3 Applications linéaires

3.1 Définitions et propriétés

Exemple 1. *On considère un nombre réel a et la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.*

1. $a(x+y) = ax + ay$ *que l'on peut écrire* $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $a(\lambda x) = \lambda(ax)$ *que l'on peut écrire* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

La fonction f est linéaire. Aucune autre fonction réelle à une variable réelle ne vérifie ces deux propriétés. Par exemple

$f(x)$	$f(x+y)$		$f(x)+f(y)$	$f(\lambda x)$		$\lambda f(x)$
x^2	$(x+y)^2$	$\neq$	x^2+y^2	$(\lambda x)^2$	$\neq$	λx^2
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x+y}$	$\neq$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{\lambda x}$	$\neq$	$\lambda\sqrt{x}$
$\sin(x)$	$\sin(x+y)$	$\neq$	$\sin(x)+\sin(y)$	$\sin(\lambda x)$	$\neq$	$\lambda\sin(x)$

Exemple 2. *L'application $h\colon V_2 \to V_2$ est définie par $h(\vec{u}) = 3\,\vec{u}$.*
Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V_2 et tout nombre réel λ, on a

1. $h(\vec{u}+\vec{v}) = 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\,\vec{u} + 3\,\vec{v} = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$
2. $h(\lambda\,\vec{u}) = 3(\lambda\,\vec{u}) = (3\lambda)\,\vec{u} = (\lambda 3)\,\vec{u} = \lambda(3\,\vec{u}) = \lambda\,h(\vec{u})$

Comme cette application h possède les mêmes propriétés que celle de l'exemple 1, on dit aussi qu'elle est linéaire. Elle est interprétée comme l'homothétie de rapport 3 du plan vectoriel.

Exemple 3. *On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par*
$$f\big((x_1\,;x_2)\big) = 2x_1 - x_2$$
Pour tous les vecteurs $(x_1\,;x_2)$, $(y_1\,;y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout nombre réel λ, on a

1. $$\begin{aligned} f\big((x_1\,;x_2)+(y_1\,;y_2)\big) &= f\big((x_1+y_1\,;x_2+y_2)\big) \\ &= 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ &= 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2 \\ &= 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2 \\ &= f\big((x_1\,;x_2)\big) + f\big((y_1\,;y_2)\big) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f(\lambda(x_1\,;x_2)) &= f((\lambda x_1\,;\lambda x_2)) \\ &= 2\lambda x_1 - \lambda x_2 \\ &= \lambda(2x_1 - x_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;x_2)) \end{aligned}$$

L'application f est linéaire.

On considère deux espaces vectoriels E et F. Une application f de E vers F est une **application linéaire** si, pour tous les vecteurs u et v de E et tout nombre réel λ, on a

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Une application linéaire est aussi appelée un **homomorphisme**[1].

Exemple 4. *L'**application nulle** $k_o\colon E \to F$ définie par $k_o(x) = o_F$, où o_F est le vecteur nul de F, est une application linéaire.*

Exemple 5. *L'**identité** $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$ est une application linéaire.*

Exemple 6. *La dérivation est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel des fonctions réelles, car*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$

Exemple 7. *L'application $f\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(ax^2+bx+c) = (a\,;b\,;c)$ est linéaire.*

Exemple 8. *L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x_1\,;x_2)) = (x_1\,;0)$ est une application linéaire, interprétée géométriquement comme une projection.*

Propriétés

1. Si f est une application linéaire de E vers F, alors l'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.

   $$f(o_E) = o_F$$

   En effet, on a $f(o_E) = f(0 \cdot o_E) = 0 \cdot f(o_E) = o_F$ (voir exercice 5, page 65). La réciproque est fausse.

[1] Le mot *homomorphisme* vient du grec *homos* (semblable) et *morphê* (forme).

2. Une application f de E vers F est linéaire si et seulement si

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

quels que soient les vecteurs u et v de E et les nombres réels λ et μ.

Exemple 9. *La fonction* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x-5 \end{aligned}$ *n'est pas linéaire car* $f(0) \neq 0$.

Exemple 10. *La fonction* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ *n'est pas linéaire bien que* $f(0) = 0$.

Exemple 11. *Si* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est une application linéaire, alors*

$$\begin{aligned} f\big((x_1\,;x_2)\big) &= f\big((x_1\,;0) + (0\,;x_2)\big) \\ &= f\big((x_1\,;0)\big) + f\big((0\,;x_2)\big) \\ &= f\big(x_1(1\,;0)\big) + f\big(x_2(0\,;1)\big) \\ &= x_1 f\big((1\,;0)\big) + x_2 f\big((0\,;1)\big) \end{aligned}$$

L'image d'un vecteur $(x_1\,;x_2)$ *est donc déterminée si l'on connaît les images des deux vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, l'image par une application linéaire f d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs, avec les mêmes coefficients. Lorsqu'un vecteur x de E est donné par ses composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;\,\dots\,;e_n)$ de E, il suffit de connaître les images $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour déterminer celle du vecteur x. En effet, comme f est linéaire, on a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

3.2 Matrice associée à une application linéaire

Exemple 1. *Soit* $\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) &\mapsto (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{aligned}$

En travaillant dans les bases canoniques, on peut écrire matriciellement l'image par l'application f *d'un vecteur* $(x_1\,;x_2)$.

$$\begin{pmatrix} -x_1+3x_2 \\ 2x_1-6x_2 \\ x_1-3x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On observe que les colonnes de la matrice A sont constituées des composantes des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$f\big((1\,;0)\big) = (-1\,;2\,;1) \quad \text{et} \quad f\big((0\,;1)\big) = (3\,;-6\,;-3)$$

La matrice A est appelée matrice associée à l'application f relativement aux bases canoniques.

Exemple 2. *On considère un espace vectoriel E de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1\,;e_2)$, un espace vectoriel F de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (e'_1\,;e'_2\,;e'_3)$, et une application linéaire f de E vers F. On peut calculer l'image y d'un vecteur quelconque $x = x_1e_1 + x_2e_2$ dès lors que l'on connaît les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$.*

$$y = f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2)$$

Si les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ de F sont représentés par les matrices-colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$, on peut écrire matriciellement $y = f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice $A = (a_{ij})$ s'appelle la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On écrit plus simplement encore

$$Y = A \cdot X$$

On retient que les colonnes de A sont les composantes des vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

On note E et F deux espaces vectoriels, munis des bases $\mathcal{B}_E = (e_1\,; \dots ; e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1\,; \dots ; e'_m)$, et f une application linéaire de E vers F. Les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i$$

La matrice $A = (a_{ij})$ dont les colonnes sont les composantes des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est la **matrice de l'application linéaire** (ou matrice associée à l'application linéaire) relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Elle est de type $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\vdots} & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \boxed{a_{mj}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$

Exemple 3. *On considère l'espace $\mathbb{P}_2$ muni de la base $(x^2\,;x\,;1)$. La dérivation $d\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ est définie par $d(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$.*
On a $d(x^2) = 2x$, $d(x) = 1$ et $d(1) = 0$. La matrice associée à d relativement à la base $(x^2\,;x\,;1)$ est donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 4. *On considère un espace vectoriel E de dimension n. La matrice de l'identité id_E relativement à une base donnée est la matrice unité I_n.*

Exemple 5. *On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image d'un vecteur $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est le vecteur $(y_1\,;y_2)$ tel que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 1. On considère deux espaces vectoriels E et F munis de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Une application linéaire f de E vers F est donnée par la matrice A. On peut calculer, sous forme matricielle, l'image y par f d'un vecteur quelconque x de E avec la formule

$$Y = A \cdot X$$

où X et Y sont les matrices-colonne associées aux vecteurs x et y.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La démonstration de ce théorème est une généralisation de celle proposée dans l'exemple 2 de la page 76.

Exemple 6. *On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut déterminer l'image d'un vecteur $(x_1\,; x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ en calculant

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $f\big((x_1\,; x_2)\big) = (x_1 - 2x_2\,; x_2\,; 2x_1 + 3x_2)$.

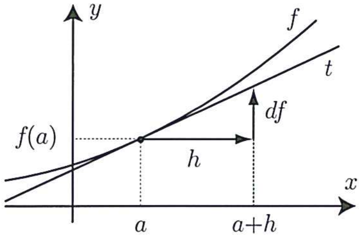
3.3 Matrice jacobienne et différentielle

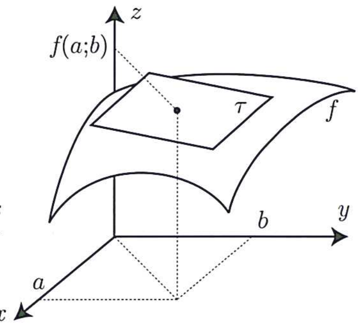
Ce paragraphe présente une contribution de l'algèbre linéaire à l'analyse. Son étude n'est pas nécessaire à la compréhension des chapitres suivants. Sa lecture permet cependant de découvrir la simplification que peut apporter la notion d'application linéaire dans le travail mathématique de niveau supérieur.

Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a peut être approchée au voisinage de a par la fonction affine tangente t d'équation

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Le nombre $f'(a)$ est la pente de cette tangente et, en posant $h = x - a$, le produit $f'(a) \cdot h$, noté df, est appelé la différentielle de f en a.





De manière analogue, on détermine le plan tangent τ à la surface de $\mathbb{R}^3$ qui représente la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \mapsto & f(x\,;y) \end{array}$ en $(a\,;b)$ par l'équation

$$z = f(a\,;b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a\,;b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a\,;b)\cdot(y-b)$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont les dérivées partielles de f par rapport à x et y.

Exemple 1. *On considère la fonction f définie par $f(x\,;y) = x^2y$. On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = x^2$$

Pour $x=3$ et $y=2$, on trouve $f(3\,;2)=18$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3\,;2)=12$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3\,;2)=9$ et le plan tangent d'équation $z = 18+12(x-3)+9(y-2)$. Ce plan constitue une approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de $(3\,;2)$ et on peut écrire sous forme matricielle

$$f(x\,;y) \approx 18 + \begin{pmatrix}12 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\ y-2\end{pmatrix}$$

L'application linéaire df :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}12 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} = 12h_1 + 9h_2 \end{array}$$

est appelée la différentielle de f en $(3\,;2)$.

Plus généralement, si

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n) & \mapsto & \big(f_1(x)\,;f_2(x)\,;\,\ldots\,;f_m(x)\big) \end{array}$$

est une fonction de n variables réelles et que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de f_i par rapport à x_j, on considère la matrice

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

de type $m \times n$ qui est la **matrice jacobienne**[2] de f. La **différentielle** de f en $a \in \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ de matrice $J(a)$ par rapport aux bases canoniques. Elle permet de calculer une approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de a.

Exemple 2. *La fonction* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \mapsto & (x^2-3y\,;x+5y+xy\,;7x+e^y) \end{array}$
possède la matrice jacobienne

$$J(x\,;y) = \begin{pmatrix} 2x & -3 \\ 1+y & 5+x \\ 7 & e^y \end{pmatrix}$$

En $(0\,;0)$, *la différentielle de* f *est l'application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$df = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3h_2 \\ h_1+5h_2 \\ 7h_1+h_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'approximation d'ordre 1 suivante.

$$f(x\,;y) \approx (0\,;0\,;1) + (-3y\,;x+5y\,;7x+y) = (-3y\,;x+5y\,;1+7x+y)$$

3.4 Image et noyau d'une application linéaire

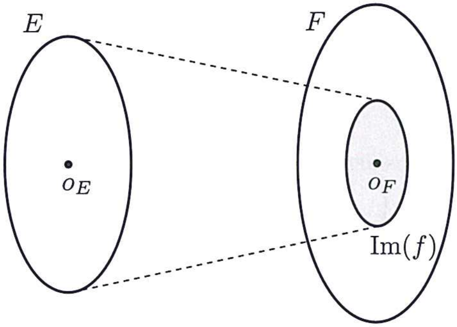
On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie et une application linéaire f de E vers F.

Image d'une application linéaire

L'**image de f**, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{y \in F \mid \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x)\} \end{aligned}$$

[2] Carl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand, 1804–1851



Propriétés

1. Le vecteur nul de F appartient à $\mathrm{Im}(f)$.
2. L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
   La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée **rang de l'application** f.
3. L'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les images des vecteurs d'une base de E.
4. L'application f est surjective si et seulement si $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$.

Démonstrations

1. Comme $f(o_E) = o_F$ (voir page 74), on a $o_F \in \mathrm{Im}(f)$.
2. On considère v_1 et v_2 deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et λ un nombre réel. Il suffit de montrer que $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ et que $\lambda\, v_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
   Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe deux vecteurs x_1 et x_2 de E tels que $v_1 = f(x_1)$ et $v_2 = f(x_2)$. Par linéarité, on en déduit que
   $$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \mathrm{Im}(f) \\ \lambda\, v_1 &= \lambda\, f(x_1) = f(\lambda\, x_1) \in \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$
3. Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété de linéarité de f (voir page 75).
4. On applique la propriété 2 de la dimension d'un sous-espace vectoriel (voir page 64). □

Exemple 1. *Soit* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (-x_1 + 3x_2\,; 2x_1 - 6x_2\,; x_1 - 3x_2) \end{array}$

Les images par f des vecteurs de la base canonique sont $(-1\,;2\,;1)$ et $(3\,;-6\,;-3)$. L'image de f est le sous-espace engendré par ces deux vecteurs, c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(f) = L\big((-1\,;2\,;1),(3\,;-6\,;-3)\big) = L\big((-1\,;2\,;1)\big)$$

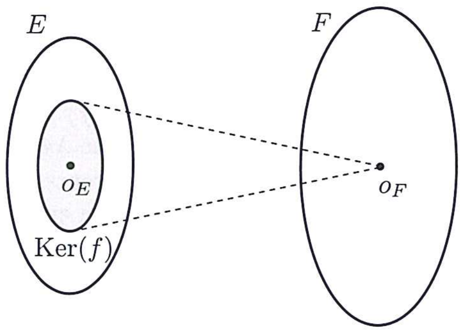
Dans ce cas, l'image de f est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. On constate que les colonnes de la matrice associée à f relativement aux bases canoniques sont les composantes des vecteurs qui engendrent $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 2. *On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques. On a $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ car cet espace est engendré par les vecteurs $(2\,;-1)$, $(1\,;3)$ et $(4\,;5)$. L'application g est surjective.*

Noyau d'une application linéaire

Le **noyau de f**, noté[3] $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par l'application linéaire f est le vecteur nul de F.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = o_F\}$$



Propriétés

1. Le vecteur nul de E appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
3. Les trois énoncés suivants sont équivalents.
   a) L'application f est injective.
   b) Les images des vecteurs d'une base de E sont des vecteurs linéairement indépendants de F.
   c) $\mathrm{Ker}(f) = \{o_E\}$

[3] En allemand, noyau se dit *Kern* ; en anglais, *kernel*.

Démonstrations

1. Comme $f(o_E) = o_F$ (voir page 74), on a $o_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. On considère x_1 et x_2 deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ et λ un nombre réel. Par linéarité, on a

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = o_F + o_F = o_F$$
$$f(\lambda\, x_1) = \lambda\, f(x_1) = \lambda\, o_F = o_F$$

Ainsi $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda\, x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

3. On obtient toutes les équivalences en démontrant successivement que a) implique b), b) implique c) et c) implique a).

Démonstration de a) $\Rightarrow$ b)
L'application f est injective si, pour tous les vecteurs x_1 et x_2 de E, on a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
On note $\mathcal{B}_E = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$ une base de E et α_i des réels tels que $\sum \alpha_i f(e_i) = o_F$. On doit montrer que tous les réels α_i sont nuls.
Par propriété de linéarité, on peut écrire $f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = o_F$. Sachant toutefois que $f(o_E) = o_F$, l'injection de f implique $\sum \alpha_i e_i = o_E$. Mais comme les vecteurs de $\mathcal{B}_E$ sont linéairement indépendants, on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout i.

Démonstration de b) $\Rightarrow$ c)
On note $\mathcal{B}_E = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$ une base de E et u un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}(f)$. On doit montrer que u est le vecteur nul.
Comme $\mathcal{B}_E$ est une base de E, on peut écrire $u = \sum \alpha_i e_i$. Par linéarité de l'application, on obtient $f(u) = f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = \sum \alpha_i f(e_i)$. Cette dernière combinaison linéaire est égale à o_F car $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais comme les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout i et donc que $u = o_E$.

Démonstration de c) $\Rightarrow$ a)
Si l'on pose $f(x_1) = f(x_2)$, on obtient successivement

$f(x_1) - f(x_2) = o_F$	
$f(x_1 - x_2) = o_F$	par linéarité
$x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$	par définition du noyau
$x_1 - x_2 = o_E$	car, par hypothèse, $\mathrm{Ker}(f) = \{o_E\}$
$x_1 = x_2$	

□

Exemple 3. *Soit* $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{array}$

$$\begin{aligned} (x_1\,;x_2)\in\mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x_1\,;x_2)=(0\,;0\,;0) \\ &\Leftrightarrow (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2)=(0\,;0\,;0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x_1-3x_2=0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3\lambda \\ x_2 & = & \lambda \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow (x_1\,;x_2)=\lambda(3\,;1) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)=L\big((3\,;1)\big)$.
Dans ce cas, le noyau de f *est donc une droite vectorielle de* $\mathbb{R}^2$.

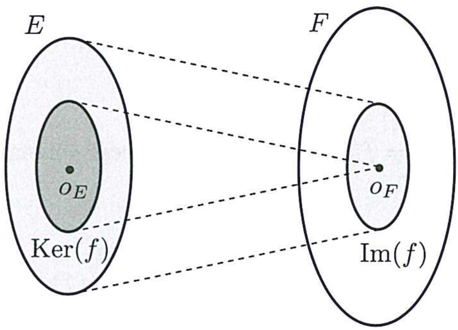
Exemple 4. *On considère une application linéaire* g *de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^3$ *définie par sa matrice* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *relativement aux bases canoniques.*
En utilisant l'écriture matricielle, on a

$$A\cdot X=O\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1=x_2=0$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(g)=\big\{(0\,;0)\big\}$ *et que l'application* g *est injective.*

Théorème 2 (théorème du rang). Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E vers un espace vectoriel F, alors

$$\dim(E)=\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$



Exemple 5. *Pour* $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{array}$
on a vu (exemples 1 et 3) que le noyau et l'image de cette application linéaire sont tous deux de dimension 1.
On a bien $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1+1 = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$.

Exemple 6. *On reprend l'application linéaire* g *de* $\mathbb{R}^3$ *vers* $\mathbb{R}^2$ *de l'exemple 2, définie par la matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Comme* $\dim\big(\operatorname{Im}(g)\big) = 2$, *on peut conclure que la dimension du noyau de* g *est 1. L'espace* $\operatorname{Ker}(f)$ *est engendré par le vecteur* $(1\,;2\,;-1)$, *car*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Corollaire 1. Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension et que f est une application linéaire de E vers F, alors

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire bijective de E vers F est un **isomorphisme**[4]. S'il existe un tel isomorphisme, les espaces E et F sont **isomorphes.**

Corollaire 2. On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie. Il existe un isomorphisme de E vers F si et seulement si ces espaces ont même dimension.

