liquide s'échappe du récipient avec un débit instantané de $v(t) = t^2$ litres par minute. En supposant qu'au temps $t = 0$, le récipient était vide, à quel moment le niveau du liquide atteindra-t-il son maximum ? A quel moment le récipient sera-t-il à nouveau vide ?

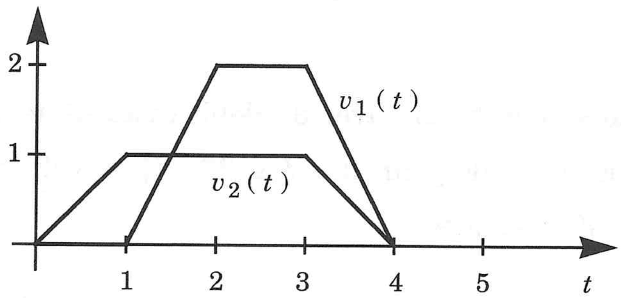
5.79 Alors qu'il se déplace à la vitesse de 20 m/s , un mobile est soumis à une décélération constante et s'arrête après 30 s . Calculer la distance parcourue durant ces 30 secondes.

5.80 Une pierre lâchée d'un ballon acquiert, après t secondes, une vitesse égale à $9 \cdot t$ mètres par seconde.
Quelle distance a-t-elle parcourue après 10 secondes ? après 20 secondes ?

5.81 Au temps $t = 0$ un objet est lancé d'une montgolfière vers le bas. La composante verticale de sa vitesse est donnée par $v(t) = -3 - 9{,}8\,t$ mètres par seconde. Si, après 10 secondes de chute, l'objet n'a toujours pas atteint le sol, que peut-on dire de l'altitude à laquelle se trouvait la montgolfière au temps $t = 0$?

5.82 D'un pont surplombant une gorge, on lâche une pierre qui est alors soumise à une accélération de $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Le bruit de l'impact avec l'eau est entendu sur le pont après $5{,}6$ secondes. Sachant que la vitesse du son est de 330 m/s , calculer le temps de chute de la pierre ainsi que la hauteur du pont.

5.83 Le diagramme ci-dessous donne les vitesses v_1 et v_2 de deux mobiles M_1 et M_2 . On désigne par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les abscisses de M_1 et M_2 au temps t .

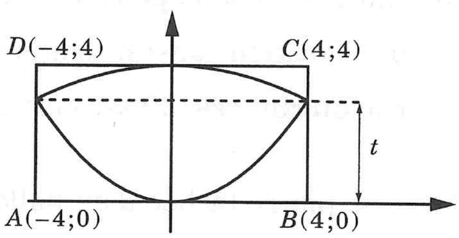


Calculer la date de l'éventuelle rencontre des deux mobiles sachant que

1) $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 2) $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

5.84 La parabole d'équation $y^2 = 12x$ est coupée à angle droit, aux points d'abscisse $x = 3$, par une autre parabole dont le sommet se situe sur l'axe Ox . Calculer l'aire du domaine que délimitent ces deux paraboles.

5.85 On donne ci-contre le rectangle $ABCD$ ainsi que deux arcs de parabole d'axe Oy .



1) Déterminer, en fonction de t , les équations des deux paraboles.

2) Calculer l'aire du domaine borné délimité par les deux paraboles.

3) Pour quelle valeur du paramètre t les paraboles se coupent-elles à angle droit ?

5.86 Pour $k > 0$, la courbe d'équation $y = \frac{1}{k}(3k^2x^2 + x)$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 2$ délimitent un domaine. Pour quelle valeur du paramètre k l'aire de ce domaine admet-elle un extremum ? S'agit-il d'une valeur maximale ou minimale ?

5.87 Une boule de camphre exposée à l'air libre diminue de volume, tout en gardant sa forme sphérique. La perte de volume est proportionnelle à sa surface externe. Son diamètre passe de 20 mm à 16 mm en six mois.

