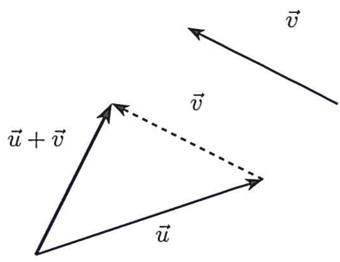
2 Espaces vectoriels

2.1 Exemples et définitions

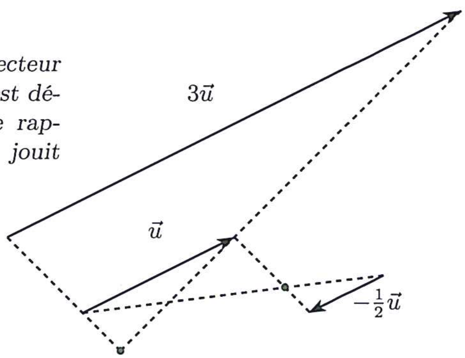
Exemple 1. *On considère l'ensemble V_2 des vecteurs du plan.*

Dans V_2, on définit une addition comme illustrée dans le dessin ci-contre. Cette addition vectorielle jouit des propriétés suivantes.



1. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
2. $\vec{o}$ *est l'élément neutre :* $\vec{o}+\vec{u}=\vec{u}$
3. *Pour tout* $\vec{u}$, *il existe un unique vecteur, noté* $-\vec{u}$, *tel que* $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{o}$.
4. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

La multiplication d'un vecteur de V_2 par un nombre réel λ est définie par une homothétie de rapport λ. Cette multiplication jouit des propriétés suivantes.



5. $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$
6. $1\vec{u}=\vec{u}$
7. $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
8. $(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

L'ensemble V_2 des vecteurs du plan, muni de ces deux opérations, est appelé un espace vectoriel. D'autres ensembles, munis de deux opérations jouissant des mêmes propriétés, seront aussi appelés espaces vectoriels.

Exemple 2. *Considérons l'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de type 2×3. On peut additionner deux matrices et multiplier une matrice par un nombre réel (voir page 10). L'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel, car cette structure vérifie les mêmes propriétés fondamentales que celles de l'exemple 1.*

Exemple 3. *Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. On définit une addition*

$$(x_1\,;x_2) + (y_1\,;y_2) = (x_1 + y_1\,;x_2 + y_2)$$

et une multiplication par un nombre réel λ

$$\lambda \cdot (x_1\,;x_2) = (\lambda x_1\,;\lambda x_2)$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est aussi un espace vectoriel.

Exemple 4. *Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. On peut additionner deux fonctions f et g.*

$$\begin{array}{llll} f+g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

On peut également multiplier une fonction f par un nombre réel λ

$$\begin{array}{llll} \lambda \cdot f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel.

Un **espace vectoriel** réel est un triplet $(E\,;+\,;\cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une opération interne dans E, appelée **addition** et notée $+$, et d'une loi de composition externe, appelée **multiplication par un réel** et notée $\cdot$, satisfaisant aux huit propriétés suivantes, pour tout élément u, v, w de E et tout nombre réel α et β.

Addition

1.	$(u+v)+w = u+(v+w)$	*associativité*
2.	Il existe un élément neutre dans E, noté o et tel que $u+o = o+u = u$	*élément neutre*
3.	Pour chaque élément u de E, il existe un élément opposé, noté $-u$, tel que $u+(-u) = (-u)+u = o$	*élément opposé*
4.	$u+v = v+u$	*commutativité*

L'ensemble E, muni de l'addition satisfaisant ces quatre propriétés est un **groupe commutatif** ou **abélien**. On peut définir dans cet ensemble la **soustraction** par $u - v = u + (-v)$.

Multiplication par un réel

5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$
6. $1 \cdot u = u$

Deux propriétés lient ces deux opérations.

7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

Les éléments de E sont des **vecteurs.** Les nombres réels sont aussi appelés **scalaires.** L'élément neutre de l'addition est le **vecteur nul.**

Pour alléger la notation, le produit $\alpha \cdot u$ sera souvent noté αu. De même, on parlera de l'espace vectoriel E au lieu de l'espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$.