Remarque importante. Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à l'espace $\mathbb{R}^n$. Cela signifie que, dans la suite de ce cours, on peut se limiter à l'étude des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$.

Exemple 7. *L'application linéaire donnée dans l'exemple 7 de la page 74 est un isomorphisme. Les espaces vectoriels* $\mathbb{P}_2$ *et* $\mathbb{R}^3$ *sont donc isomorphes.*

---

[4]Le mot *isomorphisme* vient du grec *isos* (égal) et *morphê* (forme).

Exemple 8. *On se donne une application linéaire f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$ par sa matrice associée relativement à la base canonique.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le noyau de cette application linéaire, il faut résoudre le système homogène $A \cdot X = O$. Par la méthode de Gauss (voir page 2), on peut échelonner la matrice A par des opérations sur les lignes et obtenir le système équivalent

$$B \cdot X = 0 \qquad \text{avec } B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système, on obtient que

$$\mathrm{Ker}(f) = L\big((2\,;-1\,;1\,;0)\big)$$

qui est de dimension 1. L'espace $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension 3.
Les colonnes de la matrice A engendrent $\mathrm{Im}(f)$. En ne prenant que des vecteurs linéairement indépendants, on obtient une base de cet espace. Une méthode consiste à choisir les colonnes de la matrice A qui correspondent à celles de la matrice B ayant un élément en «position pivot» (premier élément non nul des lignes de B). Dans la matrice B, on a $C_3 = C_2 - 2C_1$. La troisième colonne de la matrice A est elle aussi combinaison linéaire des deux premières. On obtient ainsi

$$\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;2\,;1\,;0),(1\,;1\,;0\,;1),(2\,;1\,;0\,;0)\big)$$

On peut justifier cet algorithme de la manière suivante : les opérations effectuées sur les lignes ne changent pas les relations de dépendance linéaire (sinon elles changeraient les solutions du système linéaire). On choisit comme base de $\mathrm{Im}(f)$ des vecteurs dans la matrice A et non dans la matrice échelonnée B.

3.5 Opérations sur les applications linéaires

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des espaces vectoriels. Lorsqu'on parle de matrice associée à une application linéaire, il est sous-entendu que ces espaces vectoriels sont de dimension finie et munis des bases notées $\mathcal{B}_E = (e_1\,;\ldots\,;e_n)$, $\mathcal{B}_F = (e'_1\,;\ldots\,;e'_m)$ et $\mathcal{B}_G = (e''_1\,;\ldots\,;e''_p)$.

Théorème 3. Si f et g sont deux applications linéaires de E vers F et λ un nombre réel, alors λf et $f+g$ sont aussi des applications linéaires de E vers F.

Exemple 1. *On donne deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.*
$f\colon (x\,;y\,;z) \mapsto (2x+z\,;y-3z)$ *et* $g\colon (x\,;y\,;z) \mapsto (x+2y-z\,;x+y)$
On vérifie immédiatement que les applications

$$\begin{aligned} 3f\colon \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) \mapsto (6x+3z\,;3y-9z) \\ f+g\colon \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) \mapsto (3x+2y\,;x+2y-3z) \end{aligned}$$

sont elles aussi linéaires. En écrivant les matrices associées à ces quatre applications linéaires relativement aux bases canoniques, on peut observer les résultats énoncés dans le théorème suivant.

Théorème 4. On considère f et g deux applications linéaires de E vers F, on note A et B les matrices qui leur sont associées et λ un nombre réel.

1. La matrice associée à λf est la matrice λA.
2. La matrice associée à $f+g$ est la matrice $A+B$.

Démonstration. On démontre la seconde de ces propriétés. La première s'obtient d'une manière analogue.

Par définition de la somme, on a pour tout vecteur x de E

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si X et Y sont les matrices-colonne associées respectivement à x et y, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Y &= A\cdot X + B\cdot X && \text{théorème 1, page 77} \\ &= (A+B)\cdot X && \text{propriété 3 du calcul matriciel, page 14} \end{aligned}$$ □

Théorème 5. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux applications linéaires, alors la composée $g\circ f\colon E \to G$ est aussi une application linéaire.

Démonstration. Pour tous les vecteurs u et v de E, on a

$$\begin{aligned} (g\circ f)(u+v) &= g\big(f(u+v)\big) && \text{par définition de la composée} \\ &= g\big(f(u)+f(v)\big) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= g\big(f(u)\big) + g\big(f(v)\big) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &= (g\circ f)(u) + (g\circ f)(v) && \text{par définition de la composée} \end{aligned}$$

De manière analogue, on montre que $(g\circ f)(\lambda u) = \lambda (g\circ f)(u)$. □

Exemple 2. *On considère les deux applications linéaires suivantes.*

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \mapsto & (x+y\,;x-2y-z) \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \mapsto & (x\,;2x+3y) \end{array}$$

La composée est l'application linéaire

$$g\circ f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \mapsto & (x+y\,;5x-4y-3z) \end{array}$$

En écrivant les matrices associées à ces trois applications linéaires relativement aux bases canoniques, on peut observer le résultat énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 6. On considère une application linéaire f de E vers F et une application linéaire g de F vers G, on note A et B les matrices qui leur sont associées. La matrice associée à la composée $g\circ f$ est la matrice $B\cdot A$.

Démonstration. Par définition, on a pour tout vecteur x de E

$$y=(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$$

Si X et Y sont les matrices-colonne associées respectivement à x et y, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Y &= B\cdot(A\cdot X) && \text{théorème 1, page 77} \\ &= (B\cdot A)\cdot X && \text{propriété 1 du calcul matriciel, page 14} \end{aligned}$$

□

3.6 Exercices

1. Les applications f définies ci-dessous sont-elles linéaires ?

a) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = x_1 + x_2$

b) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = x_1 \cdot x_2$

c) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (2x_1 - x_2\,;x_1)$

d) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (0\,;|x_2|)$

e) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (x_1^2\,;x_1 + x_2)$

f) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = \big(\sin(x_1)\,;x_1 - x_2\big)$

g) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 + 2x_2\,;x_1)$

h) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2)$

i) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (1 - x_2\,;x_1\,;0)$

j) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = x_2$

2. Deux espaces vectoriels E et F sont munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e_1'\,;e_2'\,;e_3')$. Une application linéaire $h\colon E \to F$ est définie par $h(e_1) = 2e_1' - 4e_2' + 5e_3'$ et $h(e_2) = e_1' + 3e_2' - 4e_3'$.

a) Exprimer l'image par h d'un vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2$ quelconque.

b) Écrire les matrices-colonne associées aux vecteurs x, $h(e_1)$, $h(e_2)$ et $h(x)$ relativement aux bases données.

3. a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition complexe et de la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel, est un espace vectoriel de dimension 2.

b) Les applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = \overline{z}$ et $g(z) = |z|$ sont-elles linéaires ?

4. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles convergentes. Vérifier que l'application de E vers $\mathbb{R}$, qui associe à toute suite convergente sa limite, est une application linéaire.

5. Pour les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ suivantes, déterminer les matrices relativement aux bases canoniques.

$a\colon (x_1\,;x_2) \mapsto 2x_1 - x_2$

$b\colon (x_1\,;x_2) \mapsto (x_1 - x_2\,;0)$

$c\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (x_1 - x_3\,;2x_3 - 2x_1)$

$d\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (x_1 - 2x_2\,;6x_2 - 3x_1)$

$$e\colon x \mapsto (x\,;2x\,;-3x)$$
$$f\colon (x_1\,;x_2) \mapsto (x_1 - 3x_2\,;-2x_1 + x_2\,;-x_2)$$
$$g\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (-x_1 + 3x_2 + 2x_3\,;2x_1 - 4x_2 + 3x_3)$$
$$h\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto 0$$

6. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

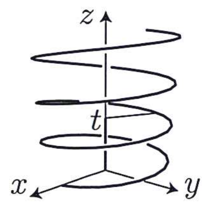
7. Déterminer la matrice de l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ ainsi que celle de l'identité de $\mathbb{R}^2$, relativement à la base canonique.

8. Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) = \left(3 + x_1x_2^2 + x_2 - \sin(x_3)\,;x_1\sqrt{x_3} + \dfrac{1}{x_4}\right)$.

9. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \big(\cos(t)\,;\,\sin(t)\,;t\big)$ qui peut être représentée graphiquement par une courbe dans $\mathbb{R}^3$, appelée *hélice circulaire.*

a) Calculer la matrice jacobienne $J(t)$ de f. Donner une interprétation géométrique de cette matrice.

b) Écrire la différentielle de f pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.



10. Déterminer l'approximation d'ordre 1 de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) & \mapsto & \big(16 - 2x + xyz^2\,;11 - x + 2y + 3z^2\big) \end{array}$$

au voisinage de $(4\,;0\,;1)$. Vérifier cette approximation en calculant la valeur exacte et la valeur approchée de $f(4.02\,;0.03\,;0.99)$.

11. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est la matrice élémentaire $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer ensuite que cette application est bijective.

12. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est la matrice élémentaire $S_{13}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer ensuite que cette application est bijective.

13. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) & \mapsto & (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4\,;x_2 + 3x_4) \end{array}$

Parmi les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants, quels sont ceux qui appartiennent au noyau de f ?

$a = (-1\,;0\,;1\,;0)$, $b = (0\,;0\,;0\,;0)$, $c = (0\,;-2\,;-7\,;1)$,
$d = (-7\,;-3\,;0\,;1)$, $e = (6\,;3\,;1\,;-1)$.

14. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (2x_1 + 3x_2 + 2x_3\,;x_2 + x_3\,;2x_1 - x_3) \end{array}$

a) Les vecteurs suivants appartiennent-ils à l'image de f ?
$a = (8\,;1\,;7)$, $b = (0\,;0\,;0)$, $c = (0\,;1\,;0)$, $d = (5\,;3\,;-4)$.

b) À quelles conditions un élément $(y_1\,;y_2\,;y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à l'image de f ?

c) Déterminer le noyau de f.

15. Déterminer l'image et le noyau des applications linéaires de l'exercice 5 et vérifier l'égalité du théorème du rang.

16. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la dérivation $h\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ définie par $h(f) = f'$ est une application linéaire et déterminer son noyau.

b) Montrer que $h\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ définie par $h(f) = f' - 3f$ est une application linéaire et déterminer son noyau.

17. On note $\mathcal{C}\big([a\,;b]\big)$ l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathcal{F}\big([a\,;b]\big)$ l'espace des fonctions définies sur cet intervalle. Montrer que l'application $h\colon \mathcal{C}\big([a\,;b]\big) \to \mathcal{F}\big([a\,;b]\big)$ telle que $h\colon f \mapsto P$, où la fonction P est définie par $P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a\,;b]$ (P est une primitive de f), est linéaire. Déterminer le noyau de h.

18. a) On considère une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$. Quelles peuvent être les dimensions du noyau et de l'image de f ?

b) Même question pour $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$.

19. On considère deux espaces vectoriels E et F et une application linéaire f de E vers F. On note G un sous-espace vectoriel de E. L'**image du sous-espace vectoriel** G est l'ensemble, noté $f(G)$, des images de tous les éléments de G.

$$f(G) = \{f(x) \in F \mid x \in G\}$$

Montrer que $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

20. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (3x_1 - x_2\,;0) \end{array}$

Déterminer l'image par f des sous-espaces vectoriels $U = L\big((1\,;-4)\big)$ et $V = L\big((1\,;3)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

21. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2) \end{array}$

Déterminer l'image par f des sous-espaces vectoriels $U = L\big((1\,;-2\,;1)\big)$, $V = L\big((-2\,;1\,;2)\big)$ et $W = L\big((1\,;-2\,;1),(-2\,;1\,;2)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

22. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2) \end{array}$

a) Déterminer le noyau de f.

b) Trouver l'image par f du sous-espace vectoriel $G = L\big((1\,;-2\,;1)\big)$.

23. a) Déterminer, lorsque cela a un sens, la matrice relativement aux bases canoniques de la somme de deux applications linéaires choisies dans la donnée de l'exercice 5.

b) On considère l'application f de l'exercice 5. Déterminer, parmi les autres applications du même exercice, celles qui peuvent être composées avec f. Calculer, dans ces cas, la matrice de la composée.

24. On considère les applications linéaires suivantes.

$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (-x_1 + 2x_2\,;2x_1 - 3x_2 - x_3) \end{array}$

$g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (3x_1 - x_2 - 5x_3\,;-6x_1 + x_2 + 11x_3) \end{array}$

$h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (-2x_1 + x_2 - x_3\,;3x_1 + x_3) \end{array}$

$j\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (x_1 - 3x_2\,;-2x_1 + x_2\,;-x_2) \end{array}$

Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leurs bases canoniques.

a) Déterminer $f+g$, écrire sa matrice et vérifier qu'elle est égale à la somme des matrices de f et de g.

b) Déterminer $f \circ j$, écrire sa matrice et vérifier qu'elle est égale au produit des matrices de f et de j.

c) Déduire des matrices de f, g, h et j celles des applications linéaires $3f - g + 4h$, $g \circ j$, $j \circ g$ et $(f+g) \circ j$.

25. On considère deux applications linéaires f et g de E vers F et une application linéaire h de F vers G. En utilisant la propriété

$$h \circ (f+g) = (h \circ f) + (h \circ g)$$

montrer que la multiplication matricielle est distributive relativement à l'addition.

26. a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}(E,F)$ de toutes les applications linéaires de E vers F, muni de l'addition des applications et de la multiplication d'une application par un réel, est un espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\big(\mathrm{Hom}(E,F)\,;\,+\,;\,\cdot\,\big)$ si E et F sont respectivement de dimension n et m ?

Indication : Montrer que $\mathrm{Hom}(E,F)$ *est isomorphe à* $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Réponses aux exercices du chapitre 3

1. L'application f est linéaire pour les exercices a), c), g), h) et j).

2. a) $h(x) = (2x_1 + x_2)e'_1 + (-4x_1 + 3x_2)e'_2 + (5x_1 - 4x_2)e'_3$

b) La matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
celles de $h(e_1)$, $h(e_2)$ et $h(x)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ sont
$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -4x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$.

3. b) f est linéaire, g n'est pas linéaire

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. a) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (-2x_1 + x_2\,;3x_1\,;4x_1 - 2x_2)$

b) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4\,;x_5)\big) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4\,;3x_1 + x_3 + 7x_4 + 2x_5)$

c) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (2x_1 + x_2\,;3x_1)$

7. La matrice de l'application nulle est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de l'application identité est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $J = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 + 1 & -\cos(x_3) & 0 \\ \sqrt{x_3} & 0 & \dfrac{x_1}{2\sqrt{x_3}} & -\dfrac{1}{x_4^2} \end{pmatrix}$

9. a) La matrice jacobienne $J(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ est la matrice-colonne du vecteur tangent à la courbe.

b) La différentielle est l'application $df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est définie par

$$df(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ h \end{pmatrix} \text{ pour } t = 0 \quad \text{et} \quad df(h) = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \text{ pour } t = \tfrac{\pi}{2}.$$

10. $f(x\,;y\,;z) \approx (16 - 2x + 4y\,;8 - x + 2y + 6z)$
$f(4.02\,;0.03\,;0.99) = (8.0782\,;9.9803)$ valeur exacte
$f(4.02\,;0.03\,;0.99) \approx (8.08\,;9.98)$ valeur approximative

11. $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (x_2\,;x_1)$

12. $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 - 4x_3\,;x_2\,;x_3)$

13. $a, b, d, e \in \operatorname{Ker}(f)$

14. a) $b, d \in \operatorname{Im}(f), a, c \notin \operatorname{Im}(f)$

b) $(y_1\,;y_2\,;y_3) \in \mathrm{Im}(f) \iff y_1 - 3y_2 - y_3 = 0$

c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2\,;2)\big)$

15. $\mathrm{Ker}(a) = L\big((1\,;2)\big)$ et $\mathrm{Im}(a) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Ker}(b) = L\big((1\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(b) = L\big((1\,;0)\big)$
$\mathrm{Ker}(c) = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(c) = L\big((1\,;-2)\big)$
$\mathrm{Ker}(d) = L\big((2\,;1\,;0),(0\,;0\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(d) = L\big((1\,;-3)\big)$
$\mathrm{Ker}(e) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(e) = L\big((1\,;2\,;-3)\big)$
$\mathrm{Ker}(f) = \{(0\,;0)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;-2\,;0),(-3\,;1\,;-1)\big)$
$\mathrm{Ker}(g) = L\big((17\,;7\,;-2)\big)$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$
$\mathrm{Ker}(h) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(h) = \{0\}$

16. a) Le noyau de h est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

b) Le noyau de h est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ du type $f(x) = ke^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

17. Le noyau de h ne contient que la fonction nulle.

18. a) Les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ peuvent être respectivement 3 et 0 (application nulle), 2 et 1, ou 1 et 2.

b) Les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ peuvent être respectivement 3 et 0 (application nulle), 2 et 1, 1 et 2, ou 0 et 3 (application injective).

20. $f(U) = L\big((7\,;0)\big)$ et $f(V) = \big\{(0\,;0)\big\}$

21. $f(U) = L\big((-3\,;5)\big)$, $f(V) = \big\{(0;0)\big\}$ et $f(W) = f(U)$

22. a) Le noyau de f est $L\big((-2\,;1\,;2)\big)$.

b) $f(G) = L\big((-3\,;5)\big)$

23. a) La somme n'a un sens que pour les applications c, d et g.

$C + D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $C + G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et

$D + G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Compositions possibles : $f \circ b, f \circ c, c \circ f, f \circ d, d \circ f, f \circ g$ et $h \circ f$ de matrices respectivement

$F{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F{\cdot}C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C{\cdot}F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$F \cdot D = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}, D \cdot F = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix},$$
$$F \cdot G = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -7 \\ 4 & -10 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } H \cdot F = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24. Les matrices de f, g, h, j sont respectivement $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $f+g\colon \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (2x_1 + x_2 - 5x_3\,; -4x_1 - 2x_2 + 10x_3)$
est de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ qui vaut bien $F+G$.

b) $f \circ j\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x_1\,;x_2) \mapsto (-5x_1 + 5x_2\,; 8x_1 - 8x_2)$
est de matrice $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ qui vaut bien $F \cdot J$.

c) La matrice de $3f-g+4h$ vaut $3F-G+4H = \begin{pmatrix} -14 & 11 & 1 \\ 24 & -10 & -10 \end{pmatrix}$,
la matrice de $g \circ j$ vaut $G \cdot J = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$,
la matrice de $j \circ g$ vaut $J \cdot G = \begin{pmatrix} 21 & -4 & -38 \\ -12 & 3 & 21 \\ 6 & -1 & -11 \end{pmatrix}$
et la matrice de $(f+g) \circ j$ vaut $(F+G) \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Si A, B et C sont les matrices associées respectivement à f, g et h, alors la matrice associée à $h \circ (f+g)$ est $C \cdot (A+B)$ et celle associée à $(h \circ f) + (h \circ g)$ est $C \cdot A + C \cdot B$.