1) Après combien de mois le diamètre est-il égal à 10 mm ?

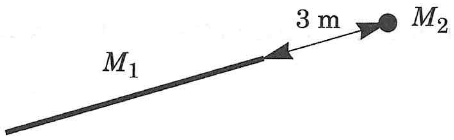
2) Après combien de mois la boule disparaît-elle ?

5.88 A l'intérieur de la Terre, considérée comme une boule homogène, la force de gravitation s'exerçant sur un point matériel est proportionnelle à la distance séparant ce point du centre de la Terre. Dans un livre de science-fiction, on veut creuser un puits jusqu'au centre de la Terre. Quel travail doit-on fournir pour transporter une masse d'un kilo de ce centre à la surface ?

Indications: le rayon de la Terre est égal à $6,371 \cdot 10^6$ m et l'accélération gravitationnelle à la surface est égale à $9,81 \text{ m/s}^2$.

5.89 La loi d'attraction universelle de Newton $F = \mathrm{G}\,\dfrac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$ donne la force F qui s'exerce entre deux points matériels de masses M_1 et M_2 situés à une distance r, G étant la constante universelle de gravitation.

Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M_1 et M_2 situées à 3 m l'une de l'autre, la masse M_1 de 18 kg étant constituée d'une barre homogène de 6 m de long et la masse M_2 de 2 kg étant considérée comme ponctuelle ?



Où concentrer la masse M_1 pour que la force F soit donnée par la loi de Newton ?

5.90 On considère un disque de rayon variable R ainsi que les fonctions $A(R)$ donnant l'aire du disque et $P(R)$ donnant la circonférence du cercle de rayon R. Montrer (sans utiliser les expressions explicites des fonctions A et P) que $A' = P$.

5.91 On considère une boule de rayon variable R et de volume $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. On désigne par $S(R)$ la surface de la sphère de rayon R. Montrer que $V' = S$ et en déduire l'expression de $S(R)$.

5.92 On considère un corps tombant en chute libre avec une vitesse initiale nulle. Pour calculer la hauteur h parcourue par ce corps après un temps de chute t, on divise le temps t en n intervalles de grandeur $\Delta t = \frac{t}{n}$. Sur le i-ème intervalle $(1 \leq i \leq n)$ on suppose que la vitesse de chute v_i est constante et égale à $g \cdot i \cdot \Delta t$, où $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$.

1) Calculer la hauteur h pour $n = 10$, pour $n = 20$ et pour une valeur quelconque de n.

2) Calculer la hauteur h pour n tendant vers l'infini.

5.93 Pour calculer l'aire d'un disque de rayon r, on découpe son intérieur en n anneaux concentriques d'épaisseur égale à $d = \frac{r}{n}$.

1) Expliquer pourquoi l'aire d'un anneau dont le cercle intérieur a pour rayon r_i peut être approchée par la valeur $A_i = 2\pi r_i d$.

2) Pour un nombre donné n d'anneaux, calculer la somme S_n des aires de ces anneaux.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

5.1

1) 20
2) 16
3) $\dfrac{27}{2}$
4) $\dfrac{12}{5}$
5) $\dfrac{82}{9}$
6) $6\sqrt{3}$
7) $-\dfrac{21}{16}$
8) $\dfrac{3a^3}{2}$
9) $5'343$
10) 13
11) 2
12) $\dfrac{16+4\sqrt{2}}{3}$
13) 2
14) $2\sqrt{2}-\dfrac{5}{2}$
15) 3
16) $\dfrac{5}{2}$
17) $\dfrac{11}{6}$
18) $-2\sin(a)$
19) -2
20) $a+b$
21) $\dfrac{2r^4}{3}$
22) $\dfrac{x^2}{2}$