Exemple 5. *On considère l'ensemble $\mathbb{R}^n$ formé de tous les n-uplets de nombres réels $(x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n)$. On définit l'addition de deux n-uplets par l'addition des éléments respectifs*

$$(x_1\,;x_2;\ldots\,;x_n) + (y_1\,;y_2\,;\,\ldots\,;y_n) = (x_1 + y_1\,;x_2 + y_2\,;\,\ldots\,;\,x_n + y_n)$$

et la multiplication par un scalaire λ comme la multiplication de chaque élément par le nombre réel λ.

$$\lambda \cdot (x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n) = (\lambda x_1\,;\lambda x_2\,;\,\ldots\,;\lambda x_n)$$

On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, vérifie les huit propriétés de la définition d'un espace vectoriel.
Le vecteur nul est alors $o = (0\,;0\,;\,\ldots\,;0)$.

Exemple 6. *On considère l'ensemble $\mathbb{P}_2$ des polynômes réels à une variable x, de degré inférieur ou égal à 2. On définit une addition*

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

et une multiplication par un scalaire

$$\lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0$$

On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{P}_2$, muni de ces deux opérations, vérifie les huit propriétés de la définition d'un espace vectoriel.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Un sous-ensemble non-vide F d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$ est un **sous-espace vectoriel** de E si $(F\,;\,+\,;\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.

Propriétés

1. Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel si, pour tout $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.
2. Tout sous-espace vectoriel F de E contient l'élément neutre o de E, car pour un vecteur u de F, on a $0 \cdot u \in F$ et $0 \cdot u = o$.

Exemple 1. *On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan V_2.*
L'ensemble $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de V_2.

Exemple 2. *L'ensemble $\big\{(t\,; 2t) \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 3. *L'ensemble des vecteurs $(x\,; y\,; z)$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant l'équation $2x - 3y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 4. *Les ensembles E et $\{o\}$ sont les sous-espaces vectoriels triviaux d'un espace vectoriel E.*

Exemple 5. *L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles.*

Exemple 6. *La solution générale d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*
En effet, sous forme matricielle, le système s'écrit $A \cdot X = O$. Si X et Y sont deux solutions du système et λ un nombre réel, on a
1. $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y = O + O = O$
2. $A \cdot (\lambda X) = \lambda(A \cdot X) = \lambda O = O$

2.3 Combinaison linéaire et espace engendré

On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,; +\,; \cdot)$.
Un vecteur v de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ s'il peut s'écrire sous la forme

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

où les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 1. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$, *on considère les deux vecteurs* $u_1 = (2\,;1)$ *et* $u_2 = (2\,;-1)$. *Le vecteur* $v = u_1 + 2u_2 = (6\,;-1)$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* u_1 *et* u_2.

Exemple 2. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_2$, *le polynôme* $5x^2 - 3x + 2$ *est une combinaison linéaire des polynômes* $u_1 = x^2$, $u_2 = x$ *et* $u_3 = 1$.

Théorème 1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de E est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace, noté $L(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, est l'**espace engendré** par $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Exemple 3. *L'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *est engendré par les deux vecteurs* $e_1 = (1\,;0)$ *et* $e_2 = (0\,;1)$, *mais aussi par les trois vecteurs* $u_1 = (1\,;1)$, $u_2 = (-1\,;2)$ *et* $u_3 = (2\,;1)$.

Exemple 4. *L'ensemble des solutions de l'équation* $2x - y = 0$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$, *engendré par le vecteur* $u = (1\,;2)$.

Exemple 5. *L'ensemble des solutions du système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 4y & + & 9z & - & 7t & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & t & = & 0 \\ 5x & - & 6y & + & 10z & + & 7t & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $u = (2\,;5\,;2\,;0)$ *et* $v = (-5\,;-3\,;0\,;1)$. *On le note* $L\big((2\,;5\,;2\,;0), (-5\,;-3\,;0\,;1)\big)$.

Exemple 6. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* $(0\,;1\,;2)$ *et* $(1\,;1\,;1)$ *est l'ensemble des triplets* $(x\,;y\,;z)$ *de nombres réels qui satisfont l'équation* $x - 2y + z = 0$.
En effet, un élément $(x\,;y\,;z)$ *de* $L\big((0\,;1\,;2), (1\,;1\,;1)\big)$ *peut s'écrire sous la forme* $(x\,;y\,;z) = \lambda(0\,;1\,;2) + \mu(1\,;1\,;1)$. *Cette équation peut être décomposée en trois équations.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \mu \\ y & = & \lambda + \mu \\ z & = & 2\lambda + \mu \end{array}\right.$$

En éliminant le paramètre μ, *on trouve*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda + x \\ z & = & 2\lambda + x \end{array}\right.$$

L'élimination du paramètre λ *donne finalement*

$$x - 2y + z = 0$$

Le sous-espace $L\big((0\,;1\,;2)\,;(1\,;1\,;1)\big)$ *est appelé plan vectoriel.*

2.4 Indépendance linéaire

On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$. Ces vecteurs sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = o \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Ce qui signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = o$.

