1 Calcul matriciel

1.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1. *On se propose de résoudre le système suivant selon la méthode dite de Gauss-Jordan.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 10y & + & 7z & = & 8 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

On échange d'abord les équations n° 1 et n° 3, ce que l'on note $L_1 \leftrightarrow L_3$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|r|r} x & + & 2y & + & z & = & 1 & -2 & -4 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 & 1 & \\ 4x & + & 10y & + & 7z & = & 8 & & 1 \end{array}\right.$$

En utilisant la première équation comme « équation de référence », on élimine l'inconnue x dans les deux autres équations par méthode d'addition (on additionne à chaque équation un multiple de l'équation de référence). On écrit aussi $L_2 - 2L_1 \to L_2$ et $L_3 - 4L_1 \to L_3$ et on obtient le système suivant, équivalent au système donné.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} x & + & 2y & + & z & = & 1 & \\ & - & 3y & - & 3z & = & -3 & \cdot(-\frac{1}{3}) \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 & \end{array}\right.$$

On multiplie la deuxième équation par $-\frac{1}{3}$, ce que l'on note $-\frac{1}{3}L_2 \to L_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|r} x & + & 2y & + & z & = & 1 & \\ & & y & + & z & = & 1 & -2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 & 1 \end{array}\right.$$

Avec la deuxième équation, on élimine l'inconnue y dans l'équation n° 3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système échelonné ainsi obtenu est équivalent au système donné. Pour le résoudre, il suffit de procéder par substitutions successives en commençant par la dernière équation. On peut néanmoins poursuivre la résolution en éliminant y dans la première équation, puis z dans les deux premières. On obtient successivement les systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & \boxed{y} & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right. \quad \left| \quad L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & \boxed{z} & = & 2 \end{array}\right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} L_1 + L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1 \\ & & y & & & = & -1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Sous cette forme réduite, la solution est immédiate : $S = \big\{(1\,;-1\,;2)\big\}$.

Résolution d'un système linéaire

Deux systèmes d'équations sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

À partir d'un système d'équations donné, on obtient un système équivalent lorsqu'on le transforme à l'aide de l'une des **opérations élémentaires** suivantes.

1. On permute deux équations, ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. On multiplie une équation par un nombre réel non nul, ce que l'on note $\lambda L_i \rightarrow L_i$.
3. On additionne à une équation un multiple d'une autre équation, ce que l'on note $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$.

La méthode usuelle pour résoudre un système linéaire consiste à le transformer en un système équivalent **échelonné** (méthode de Gauss[1]) ou **réduit** (méthode de Gauss-Jordan[2]). Dans ce dernier cas, la solution est immédiate.

Un système linéaire est **régulier** s'il admet une solution unique ; habituellement un tel système contient autant d'équations que d'inconnues. Un système formé de plus d'équations que d'inconnues est généralement **impossible** (aucune solution), alors qu'un nombre insuffisant d'équations caractérise souvent un système **indéterminé** (une infinité de solutions). La **solution générale** d'un système est l'ensemble de toutes ses solutions.

[1] Carl Friedrich Gauss, mathématicien et physicien allemand, 1777–1855
[2] Wilhelm Jordan, mathématicien allemand, 1842–1899

Exemple 2. *On considère un système formé de deux équations à trois inconnues.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 11 \end{array}\right.$$

Un tel système linéaire peut apparaître, par exemple, dans un problème de géométrie analytique de l'espace où l'on cherche à établir une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants.
En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, le système initial se transforme en

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 11 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ (-1)L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 4z & = & 6 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Ce système étant réduit, on pose $z = \lambda$ (un paramètre choisi librement) et on obtient immédiatement une valeur pour x et y en fonction de ce paramètre. Le système initial est donc indéterminé et la solution générale peut s'écrire sous la forme

$$S = \{(6 - 4\lambda\,; -1 + 2\lambda\,; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

En géométrie, on l'écrit comme équation paramétrique d'une droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 3. *On considère un système déjà échelonné de trois équations à cinq inconnues.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 7 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

On choisit $x_2 = \lambda$ et $x_5 = \mu$ (deux paramètres). La solution générale du système peut s'écrire sous la forme

$$S = \big\{(-8 + 2\lambda - 4\mu\,; \lambda\,; 9 + 3\mu\,; 2 + 2\mu\,; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$$

Écriture matricielle

Afin de résoudre un système linéaire qui contient un nombre élevé d'équations et d'inconnues, on introduit des tableaux rectangulaires de nombres. Pour le système de l'exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

les informations nécessaires à sa résolution sont entièrement contenues dans les deux tableaux

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Le tableau A est la **matrice des coefficients** et B la **matrice des termes constants** du système. Pour retrouver le système initial à partir de ces deux matrices, on convient d'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A \cdot X = B \ \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où la multiplication « matrice par vecteur » est effectuée comme produit scalaire de chaque ligne de A par la matrice-colonne X.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2} \\ 2 \quad 1 \quad 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3} \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. *On considère le système linéaire $A \cdot X = B$ suivant.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La transcription en une écriture traditionnelle montre qu'il s'agit d'un système de 3 équations à 5 inconnues et que sa résolution est immédiate lorsque l'on pose $x_4 = \lambda$ et $x_5 = \mu$, deux paramètres choisis librement.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ & x_2 & & - & 4x_4 & + & 6x_5 & = & -3 \\ & & x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$S = \{(5 - \lambda - 2\mu\,; -3 + 4\lambda - 6\mu\,; 1 - 6\lambda + 3\mu\,; \lambda\,; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Les deux matrices qui caractérisent un système sont parfois regroupées en un seul tableau, appelé **matrice augmentée du système**. Pour l'exemple précédent, on écrit

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple 5. *Pour mettre en évidence la façon de travailler avec une matrice augmentée, on résout le système linéaire suivant en utilisant en parallèle les deux écritures.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 &=& 0 \\ x_1 \qquad - 5x_3 &=& 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 + 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \\ x_2 + x_3 &=& 2 \\ - x_2 - 4x_3 &=& 1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 \qquad - 2x_3 &=& -1 \\ x_2 + x_3 &=& 2 \\ - 3x_3 &=& 3 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{3}L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 \qquad - 2x_3 &=& -1 \\ x_2 + x_3 &=& 2 \\ x_3 &=& -1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \to L_1 \\ L_2 - L_3 \to L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -3 \\ x_2 &=& 3 \\ x_3 &=& -1 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Le système est régulier et admet une solution unique, d'où $S = \big\{(-3\,;3\,;-1)\big\}$.

Exemple 6. *Un système donné sous la forme*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -5 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & + & 4x_5 & = & 10 \end{array}\right.$$

sera d'abord écrit comme $A \cdot X = B$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On cherche ensuite à simplifier le système donné en appliquant les transformations de la méthode de Gauss-Jordan directement à la matrice augmentée $(A|B)$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & 4 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \quad -L_2 \rightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 + 2L_2 \rightarrow L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 & 7 & -19 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice augmentée montre que le système initial est impossible ($S = \varnothing$) ; en effet, il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & & -\ 3x_3 & -\ 7x_4 & +\ 7x_5 & = & -19 \\ & x_2 & -\ 2x_3 & -\ 3x_4 & +\ 3x_5 & = & -7 \\ & & & & 0x_5 & = & 22 \end{array}\right.$$

Exemple 7. *Le système linéaire homogène*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

du type $A \cdot X = O$ est un système de 4 équations à 3 inconnues qui admet au moins la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Un **système homogène** est un système linéaire dont les termes constants sont nuls. Un système homogène admet au moins la **solution nulle** $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si le système est régulier alors cette solution est unique, sinon le système est indéterminé.

1.2 Notion de matrice

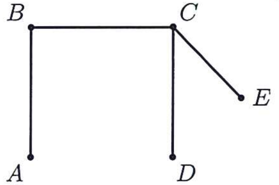
En mathématiques, on désigne par matrice[3] un tableau rectangulaire de nombres. Les matrices sont utiles pour structurer des informations numériques. C'est ainsi qu'un système linéaire peut être donné par la matrice de ses coefficients et la matrice-colonne de ses termes constants.