26. b) L'espace des homomorphismes de E vers F est de dimension nm.

4 Endomorphismes

4.1 Définition

On considère un espace vectoriel E. Un **endomorphisme**[1] de E est une application linéaire de E vers E. Un endomorphisme de E est aussi appelé **transformation linéaire** de E.

Si E est de dimension n, alors la matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple 1. *L'application définie par* $f\big((x\,;y)\big) = (y\,;x)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$*. En effet, cette application est linéaire et elle est définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemple 2. *L'application définie par* $f\big((x\,;y\,;z)\big) = (y+z\,;x+z\,;x+y)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$*. Sa matrice relativement à la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3. *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_3$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et la base* $\mathcal{B} = (1\,;x\,;x^2\,;x^3)$*. L'application qui associe à chaque fonction polynôme sa fonction dérivée est un endomorphisme de* $\mathbb{P}_3$*, sa matrice relativement à la base* $\mathcal{B}$ *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] Le mot *endomorphisme* vient du grec *endon* (en dedans) et *morphê* (forme).

4.2 Endomorphisme bijectif

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.

Si f est bijectif, alors sa réciproque ${}^r\!f$ est aussi un endomorphisme bijectif de E. On a alors $f \circ {}^r\!f = {}^r\!f \circ f = \mathrm{id}_E$. Un endomorphisme bijectif de E est parfois appelé un **automorphisme**[2] de E.

Exemple 1. *L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\big((x\,;y)\big) = (-y\,;x)$ est bijectif; sa réciproque est l'endomorphisme ${}^r\!f\big((x\,;y)\big) = (y\,;-x)$.*

On considère f et g, deux endomorphismes bijectifs de E. L'endomorphisme $g \circ f$ est bijectif et ${}^r(g \circ f) = {}^r\!f \circ {}^r\!g$.

Théorème 1. Si f est un endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$, alors la matrice A de f, relativement à la base $\mathcal{B}$, est une matrice inversible. La matrice de ${}^r\!f$ est A^{-1}.

Exemple 2. *L'endomorphisme bijectif f, de l'exemple 1 ci-dessus, et sa réciproque ${}^r\!f$ de $\mathbb{R}^2$, ont respectivement pour matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique.*

Théorème 2. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dans lequel on a choisi une base $\mathcal{B}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'endomorphisme f est bijectif.
2. La matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ est inversible.
3. Les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ forment une base de E.
4. L'endomorphisme f est injectif.
5. L'endomorphisme f est surjectif.
6. La dimension du noyau de f est zéro.
7. La dimension de l'image de f est égale à la dimension de E.

Exemple 3. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique. On observe que le déterminant de A est différent de zéro. L'endomorphisme f est donc bijectif et la matrice de ${}^r\!f$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.*

---

[2] Le mot *automorphisme* vient du grec *autos* (soi-même) et *morphê* (forme).

4.3 Matrice de changement de base

Exemple 1. *Dans $\mathbb{R}^2$, on choisit la base canonique $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2)$ et une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1 ; e'_2)$ avec $e'_1 = e_1 + 2e_2$ et $e'_2 = 3e_1 + 4e_2$.*
On considère le vecteur $v = (16 ; 18)$. La matrice-colonne associée à v relativement à la base $\mathcal{B}$ est notée X ; la matrice-colonne associée à v relativement à la base $\mathcal{B}'$ est notée X'.
Par définition, on a $X = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix}$. On pose $X' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
On a alors

$$\begin{aligned} v &= 16e_1 + 18e_2 \\ &= \alpha e'_1 + \beta e'_2 \\ &= \alpha(e_1 + 2e_2) + \beta(3e_1 + 4e_2) \\ &= (\alpha + 3\beta)e_1 + (2\alpha + 4\beta)e_2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On obtient alors $X = P \cdot X'$.
La matrice P est inversible car son déterminant n'est pas nul ; elle admet une matrice inverse, $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve alors la matrice-colonne X' associée au vecteur v.

$$X' = P^{-1} \cdot X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\mathcal{B}'$, le vecteur v s'exprime sous la forme $v = -5e'_1 + 7e'_2$.

On considère un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n)$. On cherche souvent une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1 ; e'_2 ; \ldots ; e'_n)$ de E, mieux adaptée à un problème donné (voir exemple 4, page 102). On écrit d'abord les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n \\ \boxed{e'_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n} \\ \qquad\vdots \\ e'_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

On regroupe ces données dans une matrice P dont les colonnes sont les *matrices-colonne associées aux vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$.*

$$P = \left(\begin{array}{c|c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right)$$

Cette matrice est appelée **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ et une autre base $\mathcal{B}' = (e_1'\,;e_2'\,;e_3')$ avec $e_1' = e_1+e_2$, $e_2' = e_1+e_3$ et $e_3' = e_2+e_3$.*
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice associée à l'endomorphisme identité

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

relativement à une même base dans l'ensemble de départ et dans l'ensemble d'arrivée est la matrice unité d'ordre n. En revanche, la matrice associée à l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (prises dans cet ordre!) est la matrice de passage P. En effet, les images des vecteurs e_i' de $\mathcal{B}'$ sont ces mêmes vecteurs e_i', exprimés relativement à la base $\mathcal{B}$; ils forment les colonnes de la matrice P.

Si l'on note X et X' les matrices d'un même vecteur v relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, l'égalité $\mathrm{id}_E(v) = v$ devient

$$X = P \cdot X'$$

Comme l'identité est une application bijective, la matrice P est inversible et l'on peut écrire

$$X' = P^{-1} \cdot X$$

Cette formule permet de calculer les composantes du vecteur v dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

Exemple 3. *En reprenant la matrice de l'exemple précédent, on trouve*

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice-colonne associée à $v = (-2\,;6\,;4)$ *relativement à la base canonique* $\mathcal{B}$ *est* $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. *La matrice-colonne associée à ce même vecteur* v*, relativement à la base* $\mathcal{B}'$ *est*

$$X' = P^{-1} \cdot X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

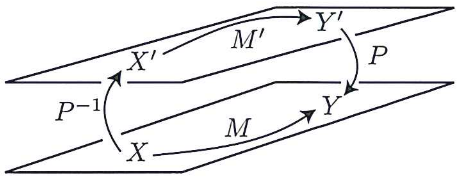
Ainsi $v = -2e_2' + 6e_3'$

Théorème 3. Si M et M' sont les matrices associées à un endomorphisme f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors on a

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$$

et

$$M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$$



Démonstration. On note X et X' les matrices-colonne associées à un vecteur quelconque v de E relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. De même, on note Y et Y' les matrices-colonne associées au vecteur $f(v)$ de E relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. En écriture matricielle, on obtient les égalités $Y = M \cdot X$, relativement à la base $\mathcal{B}$ et $Y' = M' \cdot X'$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Or $Y = P \cdot Y'$ et $X = P \cdot X'$. Ainsi

$$P \cdot Y' = M \cdot (P \cdot X')$$

On multiplie à gauche les deux membres de l'égalité par P^{-1} et on obtient

$$P^{-1} \cdot (P \cdot Y') = P^{-1} \cdot \big(M \cdot (P \cdot X')\big)$$

En vertu de l'associativité de la multiplication des matrices, on a

$$Y' = \big(P^{-1} \cdot M \cdot P\big) \cdot X'$$

On en déduit l'égalité $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

En multipliant la dernière égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}, on trouve $P \cdot M' \cdot P^{-1} = M$. □

Déterminant et trace d'un endomorphisme

La **trace d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ est la somme des éléments de la diagonale.

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Théorème 4. Si M et M' sont les matrices d'un même endomorphisme f relativement à deux bases de E, alors

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(M') \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M')$$

Démonstration. Comme $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$ et $\mathrm{Det}(P)\,\mathrm{Det}(P^{-1}) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(M') &= \mathrm{Det}(P^{-1} \cdot M \cdot P) \\
&= \mathrm{Det}(P^{-1})\,\mathrm{Det}(M)\,\mathrm{Det}(P) \\
&= \mathrm{Det}(M)\,\mathrm{Det}(P^{-1})\,\mathrm{Det}(P) \\
&= \mathrm{Det}(M)
\end{aligned}$$

Pour la trace, on démontre d'abord que $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$, lorsque A et B sont deux matrices carrées de même ordre (voir exercice 21, page 120).

Comme $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(M') &= \mathrm{Tr}(P^{-1} \cdot M \cdot P) \\
&= \mathrm{Tr}(M \cdot P \cdot P^{-1}) \\
&= \mathrm{Tr}(M)
\end{aligned}$$

□

Toutes les représentations matricielles de f ont le même déterminant, appelé **déterminant de l'endomorphisme** f et noté $\mathrm{Det}(f)$.

Toutes les représentations matricielles de f ont la même trace, appelée **trace de l'endomorphisme** f et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

Exemple 4. *On considère un espace vectoriel E de dimension 3 et deux bases $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1\,;e'_2\,;e'_3)$ avec $e'_1 = e_1+e_2-e_3$, $e'_2 = e_1-e_2$ et $e'_3 = e_2 + e_3$.*

On considère un endomorphisme f défini par sa matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -9 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $\mathcal{B}$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *sa matrice inverse. La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est*

$$\begin{aligned} M' &= P^{-1} \cdot M \cdot P \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -9 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut vérifier que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M') = 0$.

Le choix judicieux de la base permet de simplifier les calculs.

a) $\mathrm{Det}(f) = \mathrm{Det}(M') = -6$.

b) La matrice de $f^2 = f \circ f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ est

$$M' \cdot M' = (M')^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

c) La matrice N' de la réciproque de f, relativement à la base $\mathcal{B}'$, est

$$N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice N de la réciproque de f, relativement à la base $\mathcal{B}$, est

$$N = P \cdot N' \cdot P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ -2 & 7 & -13 \\ -8 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Cet exemple montre l'intérêt de trouver, pour un endomorphisme f donné, une base relativement à laquelle la matrice de f est la plus simple possible. La recherche d'une telle base est présentée dans le paragraphe suivant.

4.4 Valeurs et vecteurs propres

Exemple 1. *On reprend l'exemple 9 du paragraphe 1.3 (page 13), concernant la migration de population, modélisée par la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

On se demande quelle est la répartition de la population qui reste stable au cours de dix ans. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *la matrice-colonne donnant le nombre d'habitants* x *dans les villes et* y *à la campagne. Si la répartition reste stable, on a* $P \cdot X = X$.
On est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 0.95x & + & 0.1y & = & x \\ 0.05x & + & 0.9y & = & y \end{cases}$$

Ce système est indéterminé et son ensemble-solution est l'espace engendré par le vecteur $(2\,;1)$. *Dans ce modèle, toute répartition de population où le nombre d'habitants en ville est le double de celui de la campagne est stable. Par exemple, si la population des villes s'élève à 6 millions et celle de la campagne à 3 millions, les départs sont compensés par les arrivées. On a ainsi,* $\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. *On dit que le nombre 1 est une valeur propre de la matrice* P *et que* $(2\,;1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.*

Étant donné un endomorphisme f, on cherche un réel λ et un vecteur non nul v tels que

$$\boxed{f(v) = \lambda v}$$

On appelle **valeur propre** de l'endomorphisme f de E, tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur non nul v de E vérifiant $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f, on appelle **vecteur propre** de l'endomorphisme f de E, associé à la valeur propre λ, tout vecteur v de E tel que $f(v) = \lambda v$.

On peut montrer que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$.

Exemple 2. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *donné par sa matrice* $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *relativement à la base canonique. Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres de cet endomorphisme, on résout l'équation* $f\big((x\,;y)\big) = \lambda(x\,;y)$.

On écrit cette équation sous forme matricielle, $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

ou encore sous forme d'un système linéaire, $\begin{cases} -3x & - & 4y & = & \lambda x \\ 2x & + & 3y & = & \lambda y \end{cases}$.

On obtient alors le système $\begin{cases} (-3-\lambda)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$.

Ce système admet une solution autre que $(0\,;0)$ *si et seulement si son déteminant est nul. Or* $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$.
L'endomorphisme f *admet donc deux valeurs propres* 1 *et* -1.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, *on résout le système* $\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-3-1)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & (3-1)y & = & 0 \end{array} \right.$.
Le vecteur $(1\,;-1)$ *est l'une des solutions du système, il est l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre* 1. *Le sous-espace propre associé à la valeur propre* 1 *est* $E_1 = \{\alpha(1\,;-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((1\,;-1)\big)$.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, *on résout le système* $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \big(-3-(-1)\big)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & \big(3-(-1)\big)y & = & 0 \end{array} \right.$.
Le vecteur $(-2\,;1)$ *est l'une des solutions du système, il est l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre* -1. *Le sous-espace propre associé à la valeur propre* -1 *est* $E_{-1} = \{\alpha(-2\,;1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((-2\,;1)\big)$.

Dans la base $\mathcal{B}' = \big((1\,;-1)\,;(-2\,;1)\big)$, *la matrice de* f *est* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On a ainsi trouvé une base dans laquelle la matrice de f *est une matrice diagonale.*

Équation caractéristique

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n. Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres de f, on est amené à résoudre l'équation $f(v) = \lambda v$.

Si id_E est l'endomorphisme identité de E, alors $\mathrm{id}_E(v) = v$. L'équation précédente peut alors s'écrire $f(v) = \lambda\,\mathrm{id}_E(v)$ ou encore $f(v) - \lambda\,\mathrm{id}_E(v) = o$ et finalement

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(v) = o$$

Si l'équation $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(v) = o$ admet des solutions non triviales, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{o\}$. L'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est donc pas bijectif. On en déduit que les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation suivante, appelée **équation caractéristique** de f.

$$\mathrm{Det}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) = 0$$

Comme vu précédemment (voir page 102), cette équation est indépendante de la base dans laquelle on exprime la matrice de f.

Pour chaque valeur propre λ de f trouvée, on détermine le sous-espace propre associé E_λ. Celui-ci est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda\ \mathrm{id}_E$.

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)$$

Exemple 3. *Un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ est défini par sa matrice relativement à la base canonique,* $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer les valeurs propres de h, on résout l'équation caractéristique $\mathrm{Det}(h - \lambda\ \mathrm{id}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 4 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 5 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 16)$$

Les valeurs propres de h sont 6, -4 *et* 4.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 6 *est le noyau de* $h - 6\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(0\,;1\,;-1)$. *Le sous-espace associé à la valeur propre* 6 *est la droite vectorielle*

$$E_6 = \{\alpha(0\,;1\,;-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((0\,;1\,;-1)\big)$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -4 *est le noyau de* $h+4\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 9 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(1\,;0\,;-1)$. *Le sous-espace associé à la valeur propre* -4 *est la droite vectorielle*

$$E_{-4} = L\big((1\,;0\,;-1)\big)$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 *est le noyau de* $h - 4\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(1\,;1\,;0)$. *Le sous-espace associé à la valeur propre* 4 *est la droite vectorielle*

$$E_4 = L\big((1\,;1\,;0)\big)$$

Les vecteurs propres $(0\,;1\,;-1)$, $(1\,;0\,;-1)$ *et* $(1\,;1\,;0)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$. *Dans cette base, la matrice de* h *est* $M' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriétés

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. L'endomorphisme f admet une valeur propre nulle si et seulement si f n'est pas bijectif. Dans ce cas, $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Si l'endomorphisme f admet 1 comme valeur propre, alors l'espace propre associé est l'ensemble des vecteurs invariants par f.
3. L'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres.
4. Si f admet k valeurs propres distinctes, alors il existe au moins k vecteurs propres linéairement indépendants.
5. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors en prenant un vecteur propre associé à chaque valeur propre, on forme une base de E.
6. Si la matrice de f est une matrice triangulaire, alors les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de f.

Démonstration de la propriété 4. Si l'endomorphisme f admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, alors il existe deux vecteurs propres v_1 et v_2 tels que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Si les vecteurs v_1 et v_2 étaient colinéaires, on aurait $v_2 = \alpha v_1$ et $f(v_2) = f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha(\lambda_1 v_1) = \lambda_1(\alpha v_1) = \lambda_1 v_2$. On en déduirait que $\lambda_1 = \lambda_2$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. On a ainsi montré qu'à deux valeurs propres distinctes sont associés deux vecteurs propres linéairement indépendants. $\square$

Diagonalisation d'une matrice

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n.

Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E telle que la matrice D de f relative à cette base est une matrice diagonale.

Si f est un endomorphisme qui admet n vecteurs propres formant une base de E, alors f est diagonalisable. Les valeurs propres de f ne sont pas nécessairement distinctes.

Exemple 4. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique. Son équation caractéristique, $\lambda^2 - 5\lambda - 50 = 0$, admet deux solutions distinctes, $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = 10$. Les vecteurs propres associés, $v_1 = (1\,;2)$ et $v_2 = (-2\,;1)$, sont linéairement indépendants et forment une base $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. La matrice de l'endomorphisme f, relativement à cette base, est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.*

Exemple 5. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique. Pour calculer la matrice de $f^{10} = f \circ f \circ \ldots \circ f$, il est avantageux de diagonaliser la matrice de f. En effet, le calcul direct de la matrice de f^{10} est très long. Or $A^{10} = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$ où D est la matrice diagonale de f et P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres. Pour diagonaliser f, on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés. L'équation caractéristique de l'endomorphisme f est $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$, elle admet deux solutions distinctes, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$. Le noyau de f est de dimension 2 ; on en déduit qu'il existe deux vecteurs propres, $v_1 = (1\,;1\,;0)$ et $v_2 = (0\,;2\,;1)$, linéairement indépendants associés à la valeur propre 0. On note $v_3 = (1\,;1\,;1)$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. Relativement à la base $(v_1\,;v_2\,;v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On écrit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on détermine sa matrice inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis on obtient la matrice de f^{10} relativement à la base canonique.*

$$\begin{aligned} A^{10} &= P \cdot D^{10} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.5 Exemples de modélisation

Matrices de transition

Exemple 1. *Deux magazines sportifs A et B sont vendus uniquement sur abonnement annuel. On observe que chacun des deux magazines est acheté par 50% des lecteurs. La probabilité qu'un lecteur du magazine A continue à acheter le magazine A l'année suivante est de 0.8 et celle qu'il change de magazine est de 0.2. D'autre part, la probabilité qu'un lecteur du magazine B continue à acheter le magazine B est 0.7 et celle qu'il change de magazine est de 0.3. Ces données peuvent être représentées par les matrices* $E = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'année suivante, la répartition des abonnements est obtenue par $T \cdot E = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire 55% des lecteurs achètent A et 45% des lecteurs achètent B.*

Une **matrice de transition** T est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de plus la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. L'élément t_{ij} d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i. Une matrice-colonne E dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments est 1 est appelée **vecteur d'état**. Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité $T \cdot E = E$ est appelé **vecteur d'état stationnaire**. Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Les matrices de transition servent de modèle mathématique dans de nombreux domaines (biologie, chimie, économie,...).