5.2

1) 7
2) 9
3) -8
4) 8

5.4

1) $k = \dfrac{2}{9}$

2) $k = 7$

3) $k = \pi + m\cdot 2\pi\,,\ m\in\mathbb{Z}$

4) $k = \dfrac{\pi}{3}+m\cdot 4\pi$ ou $k = \dfrac{5\pi}{3}+m\cdot 4\pi \quad m\in\mathbb{Z}$

5) $k = 0$

6) $k \in\left\{-2\,;0\,;\dfrac{-6\pm 2\sqrt{3}}{6}\right\}$

5.5

1) minimums de coordonnées $\left(\pm 1\,;-\dfrac{1}{4}\right)$, maximum de coordonnées $(0\,;0)$

2) minimum de coordonnées $\left(-1\,;-\dfrac{2}{3}\right)$

5.6 $a = -\dfrac{1}{10}$; $b = \dfrac{12}{10}$; maximums: $(\pm\sqrt{12}\,;7,2)$, minimum: $(0\,;0)$

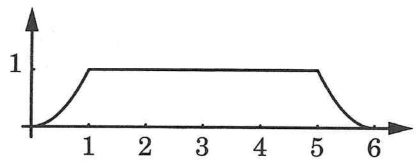
5.7 1) $\mu = \dfrac{16}{3}$, $c = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 2) $\mu = 7$, $c = 3$

3) $\mu = \dfrac{8}{3}$, $c = \dfrac{32}{9}$ 4) $\mu = \dfrac{2}{\pi}$, $c = 0,69$ ou $2,45$

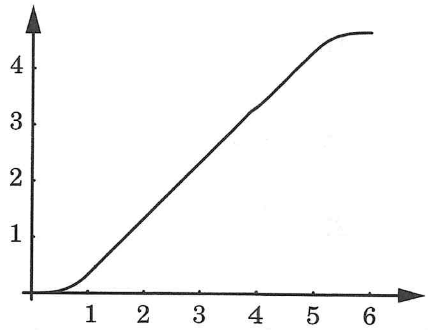
5) $\mu = \dfrac{2A}{\pi}$, $c = \dfrac{1}{\omega}\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

5.8 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{12}$

5.9 1)



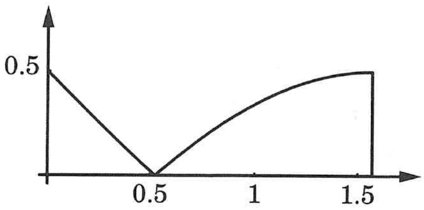
3)



2) $\dfrac{14}{3}$ 4) $F'(x) = f(x)$

5.10 $F_2(t) - F_1(t) = \displaystyle\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$

5.11 1)



2) $2\cos(p) + \left(2p - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin(p) - 1$

3) maximums: $(0\,;1)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

minimum: $\left(\dfrac{\pi}{4}\,;\sqrt{2}-1\right)$

5.12 1) $-\dfrac{15}{4}$ 2) 2 3) $\dfrac{1}{6}$

4) $\dfrac{4}{65}$ 5) $-\dfrac{7}{3}$ 6) $\dfrac{5}{4}$

7) $\dfrac{14}{3}$ 8) $\dfrac{13}{3}$ 9) $2 - \sqrt{5}$

10) $12 - 2\sqrt{10}$ 11) $\dfrac{n}{n+1}$ 12) $2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

13) $\dfrac{r^3}{3}$ 14) 0 15) $\dfrac{1}{\omega}$

16) $\dfrac{3}{2}$ 17) $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$ 18) $\dfrac{1}{2}$

19) $\dfrac{3}{2}$

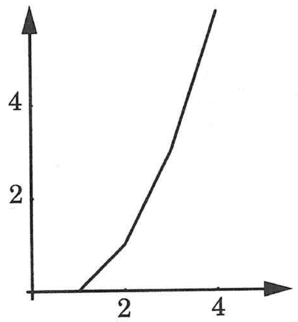
5.13 1) $\dfrac{-16\sqrt{2}}{15}$ 2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 3) $\dfrac{14\sqrt{3}}{5}\,a^5$

