Mathématiques appliquées

Suites de nombres réels

et nombres complexes

2OSPM / 2MR

GYMNASE DE BURIER

Jean-Marc Faillétaz

Sébastien Guex

Août 2021

Table des matières

2$^{\text{ème}}$ édition, La Tour-de-Peilz, août 2021

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Notion de suite numérique

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure et à l'analyse. Elles peuvent être associées aux mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers. En analyse, une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique. Historiquement, la notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On trouve ce concept, par exemple, dans les mathématiques babyloniennes ou dans les œuvres d'Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes. Plus récemment, on retrouve cette notion en Egypte au 1^er^ siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée à l'aide de la méthode de Héron d'Alexandrie.

Exemple 1.1.

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit et ainsi de suite.

a) Calculer la hauteur atteinte par la tour ainsi construite après 10 pliages, après n pliages.

b) Est-il possible d'atteindre une hauteur de 20 m ?

c) Est-il possible de dépasser la distance Terre – Soleil (environ 150'000'000 km) ?

Définition 1.1

*Une **suite (numérique)** est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ que l'on peut visualiser comme une liste infinie de nombres*

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\ ,u_n\,,\ \ldots$$

*L'image u_n de l'entier n est appelé le **terme de rang** n ou **terme d'indice** n. Cette suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).*
*L'image de la fonction est l'ensemble $\{u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\}$. Il est appelé l'**ensemble des valeurs** de la suite (u_n).*

Remarque 1.1.

Le terme u_n de rang n se lit « u indice n »(rang et indice sont synonymes).

Une suite peut être définie de différentes manières : on peut la donner par ses premiers termes, la définir explicitement ou la donner à l'aide d'une relation de récurrence. Détaillons ces trois possibilités.

1.1.1 Suite définie par ses premiers termes

Si la suite est donnée par ses premiers termes, les termes suivants doivent pouvoir être déduits clairement de ceux-ci.

Exemple 1.2.

Soit la suite (a_n) définie par

$$4\,,\ 8\,,\ 16\,,\ 32\,,\ \ldots$$

Calculer le terme de rang 10, ainsi que le terme de rang n.

1.1.2 Suite définie explicitement

Une suite (u_n) est définie explicitement lorsque l'on connaît l'expression algébrique de son terme de rang n.

Exemple 1.3.

Définir explicitement la suite $(a_n) : 4, 8, 16, 32, \ldots$ donnée dans l'exemple 1.2.

Remarque 1.2.

La connaissance d'une suite par ses premiers termes ne permet pas d'avoir une certitude sur les termes inconnus de la suite et sur l'expression algébrique de son terme de rang n.

Par exemple, vérifions que la suite (b_n) définie explicitement par $b_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{10}{3}n + 4$ a les quatre premiers termes en commun avec la suite $a_n = 2^{n+2}$, mais pas le cinquième.

n	a_n	b_n
0	$2^2 = 4$	4
1	$2^3 = 8$	$\frac{2}{3} + \frac{10}{3} + 4 = 8$
2	$2^4 = 16$	$\frac{2}{3} \cdot 2^3 + \frac{10}{3} \cdot 2 + 4 = 16$
3	$2^5 = 32$	$\frac{2}{3} \cdot 3^3 + \frac{10}{3} \cdot 3 + 4 = 32$
4	$2^6 = 64$	$\frac{2}{3} \cdot 4^3 + \frac{10}{3} \cdot 4 + 4 = 60$

1.1.3 Suite définie par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est **définie par récurrence** si elle est donnée par une **formule de récurrence** et le(s) **premier(s) terme(s)** nécessaire(s) à sa définition complète. Dans la formule de récurrence, on exprime en général le terme u_{n+1} en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents.

Exemple 1.4.

Soit la suite (a_n) définie par $a_n = 2^{n+2}$ que nous avons traitée dans les exemples 1.2 et 1.3. Définir cette suite par récurrence.

Exemple 1.5.

Ecrire les quatre premiers termes de la suite (b_n) définie par $\begin{cases} b_0 = \dfrac{2}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{b_n} + 1 \end{cases}$

1.2 Suites arithmétiques et géométriques

Une suite pour laquelle la différence entre deux termes consécutifs reste constante est appelée une suite arithmétique. Donnons-en une définition précise.

Définition 1.2

Soit $d \in \mathbb{R}$. Une suite (a_n) est dite ***arithmétique*** *de* ***pas*** *ou* ***raison d*** *si*

$$d = a_{n+1} - a_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Explicitons les suites arithmétiques et donnons une formule de récurrence pour ces suites.