Exemple 1. *Les vecteurs* $(1\,;0)$, $(0\,;1)$ *et* $(1\,;1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont linéairement dépendants car*

$$1 \cdot (1\,;0) + 1 \cdot (0\,;1) - 1 \cdot (1\,;1) = (0\,;0)$$

Théorème 2. Des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple 2. *Les vecteurs* $(1\,;-2\,;0)$, $(2\,;1\,;2)$ *et* $(3\,;4\,;4)$ *sont linéairement dépendants car* $(3\,;4\,;4) = (-1) \cdot (1\,;-2\,;0) + 2 \cdot (2\,;1\,;2)$.

Exemple 3. *Les vecteurs* $u_1 = (0\,;1\,;1)$, $u_2 = (1\,;2\,;1)$ *et* $u_3 = (-1\,;0\,;2)$ *sont linéairement indépendants. En effet, l'équation* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = o$ *amène à résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme le déterminant du système est différent de 0, la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 4. *Les vecteurs* $u_1 = x^2 + x$, $u_2 = x - 1$, $u_3 = x + 1$ *et* $u_4 = 1$ *de l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_2$ *sont linéairement dépendants car* $u_2 = u_3 - 2u_4$.

Exemple 5. *Les vecteurs* $e_1 = (1\,;0)$, $e_2 = (0\,;1)$ *et* $u = (1\,;1)$ *engendrent l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$. *En effet, tout vecteur* $(x\,;y)$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire de* e_1, e_2 *et* u. *On a*

$$(x\,;y) = xe_1 + ye_2 + 0u$$

Mais cette écriture n'est pas unique. On a également

$$(x\,;y) = (x-1)e_1 + (y-1)e_2 + 1u$$

Les vecteurs e_1, e_2 *et* u *engendrent l'espace* $\mathbb{R}^2$, *mais sont linéairement dépendants.*

2.5 Bases et dimension

On considère un espace vectoriel $(E\,;+\,;\cdot\,)$. Une **base** de E est un ensemble ordonné $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;\,\ldots\,;e_n)$ de vecteurs de E, linéairement indépendants, qui engendrent E.

Exemple 1. *Tout vecteur $u = (x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1\,;0)$ et $e_2 = (0\,;1)$. Les vecteurs e_1 et e_2 sont linéairement indépendants. L'ensemble ordonné $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ forme par conséquent une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base est appelée base canonique. Les scalaires x et y sont les composantes du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. On représente le vecteur u par une matrice-colonne U dont les éléments sont les composantes du vecteur u.*

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Théorème 3. On considère un espace vectoriel $(E,+,\cdot\,)$ et une base $\mathcal{B}$ de E. Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Comme les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;\,\ldots\,;e_n)$ engendrent l'espace E, tout vecteur u de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Supposons qu'un vecteur u s'écrive de deux manières différentes.

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

On a alors

$$o = u - u = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n$$

Comme $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants, tous les coefficients doivent être nuls et donc $\alpha_i = \beta_i$, pour tout i. L'écriture de u comme combinaison linéaire des vecteurs de $(e_1\,;e_2\,;\,\ldots\,;e_n)$ est donc unique. □

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut écrire chaque vecteur u de manière unique comme $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n$. Les réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont les **composantes** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. On peut représenter le vecteur u par la matrice-colonne

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Si U et V sont les matrices-colonne des vecteurs u et v respectivement, par rapport à la même base $\mathcal{B}$, alors la matrice-colonne $U+V$ représente le vecteur $u+v$ et la matrice-colonne λU représente le vecteur λu.

Exemple 2. *Les vecteurs* $e_1=(1\,;0\,;0)$, $e_2=(0\,;1\,;0)$ *et* $e_3=(0\,;0\,;1)$ *forment la base canonique de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$. *Relativement à cette base, le vecteur* $(4\,;5\,;-2)$ *est représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$.