Exemple 1. *Historiquement les premières matrices sont apparues sous la forme de* **carrés magiques** *qui sont des tableaux carrés de nombres entiers (tous les nombres de 1 à n^2) tels que la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales est une même constante.*
Dans cet exemple, la « constante magique » vaut 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

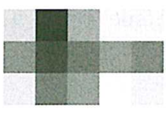
Les carrés latins et gréco-latins constituent d'autres formes de carrés de nombres entiers et sont les prédécesseurs de nombreux jeux tels que le sudoku ou le kakuro.

Exemple 2. *Pour modéliser un graphe comme celui représenté ci-dessous, on utilise une* **matrice d'adjacence** *qui contient les nombres 1 ou 0 selon que deux sommets sont reliés par une arête ou non. Cette matrice présente une symétrie par rapport à une diagonale.*



	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

Exemple 3. *Pour sauvegarder une image dans un ordinateur, on utilise une* matrice de nombres réels *qui indiquent pour chaque pixel (point-image) le niveau de gris correspondant (1 pour blanc, 0 pour noir).*



0.76	0.00	0.51	0.88	0.88
0.38	0.09	0.27	0.42	0.33
0.82	0.29	0.44	0.91	0.85

La taille de ces matrices peut devenir énorme. Pour des photos numériques en couleur, on utilise trois matrices qui donnent les intensités de trois couleurs primaires : le rouge, le vert et le bleu (RVB).

[3] Le terme de matrice fut proposé en 1850 par James Joseph Sylvester, mathématicien anglais, 1814–1897.

Exemple 4. *On suppose que l'économie d'un pays est divisée en trois secteurs : l'agriculture (A), l'industrie (I) et les services (S). Pour représenter les biens consommés et produits par ces trois secteurs, on utilise un « modèle d'entrée-sortie » dû à W. Leontief*[4]*. Pour chaque secteur, on indique dans une colonne la part des biens produits pour chacun des autres secteurs.*

	A	I	S
A	0.3	0.2	0.2
I	0.1	0.5	0.2
S	0.6	0.3	0.6

La première colonne, par exemple, indique que l'industrie et les services utilisent respectivement les 10% et les 60% des biens produits par l'agriculture (les 30% restant sont considérés comme la part utilisée par l'agriculture pour exercer sa propre activité). La deuxième ligne, par exemple, indique les parts des biens consommés par l'industrie. La somme des nombres de chaque colonne doit donner 1 puisque tous les biens produits par le secteur sont redistribués.

Définitions

On note n et m deux entiers naturels non nuls. Une **matrice réelle de type** $n \times m$ est un tableau rectangulaire qui contient n lignes et m colonnes de nombres réels, appelés **éléments** de la matrice. L'élément d'une matrice A qui se situe à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est noté a_{ij}. Pour la matrice elle-même, on écrit alors $A = (a_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de toutes les matrices réelles d'un même type $n \times m$ est noté $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exemple 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ *est une matrice de type* 3×4.
On a, par exemple, $a_{14} = 6$ *et* $a_{32} = -2$.

[4]Wassily Leontief, économiste américain d'origine russe, 1905–1999

Deux matrices sont **égales** si elles sont de même type et que tous leurs éléments correspondants sont égaux.

Exemple 6. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *ne sont pas égales.*

Matrices particulières

On note A une matrice de type $n \times m$.

1. Si $n = 1$, A est une **matrice-ligne**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Si $m = 1$, A est une **matrice-colonne**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Si tous les éléments de A sont nuls, A est la **matrice nulle** ; elle est notée O.
   Par exemple, si $n = 2$ et $m = 3$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Si $n = m$, A est une **matrice carrée d'ordre n.** Les éléments a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} constituent la **diagonale** de la matrice A.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1.4 & 6.2 & -2.5 & 0 \\ -0.43 & 4.0 & 3.3 & -4.1 \\ 16.2 & -8.9 & 0.56 & 21 \\ -7.8 & 8.2 & 8.9 & 12 \end{pmatrix}$

Matrices carrées particulières

On note $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.

1. Si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, A est une **matrice diagonale**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. La matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale valent 1 est la **matrice unité** ; elle est notée I_n, ou plus simplement I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur son ordre.

   Par exemple, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, A est une **matrice triangulaire supérieure** (B est une **matrice triangulaire inférieure** si $b_{ij} = 0$ pour tout $i < j$).

   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j, A est une **matrice symétrique**.

   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 77 \\ -5 & 77 & -1 \end{pmatrix}$

1.3 Opérations sur les matrices

Addition de matrices

Exemple 1. *On se donne les matrices suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On définit une nouvelle matrice $A + B$ par

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+3 & 0+1 \\ -2-1 & 1-1 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette somme n'est possible que si les matrices A et B sont de même type. Avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, par exemple, il n'est pas possible de définir la matrice $A + D$.

D'une manière générale, on définit la **somme de deux matrices** de même type $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ par

$$\boxed{C = A + B \quad \text{avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Propriétés de l'addition matricielle

Pour des matrices A, B, C et O de même type, on a

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ — *associativité*
2. $A+O = A$ — *élément neutre*
3. Pour toute matrice A, il existe une **matrice opposée**, notée $-A$, telle que $A+(-A) = O$. — *élément symétrique*
4. $A+B = B+A$ — *commutativité*

La matrice $-A$ est obtenue en prenant l'opposé de chaque élément de A.

Multiplication d'une matrice par un nombre réel

On considère une matrice A. On peut multiplier tous les éléments de la matrice A par un même nombre réel.

Exemple 2. *En reprenant la matrice A de l'exemple précédent, on a*

$$(-2)A = (-2)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, on définit le **produit d'une matrice A par un nombre réel λ** par

$$\boxed{C = \lambda A \text{ avec } c_{ij} = \lambda a_{ij}}$$

Propriétés de la multiplication par un nombre réel

Pour des matrices de même type et des nombres réels λ et μ, on a

5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $1\,A = A$
7. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
8. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

Multiplication matricielle

Exemple 3. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

En généralisant la multiplication introduite à la page 4, on définit le produit de la matrice A par la matrice B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{-1 \quad -1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -1 & \boxed{-3} & -7 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice A est multipliée par chaque colonne de la matrice B. La même définition ne permet pas de calculer le produit $B \cdot A$, le nombre de colonnes de B étant différent du nombre de lignes de A.

On considère une matrice A de type $n \times m$ et une matrice B de type $m \times p$. On définit le **produit des matrices** A et B, dans cet ordre, comme matrice C de type $n \times p$ par

$$\boxed{C = A \cdot B \text{ avec } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}}$$

Exemple 4. *On considère les matrices* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On observe que $C \cdot P \neq P \cdot C$. *En effet,*

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 5. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

On a $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

et $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Exemple 6. *On considère les matrices* $U = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $U \cdot V = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ *et* $V \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Exemple 7. *On peut également multiplier une matrice carrée par un vecteur et considérer la transformation géométrique correspondante. En multipliant la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *par le vecteur* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on obtient un nouveau vecteur* $\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *image de* $\vec{v}$ *par une symétrie axiale.*

Exemple 8. *À partir de trois matières premières P_1, P_2 et P_3, on fabrique deux produits intermédiaires I_1 et I_2. Les quantités de matières premières nécessaires à cette fabrication sont indiquées dans la matrice suivante.*

$$A = \begin{array}{cc} I_1 & I_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

La fabrication d'une unité de I_1, par exemple, nécessite 4 unités de P_1, 3 unités de P_2 et 2 unités de P_3.