5.14 1) π 2) $\dfrac{\pi - 2}{\omega^3}$ 3) $\dfrac{1}{2}$

4) $\dfrac{\pi + 2}{8}$ 5) $\dfrac{3\pi + 2}{24}$ 6) $\dfrac{116}{15}$

5.15 $\dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{3}$

5.16 1) $F(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

2) 

$F'(x) = \mathrm{E}(x)$ si $x \notin \mathbb{N}$

5.17 1) $\dfrac{5}{6}$ 2) $5 - \sqrt{5}$

5.18 1) 2 2) $-\dfrac{1}{2}$ 3) $\dfrac{11}{18}$ 4) diverge

5) diverge 6) 8 7) diverge 8) 6

9) 3π 10) 4

5.19 1) 30 2) $\dfrac{128}{3}$ 3) 2 4) 1 5) $\dfrac{64}{3}$

5.20 1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$

5.21 1) $\frac{9}{2}$ 2) $\frac{37}{12}$ 3) $\frac{16}{3}$

4) 24 5) $\frac{490}{3}$

5.22 1) 1 2) $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$; $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{4}$

5.23 1) $\frac{64}{3}$ 2) 9 3) 9 4) $\frac{5}{3}$

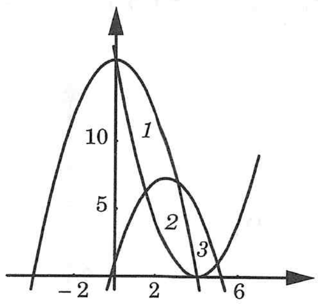
5) 8 6) $\frac{44}{15}$ 7) $\frac{32}{3}$ 8) 2

5.24 $\frac{1}{2}$

5.25 Sommets : $(0;16)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$, $(3;7)$, $(4;0)$ et $(5;1)$

Aire triangle *1* : $\frac{297}{24}$; aire triangle *2* : $\frac{215}{24}$;

aire triangle *3* : $\frac{16}{3}$



5.26 $\frac{64}{3}$

5.27 16

5.28 $\frac{1}{5}$

5.29 $\frac{25}{16}$

5.30 $a = 2\sqrt{2}$

5.31 $m = \frac{3}{2}$

5.32 $c \cong 1,2091$

5.33 $b = 3$

5.35 $3 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

5.36 a) $a = 1 \; ; \; b = -5 \; ; \; c = 4$ b) $a = -1 \; ; \; b = 5 \; ; \; c = -4$

5.37 Aires: $\sqrt{2} - 1 \; ; \; \sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)$

5.38 $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

5.39 1) $a = 1 + \dfrac{\pi^2}{4} \; ; \; \dfrac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12}$ 2) $a = \dfrac{\pi}{2} \; ; \; \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{3}$

3) $a = \dfrac{-8}{\pi^3} \; ; \; \dfrac{3\pi}{8} - 1$ 4) $a = 1 \; ; \; \dfrac{4}{3}$

5.40 $\dfrac{2}{3}$

5.41 $a = 1$

5.42 $\dfrac{9}{2}$

5.43 80

5.44 1) $\dfrac{56\pi}{3}$ 2) $\pi \dfrac{m^2 h^3}{3}$ 3) $\pi\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ 4) $9\pi^2$

5.45 135π

5.47 28π

5.48 1) $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$ 2) $\dfrac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$ 3) $\dfrac{h}{3}(c^2 + cC + C^2)$