Exemple 2. *On reprend l'exemple 1. La répartition des abonnements après deux ans s'obtient par* $T \cdot \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix} = T^2 \cdot E = \begin{pmatrix} 0.575 \\ 0.425 \end{pmatrix}$.

La matrice $T^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix}$ *est aussi une matrice de transition.*

Pour obtenir la répartition des abonnements dans cinq ans, on peut calculer T^5. Afin de simplifier les calculs, il est commode de diagonaliser T. Les valeurs propres de la matrice T sont 1 et $1/2$, les vecteurs propres associés sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *À l'aide de la matrice de changement de base* $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} T^5 &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^5 \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.5)^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6125 & 0.58125 \\ 0.3875 & 0.41875 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, on obtient $T^n = \begin{pmatrix} 0.6 + 0.4 \cdot 2^{-n} & 0.6 - 0.6 \cdot 2^{-n} \\ 0.4 - 0.4 \cdot 2^{-n} & 0.4 + 0.6 \cdot 2^{-n} \end{pmatrix}$ *pour tout entier n, ce qui prouve qu'à long terme, 60% des lecteurs choisiront le magazine A et 40% le magazine B. Cette répartition est décrite par le vecteur propre U associé à la valeur propre 1. Ce vecteur est un vecteur d'état stationnaire car il vérifie l'égalité $T \cdot U = U$.*

Propriétés

1. Si T est une matrice de transition et n est un entier naturel, alors T^n est une matrice de transition.
2. Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.
3. Toute matrice de transition admet un vecteur d'état stationnaire.

Modèles de Leontief

Modèle d'économie fermée

Une économie est fermée si tous les biens et services produits sont consommés par les producteurs de ces biens et de ces services.

Exemple 3. *On divise l'économie d'un pays en trois secteurs (voir page 8, exemple 4) : l'agriculture, l'industrie, les services. On connaît la production annuelle de chaque secteur ainsi que la répartition des productions entre les secteurs ; celle-ci est donnée par la matrice M suivante, appelée* **matrice des échanges**.

	A	I	S
A	0.3	0.2	0.2
I	0.1	0.5	0.2
S	0.6	0.3	0.6

ou encore $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} = M$

Les nombres de la première ligne indiquent que le secteur agricole utilise 30% de la production du secteur agricole, 20% de celle du industriel et 20% de celle des services. On observe que la somme des nombres de chaque colonne est égale à 1, ce qui signifie que tout ce qui est produit est utilisé par l'un des trois secteurs. Les nombres de la première colonne indiquent que 30% des produits agricoles sont utilisés par l'agriculture, 10% par l'industrie et 60% par les services. Leontief a démontré qu'il existe des

prix d'équilibre pour chaque unité de production afin que les dépenses de chaque secteur soient compensées par leurs recettes.
On note respectivement p_A, p_I, p_S les revenus totaux de l'industrie, de l'agriculture et des services. Ces revenus sont exprimés en unités monétaires (par exemple en millions de francs). On obtient ainsi que les dépenses du secteur agricole s'élèvent à

$$0.3p_A + 0.2p_I + 0.2p_S$$

Cette somme doit être égale au revenu p_A. En procédant de la même manière pour les autres secteurs, on obtient un système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 0.3p_A & + & 0.2p_I & + & 0.2p_S & = & p_A \\ 0.1p_A & + & 0.5p_I & + & 0.2p_S & = & p_I \\ 0.6p_A & + & 0.3p_I & + & 0.6p_S & = & p_S \end{array}\right.$$

Ce qui revient à chercher un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1$. En résolvant $(M - I_3) \cdot P = O$, on trouve l'espace propre $E_1 = L\big((0.424\,; 0.485\,; 1)\big)$. Les prix d'équilibre sont donnés par les vecteurs propres. Si les services produisent l'équivalent de 1 milliard de francs, l'agriculture doit produire l'équivalent de 424 millions de francs et l'industrie l'équivalent de 485 millions de francs pour obtenir l'équilibre entre les dépenses et les revenus.

Modèle d'économie ouverte

Une économie est ouverte si les biens et services sont consommés partiellement par les producteurs de ces biens et de ces services, et que le solde est vendu à d'autres consommateurs.

Exemple 4. *Les activités d'un grand groupe économique se répartissent en trois secteurs : industrie, énergie et transport. Les échanges entre les divers secteurs du groupe permettent non seulement de satisfaire aux besoins de production des divers secteurs du groupe (***demande intermédiaire***), mais encore de dégager des biens et des services destinés à d'autres consommateurs (***demande externe***). Pour produire une unité dans l'industrie, il faut 0.2 unité de produit industriel, 0.3 unité d'énergie et 0.1 unité de transport ; pour produire une unité d'énergie il faut 0.2 unité de produit industriel, 0.1 unité d'énergie et 0.1 unité de transport ; pour produire une unité de transport, il faut 0.4 unité d'industrie, 0.4 unité d'énergie et 0.1 unité de transport. Ces informations sont données dans la matrice suivante, appelée* **matrice des coefficients techniques**, *notée C.*

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

On observe, dans ce cas, que la somme des éléments de chaque colonne est inférieure à 1.

Ce groupe industriel veut vendre ses produits et ses dirigeants doivent décider de la quantité à produire pour répondre à la demande externe. Par exemple, si la demande externe s'élève à 100 unités de produits industriels, 80 unités d'énergie et 10 unités de transport, quelle doit être la production dans chaque secteur ?

On note D le vecteur demande externe et X le vecteur production. Le vecteur $C \cdot X$ est la demande intermédiaire. La production totale, qui est la somme de la demande intermédiaire et de la demande externe, vérifie l'équation de production

$$X = C \cdot X + D$$

On obtient successivement les équations matricielles suivantes.

$$\begin{aligned} X - C \cdot X &= D \\ I_3 \cdot X - C \cdot X &= D \\ (I_3 - C) \cdot X &= D \end{aligned}$$

Si la matrice $I_3 - C$ est inversible, $X = (I_3 - C)^{-1} \cdot D$.
La matrice $(I_3 - C)^{-1}$ est appelée **matrice d'impact**, *car elle permet de calculer l'impact sur la demande totale due à un changement de la demande externe D.*
Dans cet exemple,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.4 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.1 & -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.52 & 0.43 & 0.87 \\ 0.61 & 1.34 & 0.87 \\ 0.24 & 0.20 & 1.30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 \\ 177 \\ 53 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a arrondi les résultats à l'unité la plus proche. Ainsi, le groupe doit produire environ 195 unités de produits industriels, 177 unités d'énergie et 53 unités de transport.

La première colonne de la matrice d'impact $\begin{pmatrix} 1.52 & 0.43 & 0.87 \\ 0.61 & 1.34 & 0.87 \\ 0.24 & 0.20 & 1.30 \end{pmatrix}$ *donne l'augmentation de la demande totale dans chacun des trois secteurs lorsque la demande externe de produits industriels augmente d'une unité ; ainsi il faudrait produire 1.52 unité de plus dans le secteur industriel, 0.61 unité de plus dans le secteur de l'énergie et 0.24 unité de plus dans le domaine des transports. Le secteur qui a le plus d'impact est celui des transports.*

Les éléments de la matrice C des coefficients techniques sont tous positifs ou nuls. On peut démontrer que la matrice $(I_n - C)^{-1}$ existe si la somme des éléments de chaque colonne de C est strictement inférieure à 1.

Modèle de Leslie

Exemple 5. *En démographie, on étudie l'évolution d'une population à partir des taux de fécondité et de mortalité. Pour présenter un modèle simple, on exclut d'autres caractéristiques telles que la migration et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent naissance, il suffit de considérer les classes d'âge des femelles de la population.*

Dans cet exemple, on considère une population de rongeurs dont le cycle de reproduction est de 3 ans. Chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seule une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et seules 40% de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.

Si l'on écrit sous forme vectorielle $(x_1\,; x_2\,; x_3)$ *les effectifs* x_i *des femelles à l'âge* i*, l'année suivante, la répartition de cette population est donnée par le vecteur* $(6x_2 + 10x_3\,; 0.5x_1\,; 0.4x_2)$ *qui peut s'écrire sous forme matricielle par*

$$\begin{pmatrix} 6x_2 + 10x_3 \\ 0.5x_1 \\ 0.4x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $Y = L \cdot X$ *fournit les effectifs des femelles de chaque classe d'âge après une année. Pour* $(10\,; 0\,; 0)$ *par exemple, on trouve successivement*

an	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_1	10	0	30	20	90	120	310	540	1170	2240	...
x_2	0	5	0	15	10	45	60	155	270	585	...
x_3	0	0	2	0	6	4	18	24	62	108	...

La matrice L *possède deux valeurs propres* 2 *et* -1*. On vérifie immédiatement que* $(20\,; 5\,; 1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 2*. Si une population est répartie en classes d'âge dans les rapports* $20 : 5 : 1$*, alors ses effectifs sont doublés chaque année. Le vecteur propre* $(10\,; -5\,; 2)$ *associé à la valeur propre* -1 *n'a pas de signification en termes d'effectifs.*

Plus généralement, on appelle **matrice de Leslie**[3], une matrice carrée de la forme

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui modélise la dynamique d'une population structurée en n classes d'âge. La première ligne contient les coefficients (positifs) de fertilité f_i de la classe d'âge i et les éléments p_i sous la diagonale indiquent les probabilités (ou taux) de survie de la classe d'âge i à la suivante.

On peut démontrer que si λ est la plus grande valeur propre de L, alors toute répartition initiale de la population possède un comportement asymptotique où les effectifs de toutes les classes sont multipliés par λ. Une telle **valeur propre dominante** n'existe cependant pas toujours.

Chiffre de Hill

Le chiffre de Hill[4] est une méthode de cryptographie, la science qui cherche à assurer la confidentialité d'un message lors de sa transmission. On attribue d'abord à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier ($A \to 0, B \to 1, C \to 2, \dots, Z \to 25$). Le message ainsi transformé est subdivisé en blocs de $n = 3$ nombres, considérés comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ exprimés en base canonique. Ainsi, le texte VIVE LA VIE est transformé successivement en

$$(21\,;8\,;21\,;4\,;11\,;0\,;21\,;8\,;4) \text{ puis } X = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La clé (secrète) de l'algorithme est donnée par une matrice A qui transforme ces vecteurs en prenant les restes de la division entière par 26.

Avec $A = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{pmatrix}$, on trouve $A \cdot X = \begin{pmatrix} 339 \\ 611 \\ 871 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \bmod 26$,
$A \cdot Y = \begin{pmatrix} 288 \\ 228 \\ 267 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} \bmod 26$ et $A \cdot Z = \begin{pmatrix} 322 \\ 441 \\ 616 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} \bmod 26$.

[3] Patrick Leslie, mathématicien anglais, 1900–1974
[4] Lester Hill, mathématicien américain, 1891–1961

Le message crypté est

$$(1\,;13\,;13\,;2\,;20\,;7\,;10\,;25\,;18) \text{ c'est-à-dire BNNCUHKZS}$$

Pour décrypter ce message, le récepteur applique la même méthode, mais en utilisant la matrice inverse $A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ mod 26.

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}, \; A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarque. Le choix de la matrice A nécessite quelques précautions. En effet, par le calcul *modulo* 26, la transformation considérée n'est pas bijective si $\mathrm{Det}(A)$ n'est pas premier avec 26.

4.6 Exercices

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\big((1\,;0)\big) = (2\,;3)$ et $f\big((0\,;1)\big) = (5\,;7)$. Déterminer l'image $f\big((x\,;y)\big)$ d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

2. Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a) $f : (x\,;y) \mapsto (x\,;xy)$

b) $f : (x\,;y) \mapsto (x^2\,;0)$

c) $f : (x\,;y) \mapsto (x+1\,;y)$

d) $f : (x\,;y) \mapsto (x-y\,;2x+4y)$

3. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions suivantes ? Si oui, écrire sa matrice relativement à la base canonique.

a) $f\big((3\,;1)\big) = (-3\,;-1)$ et $f\big((-3\,;-1)\big) = (1;1)$

b) $f\big((3\,;1)\big) = (-3\,;-1)$ et $f\big((-1\,;3)\big) = (1\,;7)$

c) $f\big((3\,;3)\big) = (3\,;3)$ et $f\big((3\,;-3)\big) = (0\,;0)$

4. a) Montrer que la proposition suivante est vraie. Si f est un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$ alors il existe quatre réels α, β, γ et δ tels que $f\big((x\,;y)\big) = (\alpha x + \gamma y\,;\beta x + \delta y)$.

b) Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

5. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?
Déterminer les matrices des endomorphismes relativement à la base $\mathcal{B}$.
Déterminer les endomorphismes bijectifs et les matrices de leurs réciproques relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) $f : u \mapsto -2u$ b) $f : u \mapsto u + e_1$

c) $f : u \mapsto ye_1 - xe_2$ d) $f : u \mapsto (-2y-3x)e_1 + (x+y)e_2$

e) $f : u \mapsto 2e_1 - 3e_2$ f) $f : u \mapsto (1+y)e_2$

6. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$?
Déterminer les matrices des endomorphismes relativement à la base $\mathcal{B}$.
Déterminer les endomorphismes bijectifs et les matrices de leurs réciproques relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) $f : u \mapsto -2xe_1$ b) $f : u \mapsto 0e_1 + xe_2 + (x+y+z)e_3$

c) $f : u \mapsto ye_1 - xe_2$ d) $f : u \mapsto (-2y-3x)e_1 + (x-z)e_2 + (3z)e_3$

e) $f : u \mapsto (x+y+z)$ f) $f : u \mapsto 2e_1 + e_2 - e_3$

7. On donne les matrices M_f, M_g, M_h et M_k des endomorphismes f, g, h et k de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, M_h = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices des endomorphismes suivants.

a) $-2f + 3g$ b) $g - k$ c) $f \circ h$ d) $f^2 = f \circ f$
e) g^2 f) k^2 g) $g \circ h$ h) $h \circ g$

8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice relativement à la base canonique, $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) L'endomorphisme f est-il bijectif?

b) Calculer $A \cdot A$.

c) On pose $B = A - I_2$ et $C = A + I_2$. Calculer $B \cdot C$.

d) Déduire que les endomorphismes $f - \mathrm{id}$ et $f + \mathrm{id}$ sont bijectifs et déterminer leurs réciproques.

9. On considère un endomorphisme f de E tel que $f^2 = k_o$ où k_o est l'endomorphisme nul défini par $k_o(u) = o$ pour tout vecteur u de E.

a) L'endomorphisme f est-il bijectif?

b) Calculer $(f - \mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id})$

c) En déduire que $(f - \mathrm{id})$ et $(f + \mathrm{id})$ sont bijectifs et déterminer leurs réciproques.

10. On considère un espace vectoriel E. On note k_o l'endomorphisme nul défini par $k_o(u) = o$, pour tout u de E. Démontrer les propriétés suivantes pour deux endomorphismes f et g de E.

a) Si $g \circ f = k_o$, alors g n'est pas bijectif ou f n'est pas bijectif.

b) $g \circ f = k_o \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

11. Déterminer l'image et le noyau des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants définis par leurs matrices relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ ($a \in \mathbb{R}$).

a) $M = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

12. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice M relativement à la base canonique et μ un nombre réel. Pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est-elle pas bijective ? Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ dans chacun de ces cas.

a) $M = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} \mu - 1 & 2 \\ \mu & 3 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} \mu^2 & \mu \\ 2\mu & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} \mu - 1 & 2 \\ \mu - 1 & \mu + 1 \end{pmatrix}$

13. Déterminer l'image et le noyau des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs matrices relativement à la base canonique.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice M relativement à la base canonique et μ un nombre réel. Pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est-elle pas bijective ? Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ dans chacun de ces cas.

a) $M = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} \mu & -2 & -1 \\ -2 & \mu & 0 \\ 3 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & \mu & 1 \\ \mu & -1 & -2 \\ 1 & \mu & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -\mu & -2 \\ \mu & -2 & 1 \\ -3 & 3 & \mu \end{pmatrix}$

15. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1\,;e_2)$, on considère quatre vecteurs

$$a_1 = 2e_1 + e_2, a_2 = 5e_1 + 3e_2, b_1 = 7e_1 + 2e_2 \text{ et } b_2 = 4e_1 + e_2$$

Après avoir vérifié que $\mathcal{B}_1 = (a_1\,;a_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (b_1\,;b_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$, établir les matrices de passage

a) de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$ b) de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_0$
c) de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$ d) de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_0$
e) de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ f) de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

Puis établir la matrice-colonne associée au vecteur $u = (3\,;4)$ relativement à chacune des trois bases.

16. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère quatre vecteurs $a_1 = (-5\,;1)$, $a_2 = (-2\,;2)$, $b_1 = (-1\,;-3)$ et $b_2 = (5\,;7)$. On pose $\mathcal{B}_1 = (a_1\,;a_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (b_1\,;b_2)$.

a) Établir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

b) Établir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

c) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}_1$ est $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne X_2 associée au même vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}_2$.

d) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}_2$ est $Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne Y_1 associée au même vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}_1$.

17. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $u = (2\,;1)$, $v = (-1\,;1)$, $s = (3\,;1)$ et $t = (2\,;\frac{1}{3})$ ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique $(e_1\,;e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices de f relativement aux bases suivantes.

a) $(e_2\,;e_1)$ b) $(e_1 + e_2\,;3e_2)$ c) $(u\,;v)$ d) $(s\,;t)$

18. On note $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ trois bases d'un espace vectoriel E, P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_3$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_3$?

19. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique $(e_1\,;e_2\,;e_3)$. On considère les vecteurs $a_1 = e_1$, $a_2 = e_1 + e_2$ et $a_3 = e_1 + e_2 + e_3$, ainsi que les vecteurs $b_1 = a_3$, $b_2 = a_2 + a_3$ et $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$. On note $\mathcal{B}_1$ la base $(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et $\mathcal{B}_2$ la base $(b_1\,;b_2\,;b_3)$.

a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$.

20. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ d'un espace vectoriel E et un endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = e_2 - e_3$ et $f(e_3) = e_3 - e_1$.

a) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) On pose $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + e_3$, $u_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1\,;u_2\,;u_3)$ est une autre base de E.

c) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. Que peut-on observer ?

21. On note A et B deux matrices carrées d'ordre 2. Démontrer la propriété $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

22. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice A relativement à la base canonique.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le nombre 2 est-il une valeur propre de f ?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Le nombre -3 est-il une valeur propre de f ?

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Le vecteur $(1\,;-1)$ est-il un vecteur propre de f ?

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $(1\,;1)$ est-il un vecteur propre de f ?

23. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres des endomorphismes h de $\mathbb{R}^2$ définis par

a) $h\big((x\,;y)\big) = (3y\,;x+2y)$

b) $h\big((x\,;y)\big) = (-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y\,;\frac{1}{4}x + y)$

24. Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h\big((x\,;y)\big) = (-y\,;x)$ n'admet aucun vecteur propre.

25. On donne des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ par leurs matrices relativement à la base canonique. Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque cela est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme et écrire la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

26. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ admet les valeurs propres 2 et -3 et les sous-espaces propres $E_2 = L\big((2\,;-1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((3\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

27. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ admet les valeurs propres 1 et 4 et les sous-espaces propres $E_1 = L\big((1\,;-1)\big)$ et $E_4 = L\big((2\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

28. On considère un endomorphisme f de E dont la matrice M relativement à une base est triangulaire. Montrer que les éléments de la diagonale de M sont les valeurs propres de f.

29. On donne des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ par leurs matrices relativement à la base canonique. Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque cela est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme et écrire la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

30. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet les valeurs propres 1, 2 et -3 et les sous-espaces propres associés $E_1 = L\big((1\,;0\,;1)\big)$, $E_2 = L\big((0\,;-1\,;1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((0\,;1\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

31. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet les valeurs propres 1 et 4 et les sous-espaces propres $E_1 = L\big((1\,;-1\,;1)\big)$ et $E_4 = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

32. Démontrer les propriétés suivantes.

a) Un endomorphisme f n'est pas bijectif si et seulement si 0 est une valeur propre de f.

b) Si f est un endomorphisme bijectif et si λ est une valeur propre de f, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de ${}^{r}\!f$.

c) Si λ est une valeur propre de f, alors λ^n est une valeur propre de f^n.

d) Si f est un endomorphisme vérifiant l'égalité $f \circ f = k_o$, où k_o est l'endomorphisme nul vérifiant $k_o(u) = o$ pour tout u de E, alors l'unique valeur propre de f est 0.

33. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a) Vérifier que $(1\,;-1)$ et $(3\,;-1)$ sont deux vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres. Calculer P^{-1}.

c) On note D la matrice de f relativement à la base des vecteurs propres. Écrire D et vérifier $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

d) Vérifier l'égalité $A^2 = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$, puis calculer A^2.

e) Calculer A^5.

34. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique. Calculer A^6, en diagonalisant la matrice A.

35. On considère l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}\,;\,+\,;\cdot)$. Les applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{C}$? Pour les endomorphismes, déterminer leurs noyaux et leurs images.

a) $f : z \mapsto z + \overline{z}$ b) $f : z \mapsto z - \overline{z}$
c) $f : z \mapsto i\,\overline{z}$ d) $f : z \mapsto (1-i)\overline{z} + (1+i)z$
e) $f : z \mapsto 1/z$ f) $f : z \mapsto (1+i)(z-i)$

36. La suite de Fibonacci[5] est définie de manière récursive par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, pour tout $n \geq 3$.
On note M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Écrire les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.

b) Calculer M^2, M^3 et M^4. Démontrer par récurrence que les éléments de la matrice M^n sont des nombres de la suite de Fibonacci.

c) Diagonaliser M, calculer M^n et en déduire la formule de Binet[6]

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

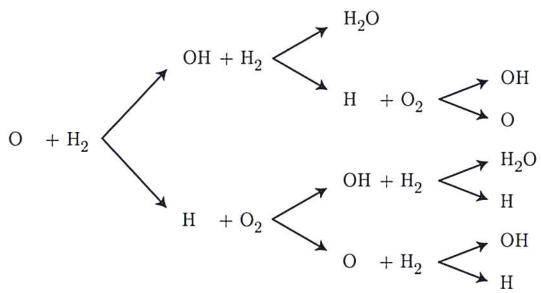
[5] Leonardo Fibonacci, mathématicien italien, 1175–1250
[6] Jacques Binet, mathématicien français, 1786–1856

37. En présence de molécules H_2 et O_2, les radicaux H, O et OH se transforment selon les réactions chimiques suivantes.

$$\begin{aligned} O + H_2 &\rightarrow OH + H \\ OH + H_2 &\rightarrow H_2O + H \\ H + O_2 &\rightarrow OH + O \end{aligned}$$

On suppose que ces trois réactions ont la même vitesse et que l'on dispose d'une quantité illimitée de dihydrogène et de dioxygène.

En partant d'un radical oxygène O, celui-ci réagit avec H_2 pour donner les radicaux OH et H. Chacun de ces radicaux réagit à son tour respectivement avec H_2 et O_2 et fournit H, OH, O et de l'eau (H_2O). À l'étape suivante, on obtient au total $2OH, 2H, 1O$ et $2H_2O$, et ainsi de suite. Voici un schéma qui représente le début de cette **réaction en chaîne.**



Le nombre total de particules de chaque type évolue en fonction du temps selon le tableau suivant.

t	0	1	2	3	...
O	1	0	1	1	
OH	0	1	1	2	
H	0	1	1	2	
H_2O	0	0	1	2	

a) Compléter dans ce tableau les colonnes $t = 4$ et $t = 5$.

b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui décrit le passage de t à $t + 1$.

c) Trouver les valeurs propres de M.

38. On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur d'état stationnaire.

39. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ est une matrice de transition. Déterminer un vecteur d'état stationnaire E. Calculer A^n.

40. Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade. Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90% le seront encore le lendemain. Parmi les enfants malades, 30% le seront encore le lendemain. Le 2 mars, 15% des enfants sont malades.

a) Trouver la matrice de transition.

b) Quel est le vecteur d'état au 2 mars, au 3 mars, au 4 mars ?

c) Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

41. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$ est une matrice de transition, puis calculer A^2 et A^3.

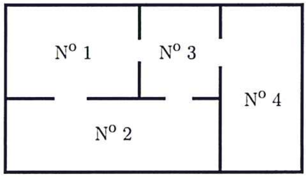
42. Déterminer un vecteur stationnaire de la matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

43. Déterminer le vecteur d'état stationnaire de l'exemple 9 du chapitre 1 (page 13).

44. Dans un village, les habitants disposent de 2 chaînes de télévision, $T1$ et $T2$. On désigne par $T3$ la télévision éteinte. Lorsqu'une personne a choisi son programme, dans 90% des cas elle ne change pas de chaîne dans les dix minutes alors que 1% des téléspectateurs de $T1$ vont zapper sur $T2$ et vice-versa et 9% des téléspectateurs vont éteindre leur poste. Dans le même laps de temps, parmi ceux qui ne regardaient pas la télévision, 9% vont se brancher sur $T1$ et 1% sur $T2$ alors que 90% n'allumeront pas leur poste. Si à 20h, 50% des habitants regardaient $T1$, 20% regardaient $T2$, combien de personnes ont leur poste éteint à 20h10 ? Quel est le vecteur d'état stationnaire ?

45. Une souris est placée dans un labyrinthe. Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard une des portes.



a) Déterminer la matrice de transition associée à cette situation.

b) La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrire le vecteur correspondant à sa position après un coup de sifflet, après deux coups de sifflet.

c) Quel est le vecteur d'état stationnaire ? Interpréter ce résultat.

46. Une économie fermée comprend deux secteurs, les biens et les services. Le secteur des biens vend 75% des biens au secteur des services et garde le reste. Le secteur des services fournit 60% de ses prestations au secteur des biens et garde le complément pour lui. Déterminer les prix d'équilibre afin que les recettes compensent les dépenses.

47. Un grand domaine d'une économie fermée est divisée en trois secteurs, la chimie, l'énergie, l'industrie. La chimie vend 25% de sa production à l'énergie, 55% à l'industrie et garde le reste. L'énergie vend 75% de sa production à la chimie, 10% à l'industrie et garde le reste. L'industrie vend 40% à la chimie, 40% à l'énergie et garde le reste.

Écrire la matrice des échanges et déterminer les prix d'équilibre qui permettent aux dépenses d'être compensées par les recettes.

48. On considère une production modélisée par l'équation $X = C \cdot X + D$. Calculer X dans chacun des cas suivants.

a) $C = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

49. Une économie ouverte est divisée en trois secteurs, l'agriculture, l'industrie et les services. La matrice des coefficients techniques est

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.0 \\ 0.6 & 0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a) Expliquer ce que signifie cette matrice.

b) Déterminer le vecteur de production totale, si la demande externe est de 100 unités dans chacun des trois secteurs.

50. Un groupe comprend trois secteurs d'activité répartis dans trois entreprises, notées E_1, E_2 et E_3. La production d'une unité dans l'entreprise E_1 requiert 0.2 unité de E_1, 0.4 unité de E_2 et 0.3 unité de E_3 ; la production d'une unité dans l'entreprise E_2 requiert 0.2 unité de E_1, 0.2 unité de E_2 et 0.1 unité de E_3 ; la production d'une unité dans l'entreprise E_3 requiert 0.1 unité de E_1, 0.1 unité de E_2 et 0.2 unité de E_3.

a) Construire la matrice des coefficients techniques.

b) Calculer la matrice d'impact.

c) La demande externe pour le prochain trimestre est de 90 unités de E_1, 100 unités de E_2 et de 200 unités de E_3. Déterminer la production totale permettant de satisfaire à cette demande externe.

d) Le vecteur production d'un trimestre a été $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$. Quelle a été la demande externe de ce trimestre ?

51. Une population de scarabées présente quatre classes d'âge d'une année chacune avec des taux de survie de respectivement 10%, 50% et 50% et une reproduction uniquement durant la quatrième année de p descendants par individu. Écrire la matrice de Leslie qui modélise la dynamique de cette population.
Quelle est la valeur minimale de p qui assure la survie de l'espèce ?
Indication : les naissances doivent compenser les pertes.

52. Un modèle de Leslie est proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individus de sexe féminin, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de 5 ans chacune. Les éléments de la première ligne de la matrice de Leslie sont

0.000 0.000 0.001 0.012 0.376 0.438 0.383 0.046 0.007 0.002

et les éléments situés sous la diagonale sont

0.996 0.998 0.997 0.996 0.996 0.994 0.992 0.990 0.983

a) Comment expliquer que les éléments de la première ligne sont croissants puis décroissants ? Un tel élément peut-il être supérieur à 1 ?

b) Pourquoi le premier coefficient de la deuxième liste est-il inférieur au suivant ?

c) Pourquoi le modèle ne tient-il pas compte des individus de plus de 50 ans ?

53. On considère un modèle de Leslie de matrice $L = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population que l'on modélise.

b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L. Donner une interprétation des résultats.

c) Diagonaliser la matrice L et calculer L^n. En déduire le comportement asymptotique de la dynamique de cette population.

54. Même exercice que le précédent avec la matrice $L = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

55. On considère une population de saumons. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles avant de mourir.

a) Écrire la matrice de Leslie L modélisant l'évolution de cette population.

b) Avec une population initiale de respectivement 1200, 1400 et 500 saumons dans chaque classe d'âge, calculer les populations au début des quatre années suivantes.

c) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de L.

d) En écrivant le vecteur de la population initiale en combinaison linéaire de trois vecteurs propres, prédire l'évolution à long terme de la population.

56. On considère une évolution d'insectes donnée par une matrice de Leslie. Déterminer, dans chaque cas, les solutions (réelles et complexes) de l'équation caractéristique et étudier le comportement asymptotique d'une population initiale répartie en 3 classes d'âge.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 24 \\ 1/36 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

57. Utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme clé pour chiffrer selon la méthode de Hill le mot ORANGE.

58. Trouver le message du cryptogramme RZM DPR IGS BOK BSI sachant qu'il est obtenu par un chiffrement de Hill de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 12 & 16 \\ 23 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Indication : pour trouver l'inverse de 21*, on cherche une solution entière de l'équation* $x \cdot 21 \equiv 1 \bmod 26$.

Réponses aux exercices du chapitre 4

1. $(2x + 5y\,; 3x + 7y)$

2. non, non, non, oui

3. non ; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. b) $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$

5. Les application (b), (e) et (f) ne sont pas des endomorphismes.

a) oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. a) oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; non bijectif b) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; non bijectif

c) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; non bijectif

d) oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -3 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Les applications (e) et (f) ne sont pas des endomorphismes.

7. a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. a) non b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) ${}^r(f - \mathrm{id}) = -(f + \mathrm{id})$ ${}^r(f + \mathrm{id}) = -(f - \mathrm{id})$

9. a) non b) $-\mathrm{id}$ c) ${}^r(f - \mathrm{id}) = -(f + \mathrm{id})$ et ${}^r(f + \mathrm{id}) = -(f - \mathrm{id})$

11. a) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((3\,;-1)\big)$; $\mathrm{Im}(f) = L\big((3\,;-1)\big)$

b) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)$; $\mathrm{Im}(f) = L\big((-4\,;3)\big)$

c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((3\,;1)\big)$; $\mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;1)\big)$

d) $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

e) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-a)\big)$; $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;2)\big)$

f) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((a\,;-1)\big)$; $\mathrm{Im}(f) = L\big((a\,;1)\big)$

12. a) $\mu = 2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;2)\big)$

ou $\mu = -2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;-2)\big)$

b) $\mu = 3$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;3)\big)$

c) $\mu = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;1)\big)$

d) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1)\big)$

13. a) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((2\,;-1\,;0)\,,(3\,;0\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$

b) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((-4\,;3\,;0)\,,(2\,;1\,;0)\big)$

c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((-1\,;1\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;5)\,,(-2\,;-3\,;-4)\big)$

d) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;-4\,;0)\,,(0\,;0\,;1)\big)$

14. a) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-1\,;0)\,,(1\,;0\,;-1)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$

$\mu = -2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;1\,;1)\,,(1\,;-2\,;1)\big)$

b) $\mu = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((0\,;1\,;2)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;-2\,;3)\,,(1\,;0\,;0)\big)$

$\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2\,;-3)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;1\,;0)\,,(-1\,;0\,;1)\big)$

$\mu = -1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2\,;3)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;1\,;0)\,,(1\,;0\,;1)\big)$

c) $\mu = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((0\,;2\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((6\,;1\,;2)\,,(1\,;-2\,;1)\big)$

d) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((5\,;4\,;3)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;1\,;-3)\,,(-2\,;1\,;1)\big)$

$\mu = 2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;1\,;0)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;2\,;-3)\,,(-2\,;1\,;2)\big)$,

$\mu = -3$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-4\,;-5)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;3\,;3)\,,(3\,;-2\,;3)\big)$

15. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$

$u : \mathcal{B}_0 : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}_1 : \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}_2 : \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \end{pmatrix}$

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $Y_1 = \begin{pmatrix} -20 \\ 34 \end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & -20 \\ 36 & 33 \end{pmatrix}$

18. $P \cdot Q$

19. a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M$$

La matrice de l'endomorphisme f est la même dans les deux bases !

22. a) oui b) non c) non d) oui

23. a) $\lambda = 3$, $E_3 = L\big((1\,;1)\big)$ et $\lambda = -1$, $E_{-1} = L\big((3\,;-1)\big)$

b) $\lambda = \frac{1}{2}$, $E_{\frac{1}{2}} = L\big((2\,;-1)\big)$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $E_{\frac{1}{4}} = L\big((3\,;-1)\big)$

25. a) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;-1)\big)$ et $\lambda_2 = 4$, $E_4 = L\big((2\,;1)\big)$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$, $E_2 = L\big((1\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;0)\big)$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;-1)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

d) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((2\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = -3$, $E_{-3} = L\big((1\,;-1)\big)$,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e) L'endomorphisme n'admet aucune valeur propre.

f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $E_0 = L\big((3\,;1)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

g) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((0\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((3\,;1)\big)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

h) Si $t = 2k\pi$, $f = \mathrm{id}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, déjà diagonalisée ;

si $t = (2k+1)\pi$, $f = -\,\mathrm{id}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, déjà diagonalisée ;

si $t \neq k\pi$, l'endomorphisme n'admet aucune valeur propre.

i) $\lambda_1 = \cos(t) + \sin(t)$, $E_{\cos(t)+\sin(t)} = L\big((1\,;1)\big)$
$\lambda_2 = \cos(t) - \sin(t)$, $E_{\cos(t)-\sin(t)} = L\big((1\,;-1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix}$$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

29. a) $\lambda_1 = -3$, $E_{-3} = L\big((1\,;-1\,;2)\big)$; $\lambda_2 = 0$, $E_0 = L\big((-1\,;1\,;1)\big)$ et
$\lambda_3 = 2$, $E_2 = L\big((2\,;3\,;4)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 2$, $E_2 = L\big((1\,;0\,;-1)\,,(2\,;-1\,;0)\big)$ et
$\lambda_2 = 6$, $E_6 = L\big((1\,;1\,;1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((1\,;1\,;0)\big)$ et
$\lambda_2 = 2$, $E_2 = L\big((-1\,;1\,;0), (0\,;0\,;1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;2\,;6)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

e) $\lambda_1 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;0\,;0)\big)$; $\lambda_2 = 4$, $E_4 = L\big((0\,;1\,;0)\big)$;
$\lambda_3 = 2$, $E_2 = L\big((2\,;1\,;-2)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;2\,;0)\big)$; $\lambda_2 = 2$, $E_2 = L\big((0\,;1\,;1)\big)$;
$\lambda_3 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;2\,;-1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

33. a) $\lambda_1 = 5$ et $v_1 = (1\,;-1)$; $\lambda_2 = 3$ et $v_2 = (3\,;-1)$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{pmatrix}$ e) $A^5 = \begin{pmatrix} -1198 & -4323 \\ 1441 & 4566 \end{pmatrix}$

34. $A^6 = \begin{pmatrix} 1394 & -665 \\ 1330 & -601 \end{pmatrix}$

35. a) f est un endomorphisme non bijectif. $\mathrm{Ker}(f) = i\,\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

b) f est un endomorphisme non bijectif. $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) = i\,\mathbb{R}$.

c) f est un endomorphisme bijectif.

Les trois autres applications ne sont pas des endomorphismes.

36. a) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

c) On trouve $M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et les matrices de passage $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, où $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

37. a) Pour $t = 4 : (2\,;3\,;3\,;4)$, pour $t = 5 : (3\,;5\,;5\,;7)$. On peut observer l'apparition des termes de la suite de Fibonacci (voir exercice 36) : pour $t = n \geq 2$, on trouve $(u_{n-1}\,; u_n\,; u_n\,; u_{n+1} - 1)$.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $1, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ (le nombre d'or) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi}$

38. Vecteur stationnaire $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

39. $E = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$ $\qquad A^n = \begin{pmatrix} 0.25 + 5^{-n} \cdot 0.75 & 0.25 - 5^{-n} \cdot 0.25 \\ 0.75 - 5^{-n} \cdot 0.75 & 0.75 + 5^{-n} \cdot 0.25 \end{pmatrix}$

40. $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{pmatrix}$; $T \cdot E = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.13 \end{pmatrix}$; $T^2 \cdot E = \begin{pmatrix} 0.874 \\ 0.126 \end{pmatrix}$

En bonne santé : $\frac{7}{8} \simeq 87.5\%$

41. $A^2 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.23 & 0.23 \\ 0.32 & 0.39 & 0.32 \\ 0.38 & 0.38 & 0.45 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0.244 & 0.237 & 0.258 \\ 0.334 & 0.355 & 0.341 \\ 0.422 & 0.408 & 0.401 \end{pmatrix}$

42. $E = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

44. La matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0.90 & 0.01 & 0.09 \\ 0.01 & 0.90 & 0.01 \\ 0.09 & 0.09 & 0.90 \end{pmatrix}$; 33.3% ; $\frac{1}{209} \begin{pmatrix} 91 \\ 19 \\ 99 \end{pmatrix}$

45. a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

46. Prix d'équilibre pour les biens et les services $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Si le secteur des biens produit 4 unités monétaires, le secteur des services doit en produire 5.