La confection des produits finis F_1, F_2, F_3 et F_4 requiert les produits intermédiaires I_1 et I_2 en quantité suivante.

$$B = \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array}$$

La quantité de matière première P_1 que nécessite le produit fini F_1 sera donc de $4 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 75$. Plus généralement, on trouve

$$C = \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 75 & 32 & 34 & 61 \\ 37 & 13 & 20 & 21 \\ 76 & 38 & 28 & 80 \end{pmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

La matrice C est le produit de la matrice A par la matrice B.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 32 & 34 & 61 \\ 37 & 13 & 20 & 21 \\ 76 & 38 & 28 & 80 \end{pmatrix}$$

Exemple 9. *La population d'un pays vit soit en ville soit à la campagne. Lors d'un recensement, on constate que, durant les 10 dernières années, 5% des citadins ont décidé d'aller habiter la campagne, alors que 10% des personnes qui vivaient à la campagne ont déménagé en ville. Pour simuler cette migration de population, on utilise un modèle appelé chaîne de Markov*[5]*, en introduisant la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Le nombre $p_{12} = 0.1$, situé sur la première ligne et dans la seconde colonne, indique la probabilité avec laquelle une personne qui habite la campagne ira habiter la ville. Supposons qu'en l'an 2000 la population ait été

[5] Andreï Andreïevitch Markov, mathématicien russe, 1856–1922

de 9 millions de personnes dont 3 millions habitaient en ville, 6 millions à la campagne. En 2010, on comptera $0.95 \cdot 3 + 0.1 \cdot 6 = 3.45$ millions d'habitants en ville et $0.05 \cdot 3 + 0.9 \cdot 6 = 5.55$ millions d'habitants à la campagne. On obtient ce résultat par le calcul matriciel

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 5.55 \end{pmatrix}$$

Si l'on garde le même modèle pour prévoir l'évolution de cette population pour les décennies suivantes, on trouve

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.45 \\ 5.55 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.83 \\ 5.17 \end{pmatrix} \quad \textit{pour 2020}$$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.83 \\ 5.17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.16 \\ 4.84 \end{pmatrix} \quad \textit{pour 2030}$$

Propriétés de la multiplication matricielle

Pour des matrices A, B et C de types adéquats, on a

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ *associativité*
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *distributivité*
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ *distributivité*
4. $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
5. $I_n \cdot A = A = A \cdot I_m$ où A est de type $n \times m$ *éléments neutres*

La multiplication matricielle n'est pas commutative.

Puissance d'une matrice carrée

Si k est un nombre entier positif et A une matrice carrée d'ordre n, on définit

$$\boxed{A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ fois}}}$$

Par convention, A^0 est égal à la matrice unité I_n.

Transposition d'une matrice

La **transposée** d'une matrice A de type $n \times m$ est une matrice de type $m \times n$, notée ${}^tA$, dont les colonnes sont, dans l'ordre, les lignes de la matrice A.

Exemple 10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Une matrice symétrique est égale à sa transposée.

Exemple 11. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

Propriétés de la transposition

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
4. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

1.4 Matrices élémentaires

Exemple 1. *On donne une matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, *ainsi que trois matrices particulières* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On observe la suite de produits matriciels suivants.

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Multiplier la matrice A à gauche par la matrice P permute les lignes de A ($L_1 \leftrightarrow L_2$).

$$S \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La multiplication par S a pour effet de soustraire à la deuxième ligne trois fois la première ($L_2 - 3L_1 \to L_2$).

$$D \cdot S \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La multiplication par D revient à multiplier par $\frac{1}{2}$ la deuxième ligne ($\frac{1}{2}L_2 \to L_2$).

Une **matrice élémentaire** est une matrice obtenue en appliquant à la matrice unité une opération élémentaire sur ses lignes (voir page 2).

Exemple 2. *On obtient la matrice P de l'exemple précédent en appliquant l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ à la matrice unité I_2. De même, on obtient S en appliquant l'opération $L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2$ à I_2 et D en lui appliquant l'opération $\frac{1}{2}\, L_2 \rightarrow L_2$. Les matrices P, S et D sont des matrices élémentaires.*

Dans les matrices carrées d'ordre n, on note

1. P_{ij} la matrice unité I_n transformée par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$,
2. $D_i(\lambda)$ la matrice I_n transformée par l'opération $\lambda L_i \rightarrow L_i$ avec $\lambda \neq 0$,
3. $S_{ij}(\lambda)$ la matrice I_n transformée par l'opération $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$.

Exemple 3. *Dans les matrices carrées d'ordre 3, on a*

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; S_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1. Pour toute matrice A et tout nombre réel $\lambda \neq 0$,

1. permuter les i-ième et j-ième lignes de A revient à effectuer la multiplication $P_{ij} \cdot A$,
2. multiplier la j-ième ligne de A par λ revient à effectuer la multiplication $D_j(\lambda) \cdot A$,
3. ajouter à la i-ième ligne de A la j-ième ligne multipliée par λ revient à effectuer la multiplication $S_{ij}(\lambda) \cdot A$.

1.5 Déterminant d'une matrice carrée

Exemple 1. *On considère le système linéaire formé par les équations cartésiennes de deux droites du plan.*

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Les droites se coupent en un point si ce système admet une solution unique. Elles sont parallèles (strictement parallèles ou confondues) lorsque les couples $(a_{11}\,;a_{12})$ et $(a_{21}\,;a_{22})$ sont proportionnels[6]*, c'est-à-dire lorsque $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$. Ainsi, pour déterminer si le système donné possède une solution unique ou non, il suffit de calculer le nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. S'il est nul, le système est singulier : il ne possède alors aucune solution ou il en a une infinité. Par contre, si ce nombre est différent de zéro, le système est régulier et admet une solution unique.*

[6] voir *Géométrie vectorielle et analytique plane*, CRM N° 23

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre 2 est le nombre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ce nombre est aussi noté $\mathrm{Det}(A)$.

Exemple 2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$

Exemple 3. *Deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan vectoriel sont colinéaires si et seulement si* $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *est nul.*

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre 3 est le nombre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Ce nombre est aussi noté $\mathrm{Det}(A)$.

Exemple 4.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 4 = 39 \end{aligned}$$

Exemple 5. *En géométrie de l'espace, on peut utiliser le déterminant pour vérifier si trois vecteurs sont coplanaires. Le déterminant de trois vecteurs* $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ *est le produit mixte de ces trois vecteurs. En valeur absolue, ce nombre est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Les trois vecteurs sont coplanaires si ce déterminant est nul.*

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ est défini de manière récursive. Le **cofacteur** d'un élément a_{ij} de la matrice A est le nombre $(-1)^{i+j} D_{ij}$, où D_{ij} est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.

Exemple 6. *Pour la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

le cofacteur de l'élément a_{12} *est le nombre* $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -12.$

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre n, noté $\text{Det}(A)$, est la somme des produits de chaque élément de la première colonne par son cofacteur.

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}D_{k1} \end{aligned}$$

Exemple 7. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, *on trouve*

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-11) - 3 \cdot 19 + 1 \cdot 7 - 4 \cdot (-17) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dans cette définition du déterminant, on a effectué les calculs sur les éléments de la première colonne (on parle d'un *développement relativement à la première colonne*). On peut cependant effectuer le calcul du déterminant relativement à n'importe quelle colonne ou ligne. Ce résultat sera formalisé dans le théorème 2 ci-après.

Exemple 8. *On peut calculer le déterminant de la matrice A de l'exemple précédent en développant relativement à la quatrième colonne.*

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3\cdot(-13) - 1\cdot 25 - 2\cdot 9 + 0 = -4$$

Pour simplifier les calculs, on cherche à développer relativement à une ligne ou à une colonne qui contient un maximum de zéros.

On admet sans démonstration les deux théorèmes fondamentaux suivants.

Théorème 2. Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre $n \geq 3$ est égal à la somme des produits de chaque terme de la colonne j (ou de la ligne i) par son cofacteur.

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}D_{ik}$$

Théorème 3. Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées de même ordre est égal au produit des déterminants de ces deux matrices.

$$\operatorname{Det}(A\cdot B) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(B)$$

Propriétés des déterminants

1. Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) d'une matrice sont nuls, son déterminant est nul.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

3. Le déterminant de la matrice unité est égal à 1.

$$\mathrm{Det}(I_n) = 1$$

4. Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

$$\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)$$

5. Le déterminant d'une matrice change de signe lorsqu'on permute deux de ses colonnes (ou deux de ses lignes). Par exemple, si l'on permute les colonnes C_j et C_l, on a

$$\mathrm{Det}(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_l, \ldots, C_n) = -\mathrm{Det}(C_1, \ldots, C_l, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

En conséquence, si deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice sont identiques, son déterminant est nul.