D'une manière générale, les vecteurs

$$e_1=(1\,;0\,;\ldots\,;0),e_2=(0\,;1\,;0\,;\ldots\,;0),\ldots,e_n=(0\,;\ldots\,;0\,;1)$$

forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3. *Le vecteur* $u=(2\,;3)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sera représenté dans la base canonique par la matrice-colonne* $U=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. *Les vecteurs* $e_1=(-1\,;2)$ *et* $e_2=(1\,;-1)$ *forment aussi une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$. *Dans cette base, le vecteur* $u=(2\,;3)$ *s'écrit* $(2\,;3)=5e_1+7e_2$ *et sera représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$.

Exemple 4. *L'ensemble ordonné* $(1\,;x\,;x^2)$ *est une base de* $\mathbb{P}_2$. *Relativement à cette base, le polynôme* $3x^2-7x+2$ *peut donc être représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix}2\\-7\\3\end{pmatrix}$.

Exemple 5. *On considère les vecteurs* $v_1=(1\,;2\,;0)$, $v_2=(1\,;0\,;1)$, $v_3=(2\,;6\,;-1)$, $v_4=(1\,;0\,;0)$ *et* $v_5=(-1\,;-2\,;-1)$. *Ces vecteurs engendrent l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *mais ne sont pas linéairement indépendants. On a, par exemple,* $v_4=-2v_1+2v_2+v_3+v_5$. *L'ensemble réduit formé des vecteurs* $\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$ *engendre par conséquent* $\mathbb{R}^3$. *Mais ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. On a par exemple* $v_3=3v_1-v_2$. *Les vecteurs* v_1, v_2 *et* v_5 *engendrent* $\mathbb{R}^3$ *et sont eux linéairement indépendants : l'équation* $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_5v_5=o$ *amène à résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_5 & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & - & 2\lambda_5 & = & 0\\ & & \lambda_2 & - & \lambda_5 & = & 0\end{array}\right.$$

qui ne possède que la solution triviale $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$.
L'ensemble ordonné de vecteurs $\mathcal{B}_1=(v_1\,;v_2\,;v_5)$ *est donc une base de* $\mathbb{R}^3$.
Une autre base de $\mathbb{R}^3$ *peut être construite à l'aide des vecteurs* v_1, v_2 *et* v_5. *Il suffit de modifier l'ordre en prenant par exemple* $\mathcal{B}_2=(v_2\,;v_1\,;v_5)$.

Le vecteur u représenté par la matrice-colonne $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_1$ sera représenté par la matrice-colonne $U_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Théorème 4. On considère un espace vectoriel E différent de $\{o\}$ et un ensemble fini $\mathcal{F}$ de vecteurs qui engendrent E. On peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Démonstration. On note $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un ensemble de vecteurs qui engendrent l'espace vectoriel E. On peut considérer deux cas. Tout d'abord, si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants, alors cet ensemble, une fois ordonné, forme une base de E. Sinon, on peut écrire l'un de ces vecteurs comme combinaison linéaire des autres. Pour simplifier, choisissons v_p. L'ensemble $\mathcal{F}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ engendre aussi E. Si ces vecteurs sont linéairement indépendants, alors cet ensemble ordonné forme une base de E, sinon, l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. En poursuivant ce processus, on finit par obtenir une base de E. □

Exemple 6. *Dans l'exemple précédent, les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 engendraient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Considérons maintenant les vecteurs $u_1 = (5\,;3\,;0)$ et $u_2 = (4\,;1\,;0)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants mais n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $(4\,;1\,;2)$ ne peut être écrit à l'aide des vecteurs u_1 et u_2. On peut compléter l'ensemble $\{u_1\,;u_2\}$ à l'aide de vecteurs choisis dans $\{v_1\,;v_2\,;v_3\,;v_4\,;v_5\}$ pour former une base de $\mathbb{R}^3$. On choisit le premier vecteur v_1, mais on constate que les vecteurs u_1, u_2 et v_1 sont linéairement dépendants. En effet, $v_1 = u_1 - u_2$. On essaie alors avec v_2 et on constate que les vecteurs u_1, u_2 et v_2 sont linéairement indépendants. On ajoute ensuite à $\{u_1\,;u_2\,;v_2\}$ le vecteur v_3. Mais $v_3 = 3u_1 - 3u_2 - v_2$. Ces quatre vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants. En poursuivant ainsi, on arrive à montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 peuvent être écrits à l'aide des vecteurs u_1, u_2 et v_2. Ceux-ci engendrent par conséquent aussi $\mathbb{R}^3$. Comme ils sont linéairement indépendants, l'ensemble ordonné $(u_1\,;u_2\,;v_2)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.*