47. $M = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.15 & 0.4 \\ 0.55 & 0.10 & 0.2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.271 \\ 0.317 \end{pmatrix}$

48. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 79 \\ 117 \\ 72 \end{pmatrix}$

49. $X = \begin{pmatrix} 333 \\ 556 \\ 333 \end{pmatrix}$

50. a) $C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ b) $(I_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.343 & 0.362 & 0.213 \\ 0.746 & 1.471 & 0.277 \\ 0.597 & 0.320 & 1.365 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 270 \\ 359 \end{pmatrix}$ d) $(I_3 - C) \cdot X = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 270 \end{pmatrix}$

51. $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; condition de survie : $p \geq 40$

52. a) La fertilité débute l'âge de 15 ans, puis diminue dès l'âge de 30 ans. Le taux de fertilité peut être supérieur à 1 (nombre de filles par femme sur une période de 5 ans).

b) La mortalité infantile est un peu plus élevée à la naissance.

c) Les femmes survivent mais n'ont plus d'enfants. Elles n'interviennent plus dans la dynamique de la population.

53. a) On considère deux classes d'âge. 25% des femelles de la première classe d'âge donnent naissance à une femelle. 75% survivent et donnent naissance à une femelle en moyenne.

b) Valeurs propres 1 et $-3/4$; $E_1 = L\big((4\,;3)\big), E_{-3/4} = L\big((1\,;-1)\big)$
Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 4 : 3 est stable.

c) Avec $L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, on trouve $L^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3(-0.75)^n & 4-4(-0.75)^n \\ 3-3(-0.75)^n & 3+4(-0.75)^n \end{pmatrix}$.
La population totale reste stable et tend vers une répartition en deux classes d'âge dans le rapport 4 : 3 (1 est valeur propre dominante).

54. a) On considère deux classes d'âge. Les femelles de la première classe d'âge donnent naissance en moyenne à deux femelles. 25% survivent et donnent naissance en moyenne à douze autres femelles.

b) Valeurs propres 3 et -1 ; $E_3 = L\big((12\,;1)\big), E_{-1} = L\big((-4\,;1)\big)$
Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 12 : 1 triple à chaque génération.

c) Avec $L' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$, on trouve $L^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12\cdot 3^n + 4(-1)^n & 48\cdot 3^n - 48(-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 4\cdot 3^n + 12(-1)^n \end{pmatrix}$.
La population totale triple à chaque génération et tend vers une répartition en deux classes d'âge dans le rapport 12 : 1 (3 est valeur propre dominante).

55. a) $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $p_1 = \begin{pmatrix} 2400 \\ 933 \\ 200 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1333 \\ 1867 \\ 133 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2133 \\ 1037 \\ 267 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1571 \\ 1659 \\ 148 \end{pmatrix}$

c) Valeurs propres : $1, -2/3, -1/3$; espaces propres : $E_1 = L\big((9\,;7\,;1)\big)$, $E_{-2/3} = L\big((12\,;-14\,;3)\big), E_{-1/3} = L\big((3\,;-7\,;3)\big)$

d) $p_0 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 500 \end{pmatrix} = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - 100\begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$p_\infty = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1400 \\ 200 \end{pmatrix}$ car lorsque n tend vers l'infini, $(-2/3)^n$ et $(-1/3)^n$ tendent vers zéro.

56. a) Valeurs propres : $2/3, -1/2, -1/6$
$2/3$ est la valeur propre dominante : la population disparaît

b) Valeur propre dominante : 1 (deux valeurs propres complexes de module inférieur à 1) ; la population globale reste constante, sa répartition en 3 classes d'âge se stabilise dans le rapport 2 : 1 : 1.

c) Une valeur propre réelle 1, mais deux valeurs propres complexes de module 1. Une population répartie en 3 classes d'âge dans le rapport 6 : 3 : 1 est en équilibre. Pour toute autre répartition, on peut observer un comportement cyclique de période 3.

57. XWNAMO

58. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 6 \\ 0 & 11 & 11 \\ 25 & 7 & 15 \end{pmatrix} \bmod 26$

Le texte chiffré reste secret !

5 Applications en géométrie

Remarque préliminaire

Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$ (voir page 85). Pour les figures qui servent à illustrer certains endomorphismes, on utilise dans ce chapitre les espaces vectoriels V_2 et V_3 introduits dans les cours de géométrie vectorielle et analytique du plan et de l'espace. Les différents concepts peuvent cependant être généralisés à des espaces vectoriels quelconques, raison pour laquelle les définitions et théorèmes seront énoncés pour un espace vectoriel E de dimension n.

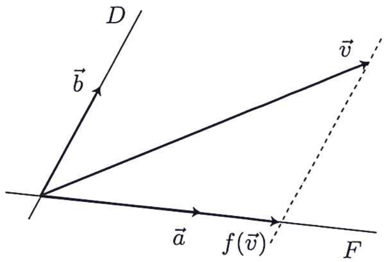
Les endomorphismes de ce chapitre sont des transformations vectorielles. Cependant, afin d'éviter une lourdeur dans les énoncés, on désigne une rotation vectorielle, une symétrie axiale vectorielle, une projection vectorielle, plus simplement par rotation, symétrie axiale, projection.

5.1 Projection, symétrie et homothétie

Projection vectorielle

Exemple 1. *On considère deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan vectoriel V_2.*

L'application f qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 sa projection sur la droite vectorielle $F = L(\vec{a})$ parallèlement à la droite vectorielle $D = L(\vec{b})$ est une application linéaire.



Comme $f(\vec{a}) = \vec{a}$ et que $f(\vec{b}) = \vec{o}$, la matrice de f relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application f possède les valeurs propres 0 et 1, et les espaces propres associés sont $E_0 = L(\vec{b})$ et $E_1 = L(\vec{a})$. Autrement dit, la droite vectorielle $D = L(\vec{b})$ est le noyau de cette projection et la droite vectorielle $F = L(\vec{a})$ est l'ensemble des vecteurs invariants par f, mais également l'image de f.

Comme $M^2 = M$, on peut écrire $f \circ f = f$, ce qui signifie que les images par f restent invariantes si l'on applique une seconde fois la même projection.

Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifie l'égalité $f \circ f = f$, les nombres 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles. En effet, si $f(v) = \lambda v$ et que $f\big(f(v)\big) = f(v)$, alors $\lambda^2 v = \lambda v$ ou $\lambda(\lambda - 1)v = o$. Pour que cette dernière équation admette une solution non nulle pour v, il faut que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Dans le cas particulier où $E_1 = E$, l'endomorphisme f est l'identité de E. Dans le cas où $E_0 = E$, f est l'application nulle k_0 de E.

Dans les autres cas, on pose $D = E_0 = \mathrm{Ker}(f)$ et $F = E_1 = \mathrm{Im}(f)$. L'application f est la **projection** de E sur F parallèlement à D. Elle n'est ni injective, ni surjective.

Une application linéaire f est une projection si et seulement si sa matrice M relativement à une base $\mathcal{B}$ vérifie la relation $M^2 = M$. On en déduit immédiatement que

$$(I_n - M)^2 = I_n^2 - M - M + M^2 = I_n - M$$

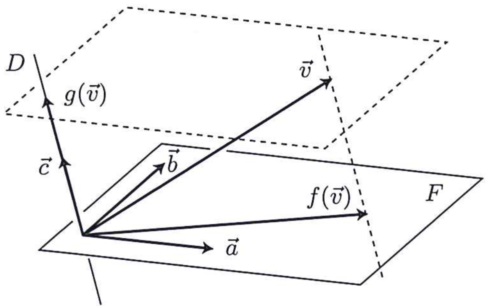
L'application $\mathrm{id}_E - f$ est donc elle aussi une projection. Le vecteur $v - f(v)$ est la projection du vecteur v sur D parallèlement à F. On a la propriété

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f)$$

Exemple 2. *On considère trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace vectoriel V_3. L'application f définie par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$ définit la projection de V_3 sur le plan vectoriel $F = L(\vec{a}, \vec{b})$ parallèlement à la droite vectorielle $D = L(\vec{c})$.



L'application g définie par la matrice $N = I_3 - M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est la projection de V_3 sur la droite vectorielle D parallèlement au plan F.*

Exemple 3. *Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est donné par sa matrice A relativement à la base canonique.*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A^2 = A$ et que les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 0 sont

$$E_1 = L\big((-1\,;1\,;0),(2\,;0\,;1)\big) \qquad E_0 = L\big((2\,;3\,;-1)\big)$$

On en déduit que f est une projection de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan $F = E_1$ parallèlement à la droite $D = E_0$. La matrice A' de f relativement à la base $\big((-1\,;1\,;0)\,;(2\,;0\,;1)\,;(2\,;3\,;-1)\big)$ est la matrice M de l'exemple précédent.
La projection sur D parallèlement à F peut être décrite, relativement à la base canonique, par la matrice

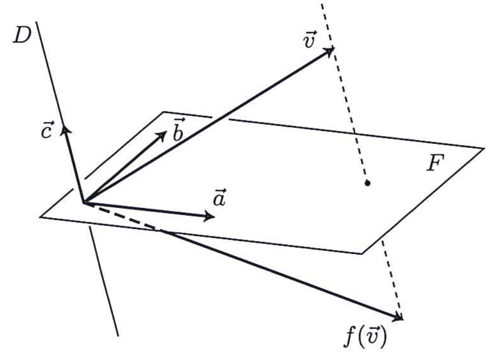
$$B = I_3 - A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Symétrie vectorielle

Exemple 4. *On considère trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace vectoriel V_3. L'application f donnée par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$ définit la symétrie de V_3 par rapport au plan vectoriel $F = L(\vec{a},\vec{b})$ et de direction $D = L(\vec{c})$.



L'application f possède deux valeurs propres 1 et -1. Les espaces propres associés sont $E_1 = L(\vec{a},\vec{b})$ et $E_{-1} = L(\vec{c})$. On a $f \circ f = \mathrm{id}_E$; l'application f est donc bijective et $^r\!f = f$.

Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifie l'égalité $f \circ f = \mathrm{id}_E$, les nombres -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles.

Dans le cas particulier où $E_1 = E$, l'endomorphisme f est l'identité de E. Dans le cas où $E_{-1} = E$, l'application f est $-\mathrm{id}_E$ et peut être interprétée comme **symétrie centrale** ou comme homothétie de rapport -1.

Dans les autres cas, on pose $F = E_1$ et $D = E_{-1}$. L'application f est la **symétrie** de E par rapport à F et de direction D. Elle est bijective avec $^r\!f = f$ (ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$).

Une application linéaire f est une symétrie si et seulement si sa matrice M relativement à une base $\mathcal{B}$ vérifie la relation $M^2 = I_n$.

En observant la figure de l'exemple 4, on voit que

$p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + f)$	est la projection sur F parallèlement à D
$g = -f$	est la symétrie par rapport à D et de direction F
$q = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - f)$	est la projection sur D parallèlement à F

Homothétie vectorielle

L'**homothétie** de rapport k, $k \neq 0$, est l'endomorphisme h de E défini par $h(x) = kx$. La matrice associée à h (relativement à une base quelconque) est $M = kI_n$.

Le nombre k est la seule valeur propre et l'espace propre associé est E. L'application est bijective et sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/k$, de matrice $M^{-1} = \frac{1}{k}I_n$.

Les cas particuliers $k = 1$ et $k = -1$ correspondent respectivement à l'identité et à la symétrie centrale. Une homothétie de rapport k est une **contraction** si $|k| < 1$ et une **dilatation** si $|k| > 1$.

5.2 Produit scalaire et norme

Produit scalaire

Le **produit scalaire**[1] usuel de deux vecteurs $x = (x_1\,;x_2)$ et $y = (y_1\,;y_2)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est le nombre réel

$$\langle x\,;y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

De manière analogue, on définit le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

$$\langle x\,;y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$$

Exemple 1. *On donne $x = (3\,;-2\,;4)$ et $y = (2\,;1\,;3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire usuel de ces deux vecteurs est le nombre $\langle x\,;y\rangle = 16$.*

Propriétés. On note x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un nombre réel.

1. $\langle y\,;x\rangle = \langle x\,;y\rangle$
2. $\langle x\,;y+z\rangle = \langle x\,;y\rangle + \langle x\,;z\rangle$
3. $\langle x\,;\lambda y\rangle = \lambda\langle x\,;y\rangle$
4. $\langle x\,;x\rangle \geq 0$
5. $\langle x\,;x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

La démonstration de ces propriétés est immédiate à l'aide de la définition.

[1] L'emploi des chevrons $\langle x\,;y\rangle$ au lieu d'une notation du type $x \cdot y$ permet d'éviter la confusion avec d'autres produits.

Généralisation. Dans un espace vectoriel E quelconque, un produit scalaire est une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & \langle x\,;y\rangle \end{array}$$

vérifiant les cinq propriétés précédentes.

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}^2$, $\langle x\,;y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ est le produit scalaire usuel. En posant $\langle x\,;y\rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2$, on obtient un autre produit scalaire.*
Pour les vecteurs $x = (1\,;3)$ et $y = (2\,;-1)$, par exemple, ces produits scalaires sont respectivement -1 (produit scalaire usuel) et 3.

Pour la suite de ce cours, on désigne par produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel.

Exemple 3. *Dans l'espace $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, l'application définie par*

$$\big\langle a_1x^2 + b_1x + c_1\,; a_2x^2 + b_2x + c_2\big\rangle = a_1a_2 + 2b_1b_2 + 3c_1c_2$$

est un produit scalaire.
Pour les polynômes $p(x) = x^2 + x - 2$ et $q(x) = 2x^2 - 3x + 2$, par exemple, on obtient $\langle p\,;q\rangle = -16$.

Exemple 4. *Dans l'espace $\mathcal{C}\big([0;1]\big)$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0\,;1]$, l'application définie par*

$$\langle f\,;g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire.
Pour les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, on obtient $\langle f\,;g\rangle = \dfrac{2}{7}$.

Exemple 5. *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n, l'application définie par*

$$\langle A\,;B\rangle = \operatorname{Tr}\left({}^tA \cdot B\right)$$

est un produit scalaire.
Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient $\langle A\,;B\rangle = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un **espace vectoriel euclidien.**

Norme d'un vecteur

La **norme** usuelle d'un vecteur $x = (x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel positif

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

On a $\|x\| = \sqrt{\langle x\,;x\rangle}$. Cette relation définit plus généralement la norme d'un vecteur pour tout produit scalaire d'un espace vectoriel euclidien E.

Un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

Exemple 6. *La norme du vecteur* $x = (3\,;-2\,;4)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est le nombre* $\|x\| = \sqrt{29}$. *Le vecteur* $u = \left(\frac{3}{5}\,;-\frac{4}{5}\,;0\right)$ *est unitaire.*

Propriétés. On note x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un nombre réel.

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski[2])
4. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
5. $\left|\langle x\,;y\rangle\right| \leq \|x\|\,\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz[3])

Démonstration. La démonstration des propriétés 1, 2 et 4 est immédiate. Une démonstration élégante de la propriété 5 consiste à étudier, pour deux vecteurs x et y donnés, la fonction

$$p(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$$

qui prend des valeurs positives quel que soit le nombre réel λ. Or

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \langle x + \lambda y\,;x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x\,;x\rangle + 2\langle x\,;y\rangle\lambda + \langle y\,;y\rangle\lambda^2 \end{aligned}$$

La fonction p est donc un polynôme du deuxième degré en λ dont le discriminant doit être inférieur ou égal à 0 (sinon le polynôme changerait de signe). Ainsi

$$\Delta = 4\langle x\,;y\rangle^2 - 4\langle x\,;x\rangle\langle y\,;y\rangle \leq 0$$

[2]Hermann Minkowski, mathématicien et physicien allemand, 1864–1909

[3]Augustin-Louis Cauchy, mathématicien français, 1789–1857 et Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand, 1843–1921

et on peut conclure en utilisant la définition de la norme

$$|\langle x\,;y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

La propriété 3 peut maintenant être établie en écrivant successivement

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y\,;x+y\rangle \\
&= \langle x\,;x\rangle + 2\langle x\,;y\rangle + \langle y\,;y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x\,;y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

Remarques

1. En géométrie analytique du plan et de l'espace, l'inégalité de Minkowski est aussi connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Elle découle alors des propriétés de la distance.
2. Si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel euclidien, alors les vecteurs $\pm\frac{1}{\|x\|}x$ sont des vecteurs unitaires, multiples du vecteur donné.
3. Si x et y sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien, alors l'angle φ formé par ces vecteurs vérifie la relation
$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x\,;y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

Orthogonalité, bases orthonormées

On considère un espace vectoriel euclidien E. Deux vecteurs de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Exemple 7. *Les vecteurs $x = (3\,;2\,;-2)$ et $y = (2\,;1\,;4)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, sont orthogonaux.*

Théorème. L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul donné est un sous-espace vectoriel.

Exemple 8. *Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le sous-espace des vecteurs orthogonaux à un vecteur a non nul est une droite vectorielle. Dans un espace de dimension 3, ce sous-espace est un plan vectoriel. Dans un espace de dimension n, ce sous-espace est un* **hyperplan** *de dimension $n-1$. Le vecteur a est un* **vecteur normal** *à cet hyperplan.*

Une base de E est **orthonormée** si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Exemple 9. *La base canonique de l'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, est une base orthonormée.*

Propriétés. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$. On note $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ les matrices-colonne des composantes de deux vecteurs x et y de E dans cette base. On a

1. $x_i = \langle x\,; e_i \rangle$
2. $\langle x\,; y \rangle = {}^t X \cdot Y$
3. $\|x\|^2 = {}^t X \cdot X$

Remarque. Si u et v sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien et $v \neq o$, on définit la projection orthogonale u' de u sur v par

$$u' = \frac{\langle u\,; v \rangle}{\|v\|^2}\, v$$

Endomorphisme orthogonal

Une matrice carrée M est une **matrice orthogonale** si $M^{-1} = {}^t M$.

Exemple 10. *La matrice* $M = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ *est orthogonale.*

En effet, ${}^t M \cdot M = \dfrac{1}{49} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = I_3$

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à $+1$ ou à -1.