6. Le déterminant d'une matrice est linéaire relativement à chacune de ses colonnes (ou lignes). Par exemple, on a

$$\mathrm{Det}(C_1 + \widetilde{C}_1, C_2, \ldots, C_n) = \mathrm{Det}(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \mathrm{Det}(\widetilde{C}_1, C_2, \ldots, C_n)$$

$$\mathrm{Det}(\lambda C_1, C_2, \ldots, C_n) = \lambda\,\mathrm{Det}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

7. Lorsqu'on multiplie tous les éléments d'une matrice carrée d'ordre n par un réel λ, le déterminant est multiplié par λ^n.

$$\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n\,\mathrm{Det}(A)$$

8. Le déterminant d'une matrice est nul si deux colonnes (ou deux lignes) sont proportionnelles. Par exemple, on a

$$\mathrm{Det}(C_1, \lambda C_1, C_3, \ldots, C_n) = 0$$

9. Le déterminant d'une matrice ne change pas lorsqu'on ajoute à l'une de ses colonnes un multiple d'une autre colonne (de même pour les lignes). Par exemple, on a

$$\mathrm{Det}(C_1, \lambda C_1 + C_2, C_3, \ldots, C_n) = \mathrm{Det}(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$$

10. Le déterminant d'une matrice élémentaire est non nul.

Pour $n = 2$ ou $n = 3$, toutes ces propriétés peuvent être vérifiées par calcul. Pour les démontrer dans le cas général ($n \geq 4$), on utilise la définition et le théorème fondamental 2.

Ces propriétés permettent de simplifier le calcul des déterminants.

Exemple 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 10 \\ 7 & -5 & -14 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{car } C_3 = -2C_1$$

Exemple 10.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} &= 2^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 + 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{matrix} \\ &= 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 3) = 24 \end{aligned}$$

Exemple 11.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 15 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_1 - 3C_2 \to C_1 \\ C_3 - 2C_2 \to C_3 \\ C_4 - 3C_2 \to C_4 \end{matrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On développe selon la 1^re^ ligne

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + 3L_1 \to L_3 \end{matrix} \\ &= -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On développe selon la 1^re^ colonne

$$\begin{aligned} &= -5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 13 - 9 \cdot 12) = -215 \end{aligned}$$

Exemple 12.

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha & x & \beta \\ \alpha & \beta & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha-x & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & \beta-x & x-\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

$$= (x-\alpha)(x-\beta)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1re *ligne*

$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x+\beta+\alpha)$$

Règle de Cramer

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme $A \cdot X = B$. Ce système admet une solution unique si et seulement si le nombre $\mathrm{Det}(A)$, appelé le **déterminant du système**, est différent de 0. Dans ce cas, la solution peut être calculée à l'aide de la règle de Cramer[7] suivante.

Pour $n = 2$,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Pour $n = 3$,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)}$$

En général, on a

$$\boxed{x_i = \frac{\mathrm{Det}(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)}{\mathrm{Det}(A)}}$$

où le numérateur est le déterminant de la matrice carrée obtenue en remplaçant dans la matrice A la i-ième colonne C_i par la matrice colonne B.

[7] Gabriel Cramer, mathématicien suisse, 1704–1752

Démonstration. On démontre la règle de Cramer pour $n = 2$. On peut généraliser cette démonstration à l'ordre n.

Le système $\left\{ \begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$ peut aussi s'écrire sous la forme matricielle $x_1C_1 + x_2C_2 = B$ où $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ sont les deux colonnes de la matrice des coefficients de A. En utilisant les différentes propriétés des déterminants, on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(B, C_2) &= \operatorname{Det}(x_1C_1 + x_2C_2, C_2) \\ &= \operatorname{Det}(x_1C_1, C_2) \\ &= x_1 \operatorname{Det}(C_1, C_2) \\ &= x_1 \operatorname{Det}(A) \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Det}(A) \neq 0$, on en déduit que $x_1 = \dfrac{\operatorname{Det}(B, C_2)}{\operatorname{Det}(A)}$. Dans le cas contraire, la dernière équation obtenue est soit impossible soit indéterminée.

De même, on montre que $x_2 = \dfrac{\operatorname{Det}(C_1, B)}{\operatorname{Det}(A)}$ lorsque $\operatorname{Det}(A) \neq 0$. □

Exemple 13. *Résoudre le système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

On a

$$\operatorname{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique. De plus, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \ \textit{et} \ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

Ainsi $x = -\dfrac{5}{18}$, $y = \dfrac{1}{18}$ *et* $z = \dfrac{7}{18}$.

Conséquence de la règle de Cramer. Un système linéaire homogène possède des solutions non nulles si et seulement si son déterminant est nul.

1.6 Matrice inverse d'une matrice carrée

Matrice carrée d'ordre 2

On considère une matrice carrée A d'ordre 2. On cherche à savoir s'il existe une matrice carrée B d'ordre 2 telle que $A \cdot B = I_2$.

Exemple 1. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$, $A \cdot B = I_2$ *s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 2x + y & 2u + v \\ 5x + 3y & 5u + 3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation matricielle s'obtient en résolvant les deux systèmes linéaires suivants.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1 \\ 5x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2u & + & v & = & 0 \\ 5u & + & 3v & = & 1 \end{array} \right.$$

Ces systèmes linéaires admettent une solution unique car $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. *Après calcul, on obtient la matrice* B.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où il existe une matrice B telle que $A \cdot B = I_2$, la matrice A est inversible et B est appelée matrice inverse de A ; elle est notée A^{-1}. On peut vérifier que $B \cdot A = I_2$.

Exemple 2. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ *et* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *La solution de l'équation matricielle* $A \cdot B = I_2$ *s'obtient en résolvant les deux systèmes linéaires suivants.*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1 \\ 6x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2u & + & v & = & 0 \\ 6u & + & 3v & = & 1 \end{array} \right.$$

Ces systèmes linéaires n'admettent pas de solution car $\mathrm{Det}(A) = 0$. *La matrice* A *n'est pas inversible.*

Matrice carrée d'ordre n

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. La matrice B est appelée **matrice inverse** de A. On la note A^{-1}.

Remarque. On peut démontrer que si A est une matrice inversible, alors la matrice inverse de A est unique. De plus, $A \cdot B = I_n$ implique $B \cdot A = I_n$.

Propriétés

On note A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1. La matrice A est inversible si et seulement si $\text{Det}(A) \neq 0$.
2. Si A est inversible, alors $\text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)}$.
3. Si A et B sont inversibles, alors $A \cdot B$ est inversible et
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
4. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstrations des propriétés 2 et 3

2. On a vu au théorème 3, page 19, que $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A)\,\text{Det}(B)$. Comme $A \cdot A^{-1} = I_n$, on a $\text{Det}(A \cdot A^{-1}) = 1$. On en déduit que $\text{Det}(A)\,\text{Det}(A^{-1}) = 1$, d'où $\text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)}$.
3. La matrice inverse de $A \cdot B$ est $B^{-1} \cdot A^{-1}$ car $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot (I_n) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$. □

Calcul de l'inverse d'une matrice

Matrice carrée d'ordre 2

Pour calculer la matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant n'est pas nul, il suffit de résoudre les systèmes d'équations suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} au & + & bv & = & 0 \\ cu & + & dv & = & 1 \end{array}\right.$$

Par la règle de Cramer, on obtient

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{\mathrm{Det}(A)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-b}{\mathrm{Det}(A)} \qquad v = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a}{\mathrm{Det}(A)}$$

La matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 3. *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, *alors* $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exemple 4. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.
Comme $\mathrm{Det}(A) = 0$, *la matrice* A *n'est pas inversible.*

Matrices carrées d'ordre n

On a obtenu une formule pour calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2. Pour les matrices d'ordre 3, on propose deux méthodes différentes. Ces méthodes sont généralisables à des matrices d'ordre supérieur à 3.