Théorème 5. On considère $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants et $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un ensemble de vecteurs qui engendrent un espace vectoriel E. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ n'est pas une base de E, on peut extraire de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ des vecteurs $v_{s_1}, v_{s_2}, \ldots, v_{s_m}$ tels que $(u_1\,; u_2\,; \ldots\,; u_k\,; v_{s_1}\,; v_{s_2}\,; \ldots\,; v_{s_m})$ est une base de E.

Théorème 6. On considère un espace vectoriel E et une base $\mathcal{B}$ de E comportant n vecteurs. Si l'on choisit un nombre m de vecteurs de E, avec $m > n$, alors ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Corollaire 1. Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la **dimension de l'espace vectoriel** E et sera noté $\dim(E)$.

Corollaire 2. Si $\dim(E) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs linéairement indépendants de E est une base de E.

Corollaire 3. Si $\dim(E) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs qui engendrent E est une base de E.

> **Exemple 7.** *L'espace vectoriel V_2 des vecteurs du plan est de dimension 2 et l'espace vectoriel V_3 des vecteurs de l'espace est de dimension 3.*

> **Exemple 8.** *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.*

> **Exemple 9.** $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$

Remarques

1. Par convention, l'espace vectoriel $\{o\}$ est de dimension 0.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{P}$ de tous les polynômes définis sur $\mathbb{R}$, ne peut pas être engendré par un nombre fini de vecteurs. Il est de dimension infinie. Une base possible est $\mathcal{B} = (1\,; x\,; x^2\,; x^3\,; \ldots)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

On considère un espace vectoriel E de dimension n et un sous-espace vectoriel F de E. On a alors

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$
2. $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$

> **Exemple 10.** *Les vecteurs $u_1 = (-2\,; 1\,; 0)$ et $u_2 = (1\,; 0\,; 1)$ sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Ce sous-espace est le plan défini par l'équation $x + 2y - z = 0$.*

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une **droite vectorielle**.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un **plan vectoriel**.

2.6 Exercices

1. Montrer que l'ensemble des matrices $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire (voir page 10) est un espace vectoriel.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition comme loi de composition interne et on définit la multiplication par un scalaire ainsi : $\lambda u = o$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

3. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition suivantes.

$$\begin{array}{rcc} (x\,;y) + (x'\,;y') & = & (x + x'\,;y + y') \\ \lambda \cdot (x\,;y) & = & (\lambda x\,;y) \end{array}$$

Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

4. On considère dans l'espace V_2 des vecteurs du plan, le sous-ensemble V_+ des vecteurs ayant leurs deux composantes positives. Montrer que ce sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

5. On considère des vecteurs u, v et w d'un espace vectoriel $(E;\, +\, ;\cdot)$. Montrer que

a) Si $u + v = u + w$, alors $v = w$.

b) $0 \cdot u = o$

c) $(-1) \cdot u = -u$

6. On considère des vecteurs u et v d'un espace vectoriel $(E\,;\, +\, ;\cdot)$ et des nombres réels λ et μ. Montrer que

a) Si $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$ et $u \neq o$, alors $\lambda = \mu$.

b) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$

c) $(-\lambda) \cdot (-u) = \lambda \cdot u$

7. a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}_3$ des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3, muni des opérations habituelles d'addition de polynômes et de multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un espace vectoriel.

b) Même question pour l'ensemble $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$.

8. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et les opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire. Indiquer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

a) $A_1 = \{(x\,;y) \mid 2x+y=0\}$

b) $A_2 = \{(x\,;y) \mid 2x+y=1\}$

c) $A_3 = \{(x\,;y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

d) $A_4 = \{(a-b\,;a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

9. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ et les opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire. Indiquer lesquels sont des espaces vectoriels.

a) $B_1 = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x+y-4z=0\}$

b) $B_2 = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x+y-4z=1\}$

c) $B_3 = \{(x\,;2x+2\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $B_4 = \{(x\,;2x\,;3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

e) $B_5 = \{(a-b+c\,;a+b-c, 2a+3b) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

f) $B_6 = \{(x\,;y\,;z) \mid x+y=y+z=z+x\}$

10. On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des fonctions définies par $f(x) = a\cos(x)+b$, avec $a,b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{T}$ muni des opérations habituelles d'addition de fonctions et de multiplication d'une fonction par un scalaire est un espace vectoriel.

11. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles paires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles impaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

12. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel.

13. Une entreprise produit deux articles. Pour l'article A, elle compte 7.– de matières premières, 3.– de coût de production et 1.– de frais généraux. Pour la fabrication de l'article B, ces frais sont de 4.–, 2.– et 1.– respectivement. On pose $a = (7\,;3\,;1)$ et $b = (4\,;2\,;1)$.

a) Quelle interprétation économique peut-on donner au vecteur $5a$?

b) Utiliser une combinaison linéaire de a et b pour décrire les coûts de fabrication de 23 articles A et 72 articles B.

c) Sachant que les coûts des matières premières d'une certaine production s'élèvent à 1400.– et les frais généraux à 260.– peut-on retrouver le nombre d'articles fabriqués de chaque type ?

14. En physique, le centre de masse G d'un système formé de k points P_i est défini par la combinaison linéaire

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} m_i\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{m}\vec{r_i}$$

où m_i est une masse ponctuelle, $m = \sum m_i$ la masse totale du système et $\vec{r_i} = \overrightarrow{OP_i}$ le rayon-vecteur du point P_i.
Calculer le centre de masse des quatre points donnés dans le tableau suivant.

point	masse en g
$P_1(5\,;1\,;3)$	2
$P_2(4\,;0\,;-2)$	5
$P_3(-3\,;-3\,;4)$	2
$P_4(7\,;2\,;2)$	1

15. Pourquoi $\mathbb{R}^2$ n'est-il pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

16. a) Les vecteurs $x = (22\,;-35\,;-27)$ et $y = (10\,;5\,;3)$ appartiennent-ils au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1\,;0\,;1)$ et $(-3\,;5\,;4)$?

b) Les vecteurs $x = (1\,;0\,;0\,;0)$ et $y = (6\,;34\,;-26\,;17)$ appartiennent-ils au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(5\,;8\,;-5\,;3)$, $(-5\,;8\,;-9\,;-2)$ et $(-9\,;-6\,;3\,;7)$?

17. a) Montrer que les fonctions $f\colon x \mapsto e^x$ et $g\colon x \mapsto e^{-x}$ sont linéairement indépendantes.

b) Exprimer les fonctions $x \mapsto \cosh(x)$ et $x \mapsto \sinh(x)$ comme combinaisons linéaires de f et de g.

c) Les fonctions f, g et $h\colon x \mapsto \cosh(x+1)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

18. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1\,;2)$ et $u_2 = (-1\,;2)$ sont linéairement indépendants. Écrire ensuite les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base $(u_1\,;u_2)$.

19. Montrer que les trois vecteurs $u_1 = (1\,;-2\,;1)$, $u_2 = (-1\,;0\,;1)$ et $u_3 = (2\,;1\,;0)$ sont linéairement indépendants. Écrire ensuite les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $(u_1\,;u_2\,;u_3)$.

20. On donne trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $u = (-1\,;1)$, $v = (2\,;1)$ et $x = (4\,;5)$. Montrer que l'ensemble ordonné de vecteurs $(u\,;v)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer x dans cette base.

21. Une pyramide de sommet S a pour base un carré $ABCD$. Trouver les composantes du vecteur $\overrightarrow{SD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{SA}\,;\overrightarrow{SB}\,;\overrightarrow{SC}\right)$ et écrire la matrice-colonne correspondante.