Un endomorphisme de E est un **endomorphisme orthogonal** si sa matrice relativement à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Propriétés

1. Un endomorphisme h de E est orthogonal si et seulement s'il conserve le produit scalaire.

   Avec les notations habituelles (M étant la matrice associée à h), on a

$$\begin{aligned} \langle h(x)\,; h(y) \rangle &= {}^t(M \cdot X) \cdot (M \cdot Y) \\ &= {}^t X \cdot {}^t M \cdot M \cdot Y = {}^t X \cdot I_n \cdot Y = {}^t X \cdot Y \\ &= \langle x\,; y \rangle \end{aligned}$$

   On en déduit immédiatement les propriétés suivantes.

2. Un endomorphisme orthogonal h de E conserve la norme des vecteurs : pour tout vecteur $x \in E$, on a $\|h(x)\| = \|x\|$.

   La propriété de conserver la norme des vecteurs est même une propriété caractéristique des endomorphismes orthogonaux (la réciproque est vraie). Un endomorphisme orthogonal est, de ce fait, également appelé une **isométrie**, terme utilisé dans la suite de ce cours. Géométriquement, on peut montrer que si une transformation de E vers E conserve les distances, elle conserve aussi les angles.

3. Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité des vecteurs (la réciproque est fausse, l'homothétie en est un contre-exemple).

4. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E.

5. Les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Similitude vectorielle

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée.

Une **similitude** est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k. La matrice M associée à une similitude est caractérisée par la relation

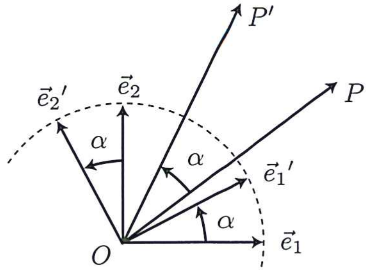
$$^{t}M \cdot M = k^2\, I_n$$

Homothétie et similitude conservent les angles et l'orthogonalité.

5.3 Endomorphismes du plan

En géométrie analytique, le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$. Un point P est alors repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et les composantes de ce vecteur dans la base $(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$ sont les coordonnées du point P. Le vecteur $\vec{o}$ est le rayon-vecteur de l'origine O du repère. À une droite vectorielle correspond un axe passant par O. Les espaces $L(\vec{e}_1)$ et $L(\vec{e}_2)$ sont appelés respectivement axe Ox et axe Oy.

Rotation



La matrice associée à une **rotation** de centre O et d'angle α est

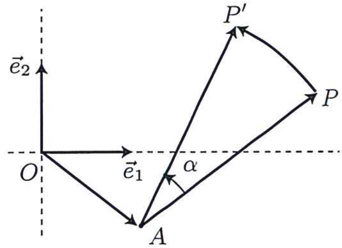
$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un endomorphisme orthogonal h car l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée. La matrice ${}^tM$ est donc également la matrice associée à l'endomorphisme réciproque qui est la rotation d'angle $-\alpha$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = {}^tM$$

La rotation n'a pas de valeurs propres pour $\alpha \neq k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.
On obtient l'image $P'(x'\,;y')$ d'un point $P(x\,;y)$ par la rotation de centre $A(a\,;b)$ et d'angle α en appliquant la rotation h de matrice M au vecteur $\overrightarrow{AP}$.



On a $\overrightarrow{AP'} = h(\overrightarrow{AP})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + h(\overrightarrow{AP})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Lorsque $\alpha = 0°$, la rotation d'angle α est l'identité du plan.
Lorsque $\alpha = 180°$, la rotation d'angle α est la symétrie centrale.

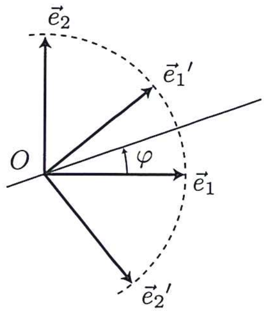
On remarquera encore les cas particuliers des rotations d'angle 90° et $-90°$ dont les matrices associées sont respectivement

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La proposition suivante permet de caractériser une rotation de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^2$ est une rotation si et seulement si $\text{Det}(h) = +1$.

Symétrie axiale orthogonale



On considère la **symétrie axiale** dont l'axe passe par O et forme un angle φ avec l'axe Ox. L'image du premier vecteur de la base est le vecteur

$$\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

On obtient l'image du second vecteur de la base par rotation d'angle $-90°$ du vecteur $\vec{e_1}'$. Ainsi

$$\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) \\ -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

La matrice associée à la symétrie axiale considérée est donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = 2\varphi$$

On vérifie que cet endomorphisme est orthogonal et que $\mathrm{Det}(M) = -1$. On a même ${}^tM = M^{-1} = M$.

Pour les cas particuliers $\varphi = 0°, 90°$ et $45°$, on obtient respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de la symétrie axiale d'axe } Ox$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de la symétrie axiale d'axe } Oy$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de la symétrie axiale d'axe } y = x$$

La proposition suivante permet de caractériser une symétrie axiale orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^2$ est une symétrie axiale si et seulement si $\mathrm{Det}(h) = -1$. Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 1 engendre l'axe de symétrie.

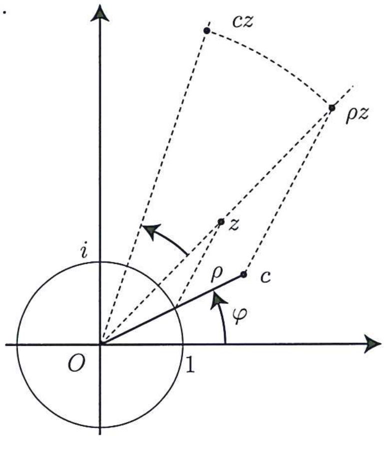
Similitude

Une similitude conserve l'orthogonalité (voir page 146), les images des vecteurs d'une base orthonormée sont donc orthogonales. La matrice associée à une similitude h du plan ne peut alors prendre que l'une des deux formes suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 \neq 0$$

Pour deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$, on vérifie que $\langle h(u)\,;h(v)\rangle = (a^2+b^2)\langle u\,;v\rangle$ ce qui implique, pour l'angle φ des vecteurs u et v, que $\cos(\varphi) = \frac{\langle u\,;\,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$ est invariant (h conserve bien les angles).

Exemple 2. *Dans le plan d'Argand*[4]*-Gauss qui représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on peut interpréter la multiplication de $z \in \mathbb{C}$ par un nombre complexe donné $c = a + bi$ comme la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\rho = |c|$ et de la rotation de centre O et d'angle $\varphi = \arg(c)$.*



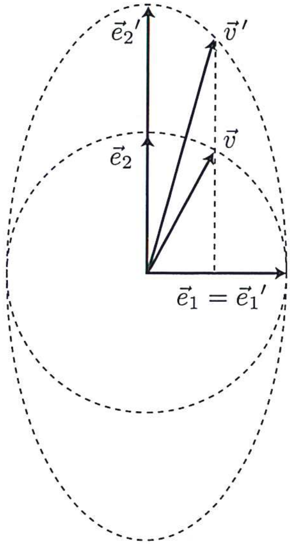
On attribue ainsi à tout nombre complexe $c = a + bi = \rho e^{i\varphi}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

La bijection $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *suggère une nouvelle définition de l'ensemble des nombres complexes comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ engendré par les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *qui représentent respectivement les nombres 1 et i.*

[4] Jean-Robert Argand, mathématicien suisse, 1768–1822

Affinité axiale orthogonale

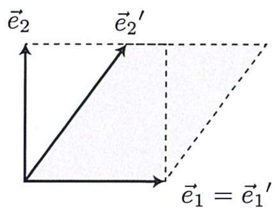


L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,; e_2)$ en $(e_1\,; ke_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'**affinité axiale** d'axe Ox, de direction Oy et de paramètre k. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}^*$$

Cet endomorphisme admet deux valeurs propres 1 et k et les espaces propres associés sont respectivement $L(e_1)$ et $L(e_2)$.

Cisaillement



L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,; e_2)$ en $(e_1\,; ke_1 + e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est le **cisaillement horizontal** de paramètre k. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}^*$$

La seule valeur propre est le nombre 1 et l'espace propre associé est $L(e_1)$.

Projection orthogonale

La **projection orthogonale** h du plan sur l'axe Ox transforme e_1 en e_1 et e_2 en o. La matrice associée à h est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet endomorphisme n'est pas bijectif. On a $\mathrm{Ker}(h) = L(e_2)$, $\mathrm{Im}(h) = L(e_1)$ et $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $h\big((x\,; y)\big) = (x\,; 0)$.

Plus généralement, la projection orthogonale du plan sur un axe qui passe par O et qui forme un angle φ avec l'axe Ox est obtenue par la composition de la rotation f d'angle $-\varphi$, la projection orthogonale du plan sur l'axe Ox et la rotation ${}^r\!f$ d'angle φ.

Exemple 3. *La projection orthogonale du plan sur l'axe $y = x$ (qui forme avec l'axe Ox un angle $\varphi = 45°$) est donné par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale d'un point $P(x\,;y)$ du plan sur l'axe $y = x$ est donc le point $P'\left(\frac{x+y}{2}\,;\frac{x+y}{2}\right)$.

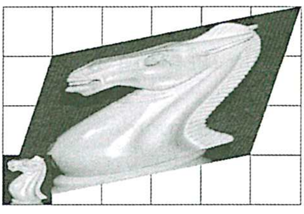
On peut vérifier que M possède deux valeurs propres 0 et 1 et que les espaces propres associés sont engendrés respectivement par $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$.

Exemple d'application

Dans le traitement numérique des images à l'aide d'un logiciel[5], on peut appliquer une transformation géométrique à chaque point $(x\,;y)$ d'une image. On attribue ensuite au point image $(x'\,;y')$ la couleur du pixel d'origine.

Une transformation linéaire est donnée par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$



Transformation linéaire de matrice

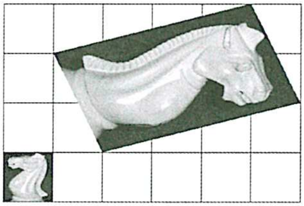
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

L'image d'origine (en bas à gauche) est de taille 1×1.

[5]Les illustrations de cet exemple ont été obtenues à l'aide d'instructions décrites dans *Arrêt sur image*, CAHIER N° 5 DE LA CRM.

Une application affine désigne la composée d'une transformation linéaire et d'une translation.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{array} \right.$$



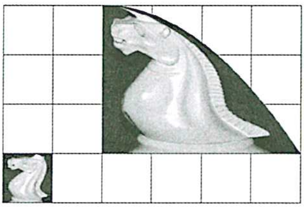
Transformation affine composée d'une transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, on réalise des déformations d'images en utilisant des transformations (non linéaires) du type

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x\,;y) \\ y' = g(x\,;y) \end{array} \right.$$ où f et g sont deux fonctions de deux variables réelles.



Transformation non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 4x\sqrt{1-y} + 2 \\ y' = 3y + 1 \end{array} \right.$$

5.4 Endomorphismes de l'espace

En géométrie analytique, l'espace affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$. Un point P est alors repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et les composantes de ce vecteur dans la base $(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$ sont les coordonnées du point P. Le vecteur $\vec{o}$ est le rayon-vecteur de l'origine O du repère. À une droite vectorielle correspond un axe passant par O. Les espaces $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ et $L(\vec{e}_3)$ sont appelés respectivement axe Ox, Oy et Oz. À un plan vectoriel correspond un plan passant par l'origine O du repère. Les espaces $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ et $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont appelés respectivement plans Oxy, Oxz et Oyz.

En généralisant les endomorphismes du plan, on obtient immédiatement quelques résultats analogues pour l'espace (voir *Formulaires et tables*, CRM).

Homothétie de centre O et de rapport k
$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Homothétie de centre O et de rapport -1 ou symétrie centrale de centre O
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle α autour de l'axe Oz
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle 180° autour de l'axe Oz ou symétrie par rapport à l'axe Oz
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projection parallèle à l'axe Oz sur le plan Oxy
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Projection parallèle au plan Oxy sur l'axe Oz
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

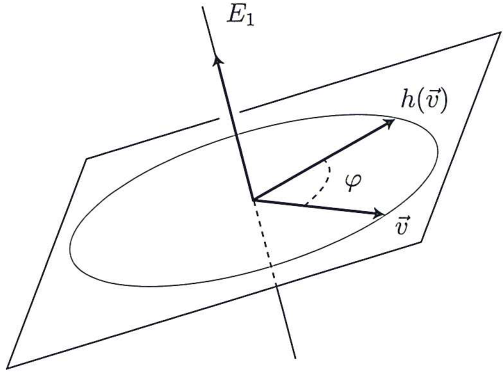
Symétrie par rapport au plan Oxy
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarques

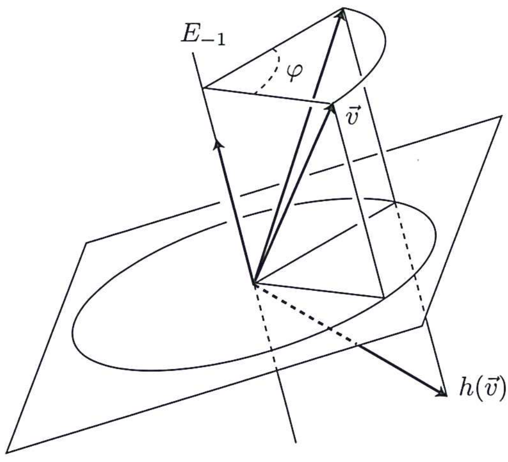
1. On obtient d'autres exemples d'endomorphismes élémentaires en composant les transformations données ci-dessus.
2. Pour la rotation d'angle α autour de l'axe Oz, la trace de la matrice associée est $2\cos(\alpha)+1$. Cette trace est invariante lors d'un changement de base.
3. Pour étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné, on détermine en premier lieu ses valeurs propres et les espaces propres associés. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre 3 est un polynôme de degré 3 qui admet toujours au moins un zéro réel. Un endomorphisme de l'espace admet donc au moins une valeur propre (qui peut être nulle).

Les isométries de l'espace peuvent être caractérisées de la manière suivante.

Proposition 3. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant $+1$, autre que l'identité, est une rotation autour d'un axe. L'axe de rotation est l'espace propre associé à la valeur propre 1 et l'angle φ de rotation est donné par la relation $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(h) - 1\big)$.



Proposition 4. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant -1, autre que la symétrie centrale, est la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan. L'axe de la rotation est l'espace propre associé à la valeur propre -1 et l'angle φ de la rotation est donné par la relation $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(h) + 1\big)$. Le plan de symétrie est perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans le cas particulier où la trace de h vaut 1, cet endomorphisme est une symétrie par rapport à un plan qui est l'espace propre associé à la valeur propre 1.



Exemple 1. *On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice M relativement à la base canonique.*

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie par ${}^tM \cdot M = I_3$ que cet endomorphisme est orthogonal. Comme on a $\mathrm{Det}(M) = +1$, h est une rotation d'angle α. En calculant un vecteur propre non nul associé à la valeur propre $+1$, on trouve l'axe de rotation qui est $L\big((-2\,;1\,;0)\big)$. Comme $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}(M) - 1\big) = \frac{2}{7}$, l'angle de la rotation vaut $\alpha \approx 73.4°$.

Exemple 2. *On cherche à déterminer la matrice associée à la symétrie orthogonale h par rapport au plan d'équation $x+2y-2z = 0$ relativement à la base canonique. Ce plan est engendré par les vecteurs $a = (-2\,;1\,;0)$ et $b = (2\,;0\,;1)$, aussi appelés vecteurs directeurs du plan.*
Le vecteur $n = (1\,;2\,;-2)$, normal au plan, est orthogonal aux vecteurs a et b. Relativement à la base $\mathcal{B}' = (a\,;b\,;n)$, la matrice de h est

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Après calcul, on trouve

$$M = P \cdot M' \cdot P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M est orthogonale, son déterminant vaut -1 et sa trace 1.

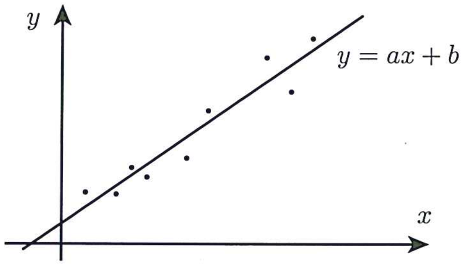
Exemple 3. *L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est la composée de la rotation d'angle α autour de l'axe Oz et de la symétrie par rapport au plan Oxy.

5.5 Exemple d'une projection de $\mathbb{R}^n$

La régression linéaire est une méthode pour déterminer la droite d'équation $y = ax + b$ qui passe « au mieux » par n ($n \geq 3$) points donnés dans le plan.



On note $(x_1\,;y_1), (x_2\,;y_2), \ldots, (x_n\,;y_n)$ les points donnés dont on suppose qu'au moins deux abscisses (x_i et x_j) sont différentes. On considère la fonction affine cherchée $p\colon x \mapsto ax + b$ comme un vecteur de l'espace $\mathbb{P}_1$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 muni de la base $\mathcal{B} = (x\,;1)$ et $u = (x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$, $v = (y_1\,;y_2\,;\ldots\,;y_n)$, $w = (1\,;1\,;\ldots\,;1)$ comme trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\mathcal{B}'$.

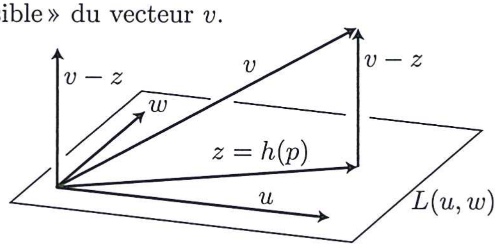
L'application

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{P}_1 & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ax+b & \mapsto & z = (ax_1 + b\,; ax_2 + b\,;\ldots\,; ax_n + b) \end{array}$$

est une application linéaire dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ prend la forme

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

L'espace image de h est le sous-espace vectoriel $L(u, w)$ de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension 2. On cherche le polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ tel que $z = h(p)$ soit « aussi proche que possible » du vecteur v.