Exemple 5. *On montre, à partir d'un exemple, comment l'on obtient la matrice inverse d'une matrice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Le calcul $\mathrm{Det}(A) = -2$ *prouve que cette matrice est inversible. On pose* $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, *la matrice inverse de* A. *L'équation* $A \cdot X = I_3$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation matricielle s'obtient en résolvant les trois systèmes linéaires suivants.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & x_{21} & + & 4x_{31} & = & 1 \\ x_{11} & & & - & 3x_{31} & = & 0 \\ 2x_{11} & + & 3x_{21} & + & 8x_{31} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & x_{22} & + & 4x_{32} & = & 0 \\ x_{12} & & & - & 3x_{32} & = & 1 \\ 2x_{12} & + & 3x_{22} & + & 8x_{32} & = & 0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & x_{23} & + & 4x_{33} & = & 0 \\ x_{13} & & & - & 3x_{33} & = & 0 \\ 2x_{13} & + & 3x_{23} & + & 8x_{33} & = & 1 \end{array} \right.$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution. Dans cet exemple, on utilise la règle de Cramer. Il faut alors calculer neuf déterminants pour obtenir les neuf termes de la matrice inverse de A.
On note D_{ij} le déterminant d'ordre 2 que l'on obtient en supprimant dans la matrice A la i-ième ligne et la j-ième colonne.

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{9}{2} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot D_{11}}{\mathrm{Det}(A)}$$

On prêtera attention à l'ordre des indices !

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-2} = 7 = \frac{(-1)^{1+2} \cdot D_{12}}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot D_{13}}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -1 = \frac{(-1)^{3+2} \cdot D_{23}}{\mathrm{Det}(A)}$$

De manière analogue, on trouve tous les autres éléments de la matrice inverse de A. On laisse le soin au lecteur de vérifier que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 7 & 4 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, pour une matrice carrée A d'ordre n, on peut démontrer que

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\, {}^t\big((-1)^{i+j} D_{ij}\big)$$

où D_{ij} désigne le déterminant d'ordre $n-1$ que l'on obtient en supprimant dans la matrice A la i-ième ligne et la j-ième colonne. Dans la pratique cette formule n'est pas utilisée par manque d'efficacité. L'inversion d'une matrice carrée à l'aide des matrices élémentaires est en revanche efficace.

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A, jusqu'à obtention de la matrice unité I_n, si cela est possible ; on effectue simultanément exactement les mêmes opérations sur la matrice unité I_n pour obtenir l'inverse de A.

1. Si l'on parvient à transformer la matrice A en la matrice unité, alors A est inversible. En effet, traduit en termes de multiplications par des matrices élémentaires, cela signifie que $(E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot A = I_n$, autrement dit que $A^{-1} = E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1$.
   De plus, la matrice identité est simultanément transformée en l'inverse de A, car $(E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot I_n = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$
2. Dans le cas contraire, la matrice A se transforme en une matrice B qui possède au moins une ligne de zéros. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Det}(B) \\ &= \mathrm{Det}(E_p)\,\mathrm{Det}(E_{p-1}) \cdots \mathrm{Det}(E_2)\,\mathrm{Det}(E_1)\,\mathrm{Det}(A) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Det}(A) = 0$ puisque le déterminant des matrices élémentaires est non nul, autrement dit que la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 6. *Inversion d'une matrice à l'aide des matrices élémentaires. On reprend la matrice de l'exemple 5.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice A augmentée de la matrice I_3. Ensuite, on effectue sur les lignes des opérations élémentaires, ce qui revient à multiplier par des matrices élémentaires.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

On permute les lignes 1 et 2 ce qui revient à multiplier à gauche la matrice augmentée par la matrice élémentaire P_{12}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3$$

On poursuit en multipliant à gauche par $S_{31}(-2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 - 3L_2 \rightarrow L_3$$

On multiplie à gauche par $S_{32}(-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2} \cdot L_3 \rightarrow L_3$$

On multiplie à gauche par $D_3(\frac{1}{2})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_2 - 4L_3 \rightarrow L_2$$

On multiplie à gauche par $S_{23}(-4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_1 + 3L_3 \rightarrow L_1$$

On multiplie à gauche par $S_{13}(3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 7 & 4 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Formellement, cette matrice est le produit des matrices élémentaires utilisées.

Résolution de systèmes linéaires à l'aide de la matrice inverse

Exemple 7. *On considère le système d'équations suivant.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & -6 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \end{array}\right.$$

Ce système d'équations peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot X = B$$

On calcule A^{-1} *en utilisant les transformations sur les lignes de la matrice* A *augmentée de la matrice identité.*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad L_1 + L_2 \to L_1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad L_2 + L_3 \to L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I_3 \cdot X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

et finalement

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

À tout système linéaire de n équations à n inconnues, on peut associer une matrice carrée d'ordre n. Dès lors, le système s'écrit $A \cdot X = B$. Au cas où A est une matrice carrée inversible, on peut écrire

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

1.7 Exercices

1. Parmi les équations suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.

a) $2x + \sqrt{3}\,y = 5z$ b) $x + 2y = 3xy$

c) $\sqrt{x^2 + y^2} = 25$ d) $y(1 - 2x) + 7 = 2x(1 - y)$

e) $x - y + 10^{-3}z = \log(3)$ f) $2\log(x) + 6 = 0$

2. Résoudre les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ 3x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & -11 \\ -7x & + & 6y & = & 19 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 9 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 15 \end{array}\right.$

e) $\left\{\ x - 4y = 1\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 3x & + & y & = & 4 \\ x & - & y & = & 5 \end{array}\right.$

3. Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 2x & - & y & - & z & = & 12 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & -5 \\ x & + & 5y & - & 4z & = & -9 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 4x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

4. On considère deux plans α et β d'équations $\alpha : x - 2y + z = 4$ et $\beta : 3x - 5y - 2z = 11$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite d d'intersection des deux plans.

b) Interpréter géométriquement la solution d'un système régulier de trois équations à trois inconnues.

c) Comment choisir une 3^e équation linéaire pour que le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & - & 5y & - & 2z & = & 11 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & = & \ldots \end{array}\right.$$
soit impossible ? indéterminé ? Donner, pour chaque cas, une interprétation géométrique de cette troisième équation.

5. Trouver un système linéaire dont la solution générale est l'ensemble $S = \{(13-\lambda\,;\lambda\,;-3+2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6. Donner la solution générale de l'équation $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7$.

7. Transcrire les systèmes linéaires des exercices 2 et 6 en écriture matricielle.

8. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la matrice augmentée.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 13x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 18 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & - & 6x_4 & = & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$

9. Peut-on trouver un système linéaire qui possède exactement les deux solutions $(1\,;0\,;-2)$ et $(1\,;1\,;1)$?

10. a) On cherche un polynôme $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dont le graphe passe par les quatre points $P(1\,;5)$, $Q(2\,;4)$, $R(3\,;-5)$ et $S(-1\,;7)$. Écrire la matrice des coefficients et la matrice des termes constants du système permettant de trouver a, b, c et d. Déterminer $p(x)$.

b) Plus généralement, écrire la matrice des coefficients et la matrice des termes constants du système si le graphe du polynôme p passe par les quatre points $P(x_1\,;y_1)$, $Q(x_2\,;y_2)$, $R(x_3\,;y_3)$ et $S(x_4\,;y_4)$.

11. Échelonner la matrice augmentée associée au système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 3kx_2 & + & x_3 & = & 3k \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & kx_3 & = & k+1 \end{array}\right.$$
Indiquer ensuite la solution générale de ce système en fonction du paramètre k.

12. Écrire sous forme de systèmes les équations $A \cdot X = B$ et $A \cdot X = C$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

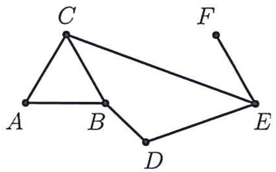
Résoudre ensuite simultanément les deux systèmes en appliquant la méthode de Gauss-Jordan à la matrice doublement augmentée $(A|B\ C)$.