22. Les vecteurs indiqués forment-ils une base de l'espace mentionné ?

a)	$(1\,;0)$, $(1\,;2)$	$\mathbb{R}^2$
b)	$(0\,;1)$, $(0\,;2)$, $(1\,;2)$	$\mathbb{R}^2$
c)	$(-1\,;3)$, $(2\,;-6)$	$\mathbb{R}^2$
d)	$(1\,;2\,;1)$, $(-3\,;1\,;2)$, $(-5\,;4\,;5)$	$\mathbb{R}^3$
e)	$(1\,;0\,;3)$, $(1\,;0\,;1)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^3$
f)	$(1\,;0\,;0)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^3$
g)	$(1\,;0\,;0)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^2$

23. Montrer que l'ensemble ordonné de polynômes $(x^2 + x\,;x + 1\,;1)$ est une base de $\mathbb{P}_2$. Représenter ensuite les polynômes suivants par des matrices-colonne relativement à cette base.

a) $p(x) = 1$ b) $q(x) = x$ c) $r(x) = x^2$ d) $s(x) = 3x^2 - 7x + 2$

24. L'ensemble ordonné de polynômes $(1 + x^2\,;4 + x + 5x^2\,;3 + 2x)$ est-il une base de $\mathbb{P}_2$?

25. Trouver une base de l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation linéaire $x + y = 0$.

26. Montrer que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner la dimension et une base de ce sous-espace vectoriel.

27. Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & & & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

28. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

a) $(1\,;-2\,;1)$, $(1\,;3\,;2)$ et $(0\,;5\,;1)$

b) $(1\,;4\,;2)$ et $(2\,;3\,;1)$

c) $(1\,;-3\,;2)$, $(2\,;5\,;4)$ et $(5\,;1\,;3)$

d) $(1\,;-2\,;2)$ et $(-2\,;4\,;-4)$

e) $(1\,;4\,;2)$, $(-2\,;-7\,;3)$ et $(1\,;5\,;9)$

f) $(1\,;-2\,;4)$, $(2\,;3\,;-6)$, $(1\,;3\,;-6)$ et $(5\,;9\,;-18)$

29. Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants.

a) $A = \big\{(x\,;y) \mid y = 2x\big\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $B = \big\{(x\,;y\,;z) \mid y = 2x \text{ et } z = -3x\big\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $C = \big\{(x\,;y\,;z) \mid -2x + y + z = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3$

d) $D = \big\{(x\,;y\,;z) \mid y = 5x - 3z\big\} \subset \mathbb{R}^3$

30. Trouver une base et la dimension des sous-espaces engendrés par les vecteurs des ensembles donnés.

a) $A = \{(-2\,;1), (4\,;-2)\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $B = \{(-1\,;3), (2\,;1)\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $C = \{(-1\,;3), (2\,;1), (3\,;2)\} \subset \mathbb{R}^2$

d) $D = \{(2\,;-1\,;3)\} \subset \mathbb{R}^3$

e) $E = \{(-1\,;2\,;2), (2\,;-1\,;1), (-1\,;5\,;7)\} \subset \mathbb{R}^3$

f) $F = \{(2\,;1\,;-4), (1\,;3\,;-2), (2\,;1\,;5)\} \subset \mathbb{R}^3$

31. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(0\,;1\,;0\,;1)$, $(2\,;1\,;2\,;1)$, $(1\,;0\,;1\,;0)$ et $(3\,;-3\,;3\,;-3)$.

32. Donner une base de l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par $\sin(t)$, $\sin(2t)$ et $\sin(t)\cos(t)$.

33. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs donnés de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

34. Déterminer la dimension de $F = L(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1\,;2\,;0)$, $u_2 = (1\,;-1\,;2)$ et $u_3 = (1\,;-7\,;6)$.
Trouver ensuite une base de ce sous-espace vectoriel.

35. On donne les vecteurs $u_1 = (1\,;0\,;-1)$, $u_2 = (2\,;1\,;3)$, $u_3 = (1\,;1\,;4)$ et $v = (3\,;1\,;2)$.

a) Montrer que v appartient à $L(u_1, u_2, u_3)$.

b) Quelle est la dimension de $L(u_1, u_2, u_3)$?

c) Donner une base de $L(u_1, u_2, u_3)$.

36. On considère deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot\,)$. Montrer que $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

37. Donner la dimension des sous-espaces vectoriels des matrices carrées d'ordre 3 qui sont

a) diagonales,

b) triangulaires inférieures,

c) symétriques.

38. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les deux sous-espaces vectoriels définis par $F = \{(x\,;y\,;z) \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x\,;y\,;z) \mid y + 2z = 0\}$.

a) Trouver une base de chacun de ces sous-espaces.

b) Déterminer $F \cap G$ et trouver une base de ce sous-espace vectoriel.