5.49 1) estimation : $8\pi^2$; valeur exacte : $9\pi^2$

2) estimation : $\dfrac{176\pi}{3}$; valeur exacte : $\dfrac{288\pi}{5}$

5.50 $\dfrac{35\pi}{3}$

5.51 Le volume d'eau qui s'écoule est $\pi R^3 \tan(\alpha)$ si $\tan(\alpha) < \dfrac{h}{2R}$

5.52 1) -1 2) 108π

5.53 Autour de Ox : $\dfrac{\pi}{2}$ Autour de Oy : $\dfrac{4\pi}{5}$

5.54 1) autour de Ox : 18π autour de Oy : $\dfrac{\pi}{2}(45 + 5\sqrt{3})$

2) autour de Ox : $\dfrac{64\pi}{3}$ autour de Oy : $128\pi\sqrt{3}$

5.55 5 cm

5.56 1) 304π cm^3 2) $\dfrac{912\pi}{5}$ cm^3 3) $8,24$ cm

5.57 $h = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ cm

5.58 1) $\dfrac{625\pi}{6}$ 2) $2\pi^2$

5.59 1) $y = -\dfrac{x^2}{2}$ 2) $a = \sqrt{12}$

5.60 $a = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2}{\pi} + 1$

5.61 1) $\dfrac{a^3 - 3a^2 + 4}{3a^3}$ 2) $\dfrac{b^3 - 3b^2 + 4}{3b^3}$

3) $\lim\limits_{a \to 0} A_1 = +\infty$ $\lim\limits_{b \to +\infty} A_2 = \dfrac{1}{3}$

5.62 1) $\dfrac{\pi}{5}$ 2) 2π

5.63 Les équations de ces plans sont $x = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

5.64 1

5.65 1) $\left(1 ; \dfrac{1}{3}\right)$ 2) $\left(0 ; \dfrac{8}{3\pi}\right)$ 3) $\left(\dfrac{8}{3\pi} ; \dfrac{8}{3\pi}\right)$

5.66 1) $\left(\frac{42}{25}\ ;\ -\frac{414}{175}\right)$ 2) $\left(\frac{24}{5}\ ;\ 1\right)$ 3) $\left(0\ ;\ \frac{3}{8}\right)$

5.67 1) $\left(\frac{9}{5}\ ;\ \frac{9}{5}\right)$ 2) $(0\,;1)$

5.68 $\left(0\ ;\ \frac{3R}{2\pi}\right)$

5.69 1) $V = \frac{176\pi}{3}$ 2) $V = 10\pi$

5.70 $\frac{136\pi}{21}$

5.71 $\frac{704\pi}{5}$

5.72 $\frac{3\pi}{10}$

5.73 $\frac{2\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi^2}{2}$

5.74 1) $\frac{22\pi}{15}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{6}$

4) $\frac{\pi}{6}$ 5) $\frac{7\pi}{15}$ 6) $\frac{8\pi}{15}$

5.75 144

5.76 0, 125 litre

5.77 47’952 cm^3

5.78 Maximum après 1 minute . De nouveau vide après 1 minute et 30 secondes

5.79 300 m

5.80 450 m ; 1’800 m

5.81 Elle était à plus de 520 m du sol

5.82 Hauteur $\cong$ 132, 43 m ; temps de chute de la pierre 5, 2 s

5.83 1) $t_c = 2,5$ s 2) Ils ne se rencontrent pas

5.84 48

5.85 1) $y = \dfrac{t\,x^2}{16}$; $y = 4 + \dfrac{(t-4)x^2}{16}$ 2) $\dfrac{64}{3}$ 3) $t = 2$

5.86 L'aire est minimum si $k = \dfrac{1}{2}$

5.87 1) Après 15 mois 2) Après 30 mois

5.88 $3,125 \cdot 10^7$ Joule

5.89 $\dfrac{4G}{3}$; en son centre de masse

5.91 $S(R) = 4\pi R^2$

5.92 1) $h = \dfrac{g\,t^2}{n^2}\,\dfrac{n(n+1)}{2}$ (par excès)

$h = \dfrac{g\,t^2}{n^2}\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ (par défaut)

2) $h = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$

5.93 2) $\dfrac{\pi\,r^2(n+1)}{n}$ (par excès) $\dfrac{\pi\,r^2(n-1)}{n}$ (par défaut)

3) $\pi\,r^2$