13. Trouver un carré magique d'ordre 3.

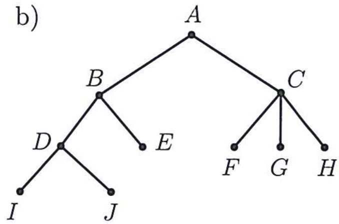
14. Quel est le « nombre magique» d'un carré magique d'ordre n ?

15. Écrire la matrice d'adjacence de chaque graphe non orienté ci-dessous.

a)



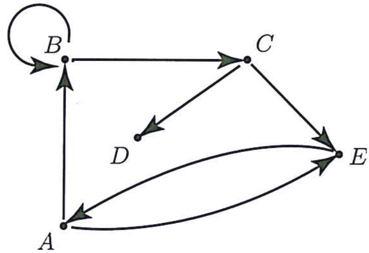
b)



16. Dessiner un graphe dont la matrice d'adjacence est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Écrire la matrice d'adjacence du graphe orienté suivant.



18. Pour simplifier des prévisions météorologiques, on se limite à trois types de prévision : beau (E_1), nuageux (E_2) et pluvieux (E_3).

La matrice $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition : si un jour on est dans l'état E_j, il y a une probabilité p_{ij} d'être demain dans l'état E_i. Sachant qu'il fait beau temps aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau demain ? dans 2 jours ? dans 3 jours ?

19. On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer

a) $-2A$	b) $B - 2A$	c) C^2
d) $E \cdot A$	e) $D \cdot B$	f) $A + 2E \cdot B$

20. a) Une matrice A est de type 5×3 et le produit $A \cdot B$ est de type 5×4. Quel est le type de la matrice B ?

b) Si A est une matrice de type 5×3 et C une matrice de type 2×5, quel est le type de la matrice $C \cdot A$?

c) Si M est une matrice de type $n \times 1$ et N est de type $1 \times n$, quel est le type des matrices $M \cdot N$ et $N \cdot M$?

21. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver la matrice B telle que $A \cdot B = \begin{pmatrix} -20 & 30 & -5 \\ 5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Trouver la matrice D telle que $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Trouver une matrice E telle que $C \cdot E = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Trouver la matrice F telle que $C \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Les stocks de deux magasins de sport sont donnés dans le tableau A.

	skis	bâtons	fixations
magasin 1	120	110	90
magasin 2	200	180	210

On connaît également les frais (en CHF par unité) liés au stockage et au transport de ces articles du tableau B.

	stockage	transport
skis	5	20
bâtons	4	10
fixations	1	5

Calculer le produit matriciel $A \cdot B$ et donner une interprétation économique du tableau obtenu.
Remarque. Même s'il est possible de calculer le produit matriciel $B \cdot A$, celui-ci n'a aucune signification économique.

23. Un sous-traitant de l'industrie automobile produit deux articles appelés X et Y. Pour la fabrication de ces produits, il emploie de l'acier, du caoutchouc et de la main d'œuvre, selon les quantités unitaires données dans le tableau suivant.

	acier	caoutchouc	travail
article X	2	3	5
article Y	1	4	4

Les coûts unitaires (en CHF) sont

acier	6.–
caoutchouc	4.–
travail	10.–

Utiliser des matrices pour effectuer les calculs suivants.

a) Calculer le coût unitaire de chaque article.

b) Le sous-traitant reçoit une commande de 200 articles de X et de 300 articles de Y. Calculer les quantités de chaque facteur de production qu'il doit utiliser pour la fabrication de ces articles.

c) Calculer le coût total de cette commande.

d) Le prix de vente est de CHF 90.- pour X et de 80.– pour Y. Calculer la recette totale et le profit total.

24. On considère deux matrices-colonne $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits suivants.

a) $A \cdot {}^tB$ b) ${}^tA \cdot B$ c) ${}^tA \cdot A$

25. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

26. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer

a) $A \cdot (B + C)$ b) ${}^tA \cdot B$ c) ${}^tB \cdot A$
d) $(A + B)^2$ e) $A^2 + 2A \cdot B + B^2$ f) $(A + B) \cdot (A - B)$
g) $A^2 - B^2$ h) C^2 i) C^3
j) C^n où $n \in \mathbb{N}$

27. On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) A^2

28. On considère trois nombres réels a, b, c et les matrices suivantes.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) N^n b) U^n c) R^n d) T^n

29. Une matrice A est **idempotente** si $A^2 = A$.

a) Montrer que les matrices suivantes sont idempotentes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) À quelles conditions doivent satisfaire les coefficients réels a, b, c et d pour que la matrice $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit idempotente ?

30. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4, ... et observer l'apparition des termes de la suite de Fibonacci[8].

---

[8]voir page 122

31. Deux matrices A et B **commutent** si $A \cdot B = B \cdot A$.
Trouver les matrices B qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

32. a) Montrer à l'aide d'un exemple qu'en général $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$.

b) Si A et B sont des matrices qui commutent, montrer que pour tout entier naturel k, $(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k$.

33. a) Montrer que si A et B sont des matrices qui commutent, alors

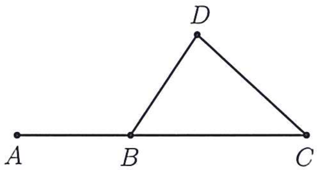
$$(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

On peut généraliser cette identité et obtenir la formule du binôme. Si A et B commutent, alors on a

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i \cdot B^{n-i} \quad \text{où} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

b) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^2, M^3 et M^k en écrivant M comme somme de I_3 et d'une matrice B, et en utilisant la formule du binôme.

34. On considère le graphe (non orienté et sans boucle) suivant.



a) Écrire la matrice d'adjacence M de ce graphe.

b) Calculer M^2 et donner une interprétation des éléments de cette matrice.

35. Calculer le carré de la matrice de transition P de l'exercice 18 (page 35). Donner une interprétation des éléments de la matrice P^2.

36. Écrire les matrices élémentaires $D_2(-3)$ et $S_{21}(7)$ d'ordre 2.

37. Écrire les matrices élémentaires P_{23}, $D_3(4)$, $S_{21}(3)$ et $S_{13}(7)$ d'ordre 3.

38. Multiplier à gauche une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par

a) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$,

b) $D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $\lambda L_2 \to L_2$,

c) $S_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $L_1 + \lambda L_2 \to L_1$.

d) Que se passe-t-il si l'on multiplie A à droite par P_{12} ? par $D_2(\lambda)$? par $S_{12}(\lambda)$?

39. Quelle opération élémentaire sur les lignes a-t-on appliquée à la matrice unité I_4 pour obtenir chacune des matrices suivantes ? Comment note-t-on chacune de ces matrices ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

40. a) Quel est l'effet sur une matrice d'ordre 3 de la multiplication à droite par $S_{32}(5)$? Et par $S_{13}(2)$?

b) Énoncer un théorème précisant les effets de la multiplication à droite par les matrices élémentaires.

41. Pour les matrices élémentaires d'ordre n, montrer que

a) $P_{ij}^2 = I_n$,

b) $D_i(\lambda) \cdot D_i(\frac{1}{\lambda}) = I_n$, avec $\lambda \neq 0$,

c) $S_{ij}(\lambda) \cdot S_{ij}(-\lambda) = I_n$, avec $i \neq j$,

d) $S_{ij}(\lambda) \cdot S_{ij}(\mu) = S_{ij}(\lambda + \mu)$, avec $i \neq j$.

42. Calculer les déterminants suivants.

$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $d = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & z \end{vmatrix}$

43. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

44. Calculer le déterminant des matrices élémentaires d'ordre 2, 3, 4. Peut-on généraliser le résultat à un ordre quelconque n ?

45. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \alpha & \beta - x \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$$

46. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathrm{Det}(A), \mathrm{Det}(B)$ et $\mathrm{Det}(A+B)$. Que peut-on en déduire ?