39. On peut démontrer que l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n.

Montrer que les fonctions $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation du mouvement d'oscillation harmonique

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

En déduire la solution générale de cette équation différentielle.

Réponses aux exercices du chapitre 2

2. Non, $1 \cdot u \neq u$ par exemple

3. La propriété 8 n'est pas satisfaite car, par exemple $(2+3)\cdot(1\,;1) \neq 2\cdot(1\,;1) + 3\cdot(1\,;1)$

4. Si $u \in V_+$ et $\lambda < 0$, alors $\lambda \cdot u \notin V_+$

8. A_1, A_4

9. B_1, B_4, B_5 et B_6

13. a) Le vecteur $5a = (35\,;15\,;5)$ représente les divers frais de production pour 5 articles A.

b) $23a + 72b = (449\,;213\,;95)$

c) 120 articles A et 140 articles B

14. $G(3.1\,;-0.2\,;0.6)$

16. a) x appartient, y n'appartient pas
b) x n'appartient pas, y appartient

17. b) $\cosh(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ et $\sinh(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

c) non

18. $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

19. $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

20. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

21. $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. a) oui, b) non, c) non, d) non, e) oui, f) non, g) non

23. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

24. oui

25. Le sous-espace vectoriel est engendré par le vecteur $v = (1; -1)$.

26. Dimension $= 3$, base possible : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

27. Ce sous-espace de dimension 1 est $L\big((2\,;-3\,;1)\big)$.

28. a) $\big((1\,;-2\,;1)\,;(1\,;3\,;2)\big)$ b) $\big((1\,;4\,;2)\,;(2\,;3\,;1)\big)$
c) $\big((1\,;-3\,;2)\,;(2\,;5\,;4)\,;(5\,;1\,;3)\big)$ d) $\big((1\,;-2\,;2)\big)$
e) $\big((1\,;4\,;2)\,;(-2\,;-7\,;3)\big)$ f) $\big((1\,;-2\,;4)\,;(2\,;3\,;-6)\big)$

29. a) $\dim(A) = 1$, $\mathcal{B} = \big((1\,;2)\big)$ b) $\dim(B) = 1$, $\mathcal{B} = \big((1\,;2\,;-3)\big)$

c) $\dim(C) = 2$, $\mathcal{B} = \big((1\,;0\,;2)\,;(1\,;2\,;0)\big)$

d) $\dim(D) = 2$, $\mathcal{B} = \big((0\,;-3\,;1)\,;(1\,;5\,;0)\big)$

30. a) $\mathcal{B} = \big((-2\,;1)\big)$, $\dim(A) = 1$

b) $\mathcal{B} = \big((-1\,;3)\,;(2\,;1)\big)$, $\dim(B) = 2$

c) $\mathcal{B} = \big((-1\,;3)\,;(2\,;1)\big)$, $\dim(C) = 2$

d) $\mathcal{B} = \big((2\,;-1\,;3)\big)$, $\dim(D) = 1$

e) $\mathcal{B} = \big((-1\,;2\,;2)\,;(2\,;-1\,;1)\big)$, $\dim(E) = 2$

f) $\mathcal{B} = \big((2\,;1\,;-4)\,;(1\,;3\,;-2)\,;(2\,;1\,;5)\big)$, $\dim(F) = 3$

31. $\big((0\,;1\,;0\,;1)\,;(1\,;0\,;1\,;0)\big)$ par exemple

32. $\big(\sin(t)\,;\,\sin(2t)\big)$ par exemple

33. a) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right)$. Espace engendré de dimension 2.

b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$. Espace engendré de dimension 2.

34. $\dim(F) = 2$ $\qquad \mathcal{B}_F = \big(u_1\,;u_2\big)$

35. a) $v = u_1 + u_2$ $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) $\mathcal{B} = \big(u_1\,;u_2\big)$

37. a) 3 $\quad$ b) 6 $\quad$ c) 6

38. a) $\mathcal{B}_F = \big((-2\,;1\,;0)\,;(-1\,;0\,;1)\big)$ $\qquad \mathcal{B}_G = \big((1\,;0\,;0)\,;(0\,;-2\,;1)\big)$

b) $F \cap G = \big\{(3t\,;-2t\,;t), t \in \mathbb{R}\big\}$, $\mathcal{B} = \big((3\,;-2\,;1)\big)$

39. $y = \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ $\quad$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$