On cherche à minimiser la norme du vecteur $v - z$ de l'espace $\mathbb{R}^n$. L'expression suivante doit donc prendre une valeur minimale.

$$\|v - z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$$

Ce problème, connu sous le nom de « méthode des moindres carrés », est habituellement résolu à l'aide de dérivées partielles. On peut aussi considérer l'image $h(p)$ comme la projection orthogonale de v sur $L(u, w)$ et donc chercher le vecteur $p \in \mathbb{P}_1$ tel que

$$\big(v - h(p)\big) \perp u \quad \text{et} \quad \big(v - h(p)\big) \perp w$$

En calculant les produits scalaires $\langle v - h(p)\,;u\rangle$ et $\langle v - h(p)\,;w\rangle$, on obtient, pour les deux inconnues a et b, le système linéaire

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big) = 0 \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \; \big({}^t\!M \cdot M\big) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = {}^t\!M \cdot Y \qquad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que la matrice ${}^t\!M \cdot M$ est inversible (exercice) et on obtient la solution sous la forme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \big({}^t\!M \cdot M\big)^{-1} \cdot {}^t\!M \cdot Y$$

5.6 Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2)$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = L\big((3\,;1)\big)$ et $D = L\big((-1\,;1)\big)$. On désigne par p la projection sur F parallèlement à D.

a) Déterminer la matrice P de p relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Calculer l'image par p du vecteur $(8\,;8)$.

c) Déduire de P la matrice de la projection sur D parallèlement à F relativement à la base $\mathcal{B}$.

d) Déduire de P la matrice de la symétrie s_1 par rapport à F et de direction D, et celle de la symétrie s_2 par rapport à D et de direction F, relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \big\{(x\,;y\,;z) \mid x - y = 0\big\}$ et $D = L\big((1\,;2\,;1)\big)$. On désigne par s la symétrie par rapport à F et de direction D.

a) Déterminer la matrice de s relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la matrice de la projection sur F parallèlement à D relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la projection p_1 sur un plan vectoriel P parallèlement à une droite vectorielle D (avec $D \not\subset P$) et p_2 la projection sur D parallèlement à P.
Montrer que $p_1 \circ p_2 = k_o$, l'application nulle, et que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

4. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés par leur matrice (relativement à la base canonique) suivante.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par leur matrice (relativement à la base canonique) suivante.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f_m de matrice $\begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & 2-\frac{3}{2}m \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

a) Déterminer, selon les valeurs de m, $\text{Im}(f_m)$ et $\text{Ker}(f_m)$.

b) Pour quelles valeurs de m, f_m est-il une projection ?

c) Pour quelles valeurs de m, f_m est-il une symétrie ?

7. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f_α de matrice $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$ où α est un nombre réel.

a) Déterminer α pour que f_α ne soit pas bijectif.

b) Déterminer α pour que f_α soit une projection.

c) Déterminer α pour que f_α soit une symétrie.

8. Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

a) le déterminant d'une symétrie axiale est -1 et sa trace est nulle ;

b) le déterminant d'une projection est nul et sa trace est 1.

9. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.

a) Déterminer a et b pour que f soit une symétrie.

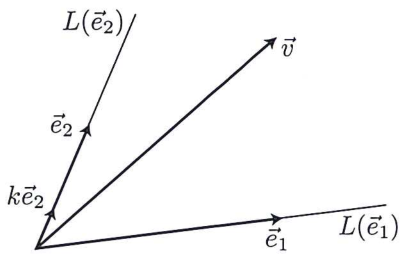
b) Déterminer a et b pour que $\text{Im}(f)$ soit de dimension 2 ; donner alors $\text{Ker}(f)$.

10. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui transforme une base $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2)$ en $(e_1 ; ke_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'**affinité axiale** d'axe $L(e_1)$, de direction $L(e_2)$ et de paramètre k.

a) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Reproduire la figure ci-contre et construire l'image du vecteur v par f.

c) Montrer que l'affinité axiale f est bijective et caractériser son application réciproque.



11. On considère la projection p de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan U d'équation $x - y = 0$ parallèlement à la droite $V = L\big((1\,;2\,;1)\big)$.

a) Indiquer une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice associée à p est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide d'une matrice de changement de base, déterminer la matrice de p relativement à la base canonique.

12. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire.

a) Montrer que les vecteurs $(-1\,;5\,;2)$ et $(2\,;4\,;-9)$ sont orthogonaux.

b) Déterminer k pour que les vecteurs $(2\,;1\,;3)$ et $(1\,;7\,;k)$ soient orthogonaux.

c) Déterminer k pour que $(1\,;7\,;k)$ soit orthogonal à $(6\,;k\,;k)$.

d) Déterminer le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à $(2\,;-1\,;5)$.

13. a) Montrer que $\langle f\,;g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ définit un produit scalaire dans l'espace $\mathcal{C}\big([0;1]\big)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Calculer $\langle f\,;g\rangle$ si $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$.
Quel est l'angle formé par ces deux fonctions ?

c) Calculer la norme de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

d) Quelle est la projection orthogonale de f sur g pour $f(x) = x$ et $g(x) = xe^x$?

14. On considère le sous-espace S des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Quelle est la dimension de S ? Indiquer une base de S.

b) Montrer que $\langle A\,;B\rangle = \mathrm{Tr}\,(A \cdot B)$ définit un produit scalaire dans S.

c) Trouver une base orthonormée de S.

d) Montrer que le sous-ensemble V de S constitué des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel. Donner une base de V.

15. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = (a\,;b)$ et $v = \big(\cos(\alpha)\,;\,\sin(\alpha)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ pour démontrer que

$$\big|a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha)\big| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

16. a) Démontrer que l'égalité $\left|\langle x\,;y\rangle\right| = \|x\|\,\|y\|$ est vraie si et seulement si les deux vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

b) À quelle condition a-t-on l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$?

17. On considère $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. Établir l'identité suivante (théorème de Pythagore généralisé).

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

18. On considère un vecteur $v = (1\,;-2\,;0\,;3)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer l'hyperplan H dont v est un vecteur normal.

19. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, les ensembles ordonnés suivants forment-ils une base orthonormée ?

a) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,;\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,;\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

b) $\left(\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)\,;\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)\,;\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)\right)$

20. On considère deux vecteurs $u = (1\,;1\,;0)$ et $v = (1\,;0\,;1)$ de $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormée $(i\,;j\,;k)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $L(i) = L(u)$ et $L(i,j) = L(u,v)$.

21. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

22. a) Démontrer que si A et B sont deux matrices orthogonales, alors la matrice $A \cdot B$ est orthogonale.

b) Que peut-on en déduire pour les isométries vectorielles ?

23. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pour $u = (x\,;y\,;z)$, calculer $h(u)$ et montrer que $\|h(u)\| = \|u\|$.

b) Déterminer l'ensemble des u de $\mathbb{R}^3$ tels que $h(u) = u$ et donner l'interprétation géométrique de h.

24. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$, on donne deux vecteurs linéairement indépendants $u = (3\,;1)$ et $v = (-1\,;1)$. On désigne par p la projection vectorielle sur $L(u)$ parallèlement à $L(v)$.

a) Écrire la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}' = (u\,;v)$.

b) Utiliser la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ pour trouver la matrice de p relativement à la base canonique.

25. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par les matrices suivantes. En déduire la nature géométrique de ces transformations.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

26. On considère la projection orthogonale p du plan $\mathbb{R}^2$ sur la droite d d'équation $ax + by = 0$.

a) Indiquer une base de $\mathbb{R}^2$ relativement à laquelle la matrice associée à p est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide d'une matrice de changement de base, déterminer la matrice de p relativement à la base canonique.

27. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants, donnés par leur matrice relativement à la base canonique, sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

28. Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x\,;y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\,;\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

est orthogonal. Quelle transformation du plan représente-t-il ?

29. Montrer qu'un cisaillement horizontal de paramètre k est bijectif et que son application réciproque est un cisaillement horizontal de paramètre $-k$.

30. Dans le plan affine muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le triangle de sommets $A(5\,;1)$, $B(9\,;1)$ et $C(9\,;4)$, ainsi que le point $P(2\,;3)$. On souhaite appliquer au triangle ABC la rotation de centre P et d'angle $60°$. Pour cela, on effectue tout d'abord la translation de vecteur $\overrightarrow{PO}$, suivie de la rotation de centre O et d'angle $60°$. On applique finalement la translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$.
Calculer les images des sommets du triangle ABC par la rotation de centre P et d'angle $60°$.

31. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,;e_2)$ en $(e_1+ke_2\,;e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est un **cisaillement vertical** de paramètre k.

a) Déterminer la matrice de la composée de l'affinité axiale d'axe Ox, de direction Oy et de paramètre $\frac{1}{2}$, suivie du cisaillement vertical de paramètre $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer que la composée $g \circ f$ des deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés par les matrices $M_g = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une rotation et déterminer son angle.

c) Démontrer que toute rotation d'angle α $(\alpha \neq k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z})$ peut être écrite comme composée d'affinités axiales et de cisaillements.

32. Dans le plan affine muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère une droite d. Pour effectuer la symétrie axiale d'axe d d'un point P, on procède de la manière suivante : on choisit un point A quelconque de la droite d et on applique au point P la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. On effectue ensuite la symétrie axiale d'axe parallèle à d et passant par l'origine. Finalement, on applique à cette dernière image la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

a) Calculer l'image du point $P(6\,;3)$ par la symétrie axiale d'axe d d'équation $d : x - 2y + 2 = 0$.

b) Vérifier que cette image ne dépend pas du point $A \in d$ choisi.

33. On considère les nombres complexes $u = 2 + 5i$ et $v = 3 - 4i$.

a) Écrire les nombres nombres complexes u et v sous forme matricielle.

b) Utiliser la forme algébrique et la forme matricielle pour calculer $u + v, u \cdot v, \dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$.

34. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants, donnés par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 23 & -36 & 24 \\ -36 & -31 & -12 \\ 24 & -12 & -41 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 2 & -6 & -9 \\ 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

35. a) Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{R}^3$ est encore une rotation.

b) Déterminer la matrice associée à la composée (dans $\mathbb{R}^3$) de la rotation d'angle 90° autour de l'axe Ox (e_2 a pour image e_3) et de la rotation d'angle 90° autour de l'axe Oy (e_1 a pour image e_3). Déterminer l'axe et l'angle de cette nouvelle rotation.

36. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de

a) la symétrie orthogonale s par rapport au plan $x + y + z = 0$;

b) la symétrie orthogonale t par rapport au plan $3x + y + 4z = 0$;

c) la composée $r = s \circ t$. Caractériser r géométriquement.

37. a) On considère la symétrie orthogonale s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan vectoriel $L\big((-1\,;3\,;1),(3\,;1\,;2)\big)$. Trouver la matrice de s relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) On note r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $r(e_1) = e_2$, $r(e_2) = e_3$ et $r(e_3) = e_1$ où $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Prouver que r est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'angle.

c) Déterminer la matrice de l'endomorphisme t tel que $t \circ s = r$. Caractériser t géométriquement.

38. Déterminer les matrices relativement à la base canonique des rotations de $\mathbb{R}^3$ d'angle α autour de l'axe $L\big((1\,;1\,;1)\big)$ sachant que $\cos(\alpha) = 3/5$.

39. Un endomorphisme f d'un espace vectoriel est **involutif** si $f \circ f = \mathrm{id}$.

a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal f de $\mathbb{R}^3$ est involutif si et seulement si sa matrice relativement à une base orthonormée est symétrique.

b) Caractériser géométriquement les endomorphismes orthogonaux involutifs de $\mathbb{R}^3$.

40. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique.

a) Déterminer la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur la droite vectorielle engendrée par $u = (1\,;-2\,;3)$.

b) Déterminer la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur le plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

41. Déterminer les coefficients de la droite de régression pour les points P_i dont les coordonnées $(x_i\,;y_i)$ sont données dans le tableau suivant.

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14
y_i	1	2	4	4	5	7	8	9

Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(12\,;4)$ c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) projection sur $L\big((1\,;0)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;1)\big)$

b) projection sur $L\big((3\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;1)\big)$

c) symétrie par rapport à $L\big((1\,;\sqrt{3})\big)$ et de direction $L\big((0\,;1)\big)$

d) projection sur $L\big((1\,;-1)\big)$ parallèlement à $L\big((1-a\,;a)\big)$

e) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1)\big)$ et de direction $L\big((2\,;-1)\big)$

5. a) projection sur $L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;4\,;-5)$

b) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$, de direction $L\big((2\,;4\,;-5)\big)$

c) projection sur $L\big((-1\,;1\,;0),(-1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;1\,;1)$

d) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1\,;1)\big)$ et de direction $L\big((0\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$

6. a) Si $m = 0$, $\operatorname{Im}(f_m) = L\big((1\,;2)\big)$ $\operatorname{Ker}(f_m) = L\big((1\,;1)\big)$
si $m = \frac{5}{3}$, $\operatorname{Im}(f_m) = L\big((2\,;-1)\big)$ $\operatorname{Ker}(f_m) = L\big((3\,;-2)\big)$
sinon, $\operatorname{Im}(f_m) = \mathbb{R}^2$ $\operatorname{Ker}(f_m) = \big\{(0\,;0)\big\}$

b) Si $m = 0$, h_0 est une projection sur $L\big((1\,;2)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;1)\big)$.

c) Si $m = 2$, h_2 est une symétrie par rapport à $L\big((1\,;0)\big)$ et de direction $L\big((1\,;-2)\big)$.

7. a) f_α n'est pas bijectif si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) f_α est une projection sur $L\big((1\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;-1)\big)$ si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) f_α est une symétrie par rapport à $L\big((1\,;1)\big)$ et de direction $L\big((1\,;-1)\big)$ si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

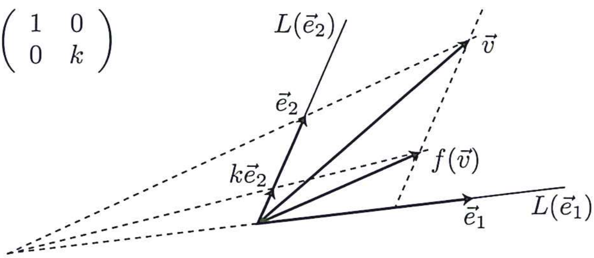
8. Les matrices associées à ces transformations, relativement à une base judicieusement choisie, sont a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. a) Si $a = 0$ et $b = -1$, h est une symétrie par rapport au plan vectoriel $L\big((1\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((0\,;1\,;1)\big)$.

b) $a = -1$, $\mathrm{Ker}(h) = L\big((1\,;-b\,;1)\big)$

10. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

b)



c) f est bijective car $\mathrm{Det}(M) = k \neq 0$. Sa réciproque est l'affinité d'axe $L(e_1)$, de direction $L(e_2)$ et de paramètre $\frac{1}{k}$.

11. a) $\mathcal{B}' = \big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1)\,;(1\,;2\,;1)\big)$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12. b) $k = -3$ c) $k = -1$ ou $k = -6$

d) $\{(x\,;y\,;z) \mid 2x - y + 5z = 0\} = L\big((1\,;2\,;0),(-5\,;0\,;2)\big)$

13. b) $1\,;\ \varphi = 14.29°$ c) $\sqrt{3 - 4\ln(2)}$ d) $x \mapsto \dfrac{4(e-2)}{e^2-1}\,xe^x$

14. a) $\dim(S) = 3$ c) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

16. b) Si $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$

18. $H = \{(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) \mid x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0\}$
$\quad = L\big((2\,;1\,;0\,;0),(0\,;0\,;1\,;0),(-3\,;0\,;0\,;1)\big)$

19. a) non b) oui

20. $i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,;1\,;0)$ $j = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,;-1\,;2)$ $k = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,;-1\,;-1)$

22. a) $(A \cdot B) \cdot {}^t(A \cdot B) = A \cdot B \cdot {}^tB \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA = I$

b) La composée de deux isométries est encore une isométrie.

23. a) $h(x\,;y\,;z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z\,;-2x + y - 2z\,;-2x - 2y + z)$

b) L'ensemble cherché est le plan α d'équation $x + y + z = 0$. L'application h est une isométrie vectorielle (qui conserve la norme et le produit scalaire). Comme il ne s'agit pas de l'identité, h est la symétrie orthogonale par rapport au plan α.

24. a) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

25. a) $E_1 = L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ et $E_0 = L\big((2\,;4\,;-5)\big)$
projection sur le plan E_1 parallèlement à la droite E_0

b) $E_1 = L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ et $E_{-1} = L\big((2\,;4\,;-5)\big)$
symétrie par rapport au plan E_1 parallèlement à la droite E_{-1}

c) $E_1 = L\big((2\,;1\,;1)\big)$ et $E_{-1} = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;0)\big)$
symétrie axiale d'axe E_1 parallèlement au plan E_{-1}

26. a) $\mathcal{B}' = \big((-b\,;a)\,;(a\,;b)\big)$ b) $M = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$

27. a) Symétrie centrale ou rotation d'angle 180°

b) Symétrie orthogonale d'axe Oy

c) Rotation d'angle $-t$

d) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((\cos(\frac{t}{2})\,;\,\sin(\frac{t}{2})\big)$

e) Rotation d'angle $-90°$

f) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((1\,;5)\big)$

28. Pour $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tM = M^{-1}$ et $\mathrm{Det}(M) = -1$.

L'application f est une symétrie orthogonale d'axe $L\big((\sqrt{3}\,;1)\big)$ qui forme avec l'axe Ox un angle de 30°.

30. $A'\left(\frac{7+2\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$, $B'\left(\frac{11+2\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{7\sqrt{3}+4}{2}\right)$, $C'\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{7\sqrt{3}+7}{2}\right)$

31. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $M_g \cdot M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, angle $= 60°$

32. $P'(5.2\,;4.6)$

33. a) $U = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $U + V = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $U \cdot V = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et

$U \cdot V^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -14 & -23 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

34. a) Symétrie orthogonale d'axe Oz

b) Rotation d'angle 36.87° autour de l'axe Oz

c) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((6\,;-3\,;2)\big)$

d) Symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x+y-2z=0$

e) Rotation d'angle 73.40° autour de l'axe $L\big((-2\,;1\,;0)\big)$

f) Composée d'une rotation autour de l'axe $L\big((1\,;-4\,;-2)\big)$, d'angle 24.62°, et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 4y - 2z = 0$

35. a) Le produit de deux matrices orthogonales de déterminant +1 est une matrice orthogonale de déterminant +1.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle −60° autour de l'axe $L\big((1\,;-1\,;1)\big)$

36. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 34 & -19 & 2 \\ 13 & 26 & 26 \\ -14 & -22 & 29 \end{pmatrix}$

rotation d'angle 50.13° autour de l'axe $L\big((-3\,;1\,;2)\big)$

37. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Rotation d'angle 120° autour de l'axe $L\big((1\,;1\,;1)\big)$

c) Matrice de t : $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

L'endomorphisme t est une symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

38. $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & 11 & 2+4\sqrt{3} \\ 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ et sa transposée

39. a) $M^2 = I_3$ signifie $M^{-1} = M$.
Mais comme ${}^tM = M^{-1}$, on en déduit ${}^tM = M$.

b) Ce sont les rotations d'angle 180° autour d'un axe, les symétries orthogonales par rapport à un plan et la symétrie centrale ($-\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}$).

40. a) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

41. On trouve

$$\left({}^tM \cdot M\right)^{-1} = \frac{1}{1056}\begin{pmatrix} 8 & -56 \\ -56 & 524 \end{pmatrix}$$

puis la droite de régression d'équation

$$y = \frac{7}{11}x + \frac{6}{11}$$