47. a) Quel est le nombre de multiplications à effectuer pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n (en utilisant la définition récursive) ?

b) En déduire le temps qu'il faudra aux plus puissants ordinateurs du monde, capables d'effectuer mille milliards de multiplications par seconde (1 téraFLOPS = 10^{12} *FLoating-point Operations Per Second*), pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 20 et d'ordre 30. On négligera le temps nécessaire pour effectuer les additions.

48. Vérifier les égalités suivantes sans calculer les déterminants.

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

49. Exprimer les déterminants suivants en fonction de $p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$s = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} \quad t = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad u = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2+2a_1 & 3b_2+2b_1 & 3c_2+2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

50. Calculer et factoriser en utilisant les propriétés des déterminants.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & \beta+\gamma & \alpha \\ 1 & \gamma+\alpha & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \gamma \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} x & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

51. Résoudre (par rapport à x) en utilisant les propriétés des déterminants.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

52. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{vmatrix}$$

53. Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale.

54. Démontrer les identités suivantes.

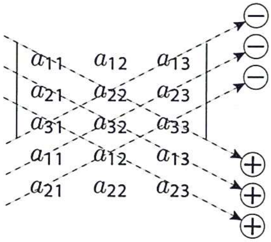
$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Cette propriété peut être généralisée à l'ordre n (**déterminant de Vandermonde**[9]).

[9] Alexandre-Théophile Vandermonde, mathématicien français, 1735–1796

55. La **règle de Sarrus**[10] est une méthode de calcul du déterminant d'une matrice carrée A d'ordre 3 uniquement. On recopie, en dessous de A, les deux premières lignes de cette matrice et on effectue la somme des produits des « diagonales descendantes » dont on soustrait les produits des « diagonales ascendantes ».



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Utiliser cette règle pour calculer les déterminants de l'exercice 43.

56. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la règle de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ -7x + 6y = 19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -6x + 3y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -6x + 3y = 15 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$

57. Résoudre et discuter les systèmes suivants en fonction du paramètre réel m.

a) $\begin{cases} m^2x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = m \\ mx + (m+1)y = m-1 \end{cases}$

58. Pour quelles valeurs des paramètres a et b le système

$$\begin{cases} ax + 3y = 5 \\ 3x - 2y = b \end{cases}$$

possède-t-il une seule solution ? aucune solution ? une infinité de solutions ?

[10] Pierre-Frédéric Sarrus, mathématicien français, 1798–1861

59. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la règle de Cramer.

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

60. Trouver la valeur de x_3 dans le système suivant.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

61. Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel m.

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m - 2 \\ x + y + mz = 2 - m \end{cases}$$

62. Vérifier que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -11 & 19 & -1 \\ -8 & 14 & -1 \\ 10 & -17 & 1 \end{pmatrix}$

63. Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

64. Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

65. a) Calculer le carré de la matrice de transition de l'exemple 9, page 13, et donner une interprétation des éléments de P^2.

b) Vérifier à l'aide de la matrice $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ que $P \cdot (P \cdot X) = P^2 \cdot X$.

c) Calculer P^{-1} et donner une interprétation du produit $P^{-1} \cdot X$.

66. Chercher les matrices élémentaires d'ordre 2 et 3. Vérifier qu'elles sont inversibles et trouver leurs inverses.

67. Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

a) $\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & \lambda \\ -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & \lambda+3 & \lambda-4 \\ 1 & 6 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 3 \\ 2\lambda-1 & 4 & -4 \\ \lambda & \lambda & 2 \end{pmatrix}$

68. À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

69. On donne un système d'équations linéaires. Écrire la matrice associée des coefficients, chercher la matrice inverse et, à l'aide de celle-ci, résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & + & 6z & = & 3 \\ 6x & + & 2y & - & 8z & = & 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & + & y & - & 3z & = & -17 \\ 4x & - & 5y & + & 6z & = & 73 \\ 6x & + & 2y & - & 8z & = & -40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ 4x & - & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 6x & + & 2y & - & 8z & = & -4 \end{cases}$

70. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^{-1}, A^2, (A^2)^{-1}, (A^{-1})^2$ et définir A^{-2}.

71. Montrer que la matrice inverse d'une matrice diagonale inversible est une matrice diagonale.

72. À l'aide des propriétés des matrices, montrer que la matrice inverse d'une matrice symétrique inversible est une matrice symétrique.

Réponses aux exercices du chapitre 1

1. a) oui b) non c) non d) oui e) oui f) non

2. a) $S = \{(1\,;-3)\}$ b) $S = \{(-1\,;2)\}$
c) $S = \varnothing$ d) $S = \{(\lambda\,;5+2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $S = \{(1+4\lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ f) $S = \varnothing$

3. a) $S = \{(1\,;2\,;3)\}$ b) $S = \{(7\,;-1\,;3)\}$
c) $S = \{(1-\lambda\,;-2+\lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ d) $S = \varnothing$

4. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) C'est le point d'intersection de trois plans.

c) Pour obtenir un système impossible, on choisit l'équation d'un plan qui est strictement parallèle à la droite d'intersection des deux plans donnés. Par exemple $\gamma : 3x - 5y - 2z = 10$.

Pour obtenir un système indéterminé, on choisit l'équation d'un plan qui contient la droite d'intersection des deux plans donnés. Par exemple $\gamma : 4x - 7y - z = 15$ (somme des deux équations données).

5. $\dfrac{x-13}{-1} = y = \dfrac{z+3}{2}$ ou $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 13 \\ & & 2y & - & z & = & 3 \end{array} \right.$

6. $S = \{(7 + 2\alpha - 3\beta + 4\gamma\,;\alpha\,;\beta\,;\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

7. 2. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 19 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$

8. a) $S = \big\{(6 + 3\lambda - 3\mu\,;\lambda\,;-5 + 4\mu\,;\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \big\{(1\,;-1\,;2\,;3)\big\}$

9. Non

10. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

En résolvant, on trouve $p(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$.

b) $A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & k-2 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & 1-k & k-2 \end{array}\right)$

Si $k=1$, le système est impossible ; $S=\varnothing$.
Si $k=2$, le système est indéterminé ; $S=\{(-3+3\lambda\,;\lambda\,;0)\mid \lambda\in\mathbb{R}\}$.
Dans tous les autres cas (c'est le k de le dire), le système est régulier ;
$S=\left\{\left(\frac{k+1}{k-1}\,;\frac{k}{k-1}\,;-\frac{k-2}{k-1}\right)\right\}$.

12. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= -2 \\ -x_1+x_2+3x_3 &= 3 \\ 2x_1+2x_2-4x_3 &= -4 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ -x_1+x_2+3x_3 &= 1 \\ 2x_1+2x_2-4x_3 &= 1 \end{cases}$

Les solutions sont $\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ respectivement.

13.

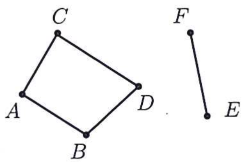
6	7	2
1	5	9
8	3	4

14. $\frac{n(n^2+1)}{2}$

15. a) $\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$

Pour améliorer la lisibilité, les zéros ont été remplacés par des points.

16. Graphe possible :



17. $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. a) 60% b) 48% c) 44%

19. a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) impossible f) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 13 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

20. a) 3×4 b) 2×3 c) $n \times n$ et 1×1

21. a) $B = \begin{pmatrix} -6 & 12 & -1 \\ 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

c) $E = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ d) pas de solution

22. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 120 & 110 & 90 \\ 200 & 180 & 210 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1130 & 3950 \\ 1930 & 6850 \end{pmatrix}$

Ce tableau indique les frais totaux (en CHF) liés au stockage et au transport des articles entreposés dans chaque magasin.

	stockage	transport
magasin 1	1130	3950
magasin 2	1930	6850

23. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix}$

b) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 1800 & 2200 \end{pmatrix}$

c) $(C \cdot A) \cdot B = \begin{pmatrix} 700 & 1800 & 2200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33\,400 \end{pmatrix}$

ou $C \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33\,400 \end{pmatrix}$

d) Recette totale $C \cdot D = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42\,000 \end{pmatrix}$

Profit total $C \cdot D - C \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 8\,600 \end{pmatrix}$ ou $C \cdot (D - A \cdot B)$

24. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

25. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26. a) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 4 & 18 & 10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 11 & 18 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & ac+bd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

28. a) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 3$

b) $U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & n \cdot c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tR$, $R^3 = I_3$, $R^4 = R$

d) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. b) $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$,

ainsi que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, ...

31. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

32. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

33. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

34. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les éléments de M^2 indiquent le nombre de chemins différents de longueur 2 qui permettent de relier deux points du graphe. Par exemple, il y a un seul chemin de longueur 2 entre A et D (ABD), mais pour aller de C vers C, on peut choisir CBC ou CDC.

35. $P^2 = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.42 & 0.34 \\ 0.24 & 0.26 & 0.28 \\ 0.28 & 0.32 & 0.38 \end{pmatrix}$

Un élément q_{ij} de cette matrice est la probabilité que, si un jour est dans l'état E_j, le surlendemain sera dans l'état E_i.

36. $D_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $S_{21}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

37. $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $S_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$S_{13}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38. d) Multiplier une matrice à droite par P_{12} revient à en permuter les *colonnes*. P_{12} est aussi le résultat de l'opération $C_1 \leftrightarrow C_2$ appliquée à la matrice unité I_2. Multiplier une matrice à droite par $D_2(\lambda)$ revient à en multiplier la deuxième *colonne* par λ. $D_2(\lambda)$ est aussi le résultat de l'opération $\lambda C_2 \to C_2$ appliquée à la matrice unité I_2. Multiplier une matrice à droite par $S_{12}(\lambda)$ revient à ajouter à sa deuxième *colonne* λ fois la première. $S_{12}(\lambda)$ est aussi le résultat de l'opération $C_2 + \lambda C_1 \to C_2$ appliquée à la matrice unité I_2.

39. a) On a appliqué $L_2 \leftrightarrow L_4$ et la matrice se nomme P_{24}.

b) On a appliqué $L_3 - 3L_1 \to L_3$ et la matrice se nomme $S_{31}(-3)$.

c) On a appliqué $L_2 + 7L_3 \to L_2$ et la matrice se nomme $S_{23}(7)$.

d) On a appliqué $-4L_2 \to L_2$ et la matrice se nomme $D_2(-4)$.

40. a) $C_2 + 5C_3 \to C_2$ et $C_3 + 2C_1 \to C_3$

b) Permuter les i-ième et j-ième colonnes de A, autrement dit appliquer l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot P_{ij}$.
Si $\lambda \neq 0$, multiplier la j-ième colonne de A par λ, autrement dit appliquer l'opération $\lambda C_j \to C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot D_j(\lambda)$.
Ajouter à la j-ième colonne de A un multiple λ fois la i-ième colonne, autrement dit appliquer l'opération $C_j + \lambda C_i \to C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot S_{ij}(\lambda)$.

41. a) Appliquer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ deux fois de suite revient à ne rien changer à la matrice unité.

b) Appliquer successivement $\frac{1}{\lambda}L_i \to L_i$ et $\lambda L_i \to L_i$ à la matrice I_n ne la modifie pas.

c) Appliquer successivement $L_i - \lambda L_j \to L_i$ puis $L_i + \lambda L_j \to L_i$ à la matrice I_n ne la modifie pas.

d) Appliquer $L_i + \mu L_j \to L_i$ puis $L_i + \lambda L_j \to L_i$ à la matrice unité revient à lui appliquer directement $L_i + (\lambda + \mu)L_j \to L_i$.

42. $a = 8$, $b = 11$, $c = -2$, $d = xz$

43. $a = 79$, $b = 24$, $c = -12$

44. $\text{Det}(P_{ij}) = -1$, $\text{Det}\big(D_i(\lambda)\big) = \lambda$, $\text{Det}\big(S_{ij}(\lambda)\big) = 1$

45. $a = x^2 - (\alpha + \beta)x$, $b = \lambda^2 - 7\lambda + 2$, $c = 2m - 4$

46. $\text{Det}(A) = 11, \text{Det}(B) = -1, \text{Det}(A + B) = 5$.
On en déduit que, en général, $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$.

47. a) $n!$

b) Pour $n = 20$, environ 28 jours ; pour $n = 30$, environ 8 400 milliards années.

49. $s = -p$, $t = -p$, $u = p$, $v = 0$, $w = 3p$

50. $a = 0$, $b = (x - 1)(x - \alpha)$, $c = -(t + 2)(t - 2)(t - 4)$,
$d = (x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx)$

51. a) $x = a$ ou $x = b$ b) même solution que a)

52. $a = 27$, $b = 512$, $c = (eh - gf)(ps - rq)$

56. a) $S = \{(1\,;-3)\}$ b) $S = \{(-1\,;2)\}$
c) $S = \varnothing$ d) $S = \{(\lambda\,;5 + 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $S = \{(0\,;0)\}$ f) $S = \{(\lambda\,;2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
La solution des exercices c), d) et f) ne peut pas être obtenue à l'aide de la règle de Cramer car le déterminant du système est nul.

57. a) Si $m = 1$, $S = \{(2 - \lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Si $m = -1$, $S = \varnothing$.
Dans tous les autres cas, $S = \left\{\left(\dfrac{-2}{m+1}\,;\dfrac{2(m^2+m+1)}{m+1}\right)\right\}$
b) Si $m = -\dfrac{1}{3}$, $S = \varnothing$, sinon $S = \left\{\left(\dfrac{3m-1}{3m+1}\,;\dfrac{-1}{3m+1}\right)\right\}$

58. Si $a \neq -\frac{9}{2}$, le système admet une solution unique.
Si $a = -\frac{9}{2}$ et $b \neq -\frac{10}{3}$, le système est impossible.
Si $a = -\frac{9}{2}$ et $b = -\frac{10}{3}$, le système est indéterminé.

59. a) $S = \{(-2\,;-5\,;2)\}$ b) $S = \{(\frac{1}{2}\,;1\,;4)\}$
c) $S = \{(\lambda\,;1\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ d) $S = \{(9\,;4\,;1)\}$
La solution de l'exercice c) ne peut pas être obtenue à l'aide de la règle de Cramer car le déterminant du système est nul.

60. $x_3 = 9$

61. Si $m = 1$, $S = \{(1 - \lambda - \mu\,;\lambda\,;\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
Si $m = -2$, $S = \{(\lambda\,;4 + \lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Dans tous les autres cas, $S = \{(m\,;2\,;-2)\}$

63. a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ b) non inversible

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

e) Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $\frac{1}{a-a^2}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ f) non inversible

g) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

64. a) non inversible

b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) non inversible

h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

65. a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0.9075 & 0.1850 \\ 0.0925 & 0.8150 \end{pmatrix}$

c) $P^{-1} = \frac{1}{0.85}\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} \cdot X \approx \begin{pmatrix} 2.47 \\ 6.53 \end{pmatrix}$ donne la répartition de la population (millions en ville/campagne) de 1990

66. Matrices élémentaires d'ordre 2

$(P_{12})^{-1} = P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(D_1(\lambda)\right)^{-1} = D_1(\frac{1}{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(D_2(\lambda)\right)^{-1} = D_2(\frac{1}{\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$

$\left(S_{12}(\lambda)\right)^{-1} = S_{12}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(S_{21}(\lambda)\right)^{-1} = S_{21}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

Matrices élémentaires d'ordre 3

$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$, $\left(D_i(\lambda)\right)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$, $\left(S_{ij}(\lambda)\right)^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

67. a) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, b) $\lambda \in \mathbb{R}$, c) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, d) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\}$

68. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -21 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

69. $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 28 & 2 & -9 \\ 68 & 2 & -24 \\ 38 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

a) $\left(-\frac{11}{5}\,;\,-\frac{31}{5}\,;-\frac{16}{5}\right)$ b) $(3\,;-5\,;6)$ c) $(-16\,;-38\,;-21)$

70. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = A^{-2}$

72. Indication : ${}^tA = A$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$