Théorème 1.3

Soit (a_n) une suite arithmétique de raison d.

a) La suite (a_n) est définie par son premier terme a_0 et par la formule de récurrence

$$a_{n+1} = a_n + d$$

b) La suite (a_n) est définie explicitement par $a_n = a_0 + n \cdot d$.

Preuve

Exemple 1.6.

a) La suite (a_n) donnée par ses premiers termes : $1, 5, 9, 13, \ldots$ est-elle arithmétique ? Si c'est le cas, l'expliciter.

b) La suite (b_n) donnée par ses premiers termes : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ est-elle arithmétique ? Si c'est le cas, l'expliciter.

c) La suite (c_n) définie par récurrence avec $c_0 = 5$ et $c_{n+1} = \dfrac{5 + 3c_n}{3}$ est-elle arithmétique ? Justifier la réponse et donner son pas d si c'est le cas.

Une suite pour laquelle le quotient de deux termes consécutifs reste constant est appelée une suite géométrique. En voici une définition précise.

Définition 1.4

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite (b_n) est dite ***géométrique*** *de* ***quotient*** *ou* ***raison r*** *si*

$$b_n \neq 0 \text{ et } r = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Explicitons les suites géométriques et donnons-en une formule de récurrence.

Théorème 1.5

Soit (b_n) une suite géométrique de raison r.

a) La suite (b_n) est définie par son premier terme b_0 et par la formule de récurrence

$$b_{n+1} = b_n \cdot r$$

b) La suite (b_n) est définie explicitement par $b_n = b_0 \cdot r^n$.

Preuve

Exemple 1.7.

a) La suite (a_n) définie par ses premiers termes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ est-elle géométrique ? Si c'est le cas, l'expliciter.

b) La suite (b_n) définie par ses premiers termes $2, 6, 18, 54, \ldots$ est-elle géométrique ? Si c'est le cas, l'expliciter.

c) La suite (c_n) définie explicitement par $c_n = 5 \cdot 3^{2n}$ est-elle géométrique ? Justifier la réponse et donner sa raison r si c'est le cas.

1.3 Somme de termes en progression arithmétique ou géométrique

1.3.1 Somme de termes en progression arithmétique

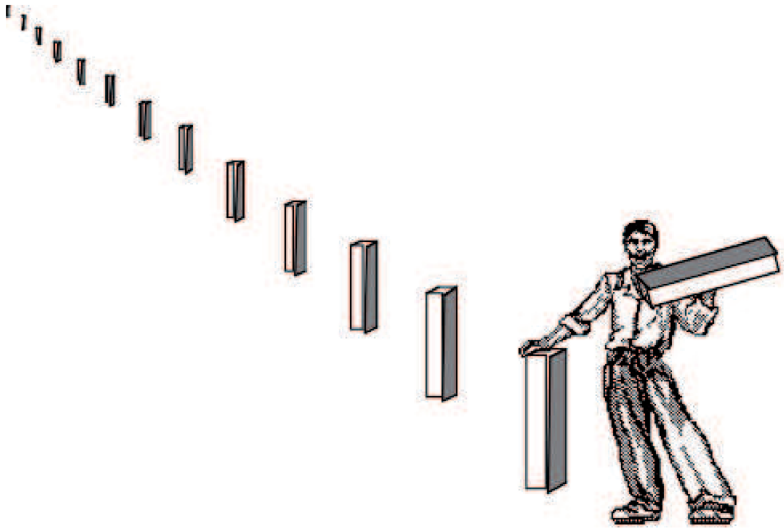
Exercice d'introduction

D'une barrière démontée, il ne reste plus que les piquets, alignés à perte de vue, espacés chacun de 2 mètres.

Le chemin longeant cette ancienne barrière étant non carrossable, le pauvre employé doit les ramener un par un, les uns après les autres, pour les entasser à 5 mètres en arrière du premier piquet, son point de départ. En effet, sa faible constitution ne lui permet malheureusement pas d'en porter plus d'un à la fois !

Comme salaire, on lui offre 500 francs pour les 150 premiers piquets.

Alors, pour passer le temps, tout en marchant, le pauvre employé compte combien lui rapporte le mètre parcouru.
Aidez-le en calculant la longueur du trajet effectué, puis le prix du mètre.



Théorème 1.6

Soit $a_n = a_0 + n \cdot d$ *une suite arithmétique de raison* d.

La somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ *des* n *premiers termes est donnée par*

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_0 + a_{n-1})$$

Preuve

1.3.2 Somme de termes en progression géométrique

Exercice d'introduction

Un cavalier qui fait ferrer son cheval des quatre jambes consent à payer $\frac{1}{10'000}$ de centime pour le premier clou, $\frac{2}{10'000}$ de centime pour le deuxième, $\frac{4}{10'000}$ de centime pour le 3^{e}, $\frac{8}{10'000}$ de centime pour le 4^{e} et ainsi de suite.

Chaque fer a huit clous.

Est-ce une bonne affaire ?

Théorème 1.7

Soit $b_n = b_0 \cdot r^n$ *une suite géométrique de raison* r.
La somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$ *des* n *premiers termes est donnée par*

$$S_n = b_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Preuve

1.4 Exercices

1.1

1) Calculer les 5 premiers termes des deux suites suivantes.

   a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$; b) $b_n = (n+1)! - n!$

2) Calculer e_1 et e_7 connaissant $e_3 = 7$ et la formule de récurrence $e_n = e_{n-1} + n$.
3) Calculer f_1 et f_6 connaissant $f_3 = 30$ et la formule de récurrence $f_n = f_{n-1} \cdot n$.
4) Calculer g_5 connaissant $g_0 = 0, g_1 = 16$ et sachant que $g_n = \dfrac{1}{2} \cdot (g_{n-1} + g_{n-2})$.

1.2

On considère la suite (b_n) définie par ses premiers termes : $1, 5, 9, 13, \ldots$

1) Calculer les termes b_{10}, b_{50}, b_{100} et $b_{1'000}$.
2) A partir de quel rang n a-t-on $b_n \geqslant 1\,000\,000$?
3) Expliciter la suite (b_n).
4) Définir la suite (b_n) à l'aide d'une relation de récurrence.

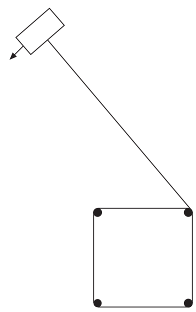
1.3

On considère la suite (c_n) définie par ses premiers termes : $2, 6, 18, 54, \ldots$

1) Calculer les termes c_5, c_{10}, c_{20} et c_{100}.
2) A partir de quel rang n a-t-on $c_n \geqslant 10^{100}$?
3) Expliciter la suite (c_n).
4) Définir la suite (c_n) à l'aide d'une relation de récurrence.

1.4

Un jardinier coupe son gazon avec une tondeuse tractée. Pour cela, il forme avec quatre piquets un carré de 40 centimètres de côté. Il attache ensuite un des bouts d'une corde de 42 mètres de long à un des piquets et l'autre à la tondeuse. La tondeuse roule alors par ses propres moyens en suivant une courbe en forme de spirale, la corde s'enroulant progressivement autour des piquets.



1) La tondeuse part avec la corde tendue, en prolongement d'un côté du carré qui a le point d'attache de la corde comme sommet. Quelle est la distance (en multiple de π) parcourue par la tondeuse lors du 1er tour, lors du second tour, lors du 3-ième tour, lors du 5-ième tour, lors du 10-ième tour et lors du 20-ième tour ?
2) On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ où u_n est la distance parcourue par la tondeuse lors du nième tour. Expliciter cette suite.
3) Combien de tours entiers la tondeuse effectue-t-elle avant de s'arrêter ?

1.5

Une balle de caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 200 cm. Supposons que, lors de chaque bond, elle rebondisse des 4/5 de la hauteur qu'elle avait précédemment atteinte.

1) Calculer la hauteur du deuxième rebond, du cinquième, du dixième et du vingtième rebond (au mm près).
2) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où u_n est la hauteur du $n^{\text{ème}}$ rebond de la balle. Expliciter cette suite.
3) A partir de quel rebond, la hauteur atteinte est-elle inférieure à 1 mm ?

1.6

Expliciter les suites suivantes.

1) $(a_n) : 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$
2) $(b_n) : 0, -5, -3, -1, 1, \ldots$
3) $(c_n) : 0, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}, \ldots$
4) $(d_n) : d_0 = 10, d_n = \frac{d_{n-1}}{2}$.
5) $(e_n) : 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \ldots$
6) $(f_n) : 0, 1, 0, 1, \ldots$
7) $(g_n) : 1.1, 0.99, 1.001, 0.9999, \ldots$

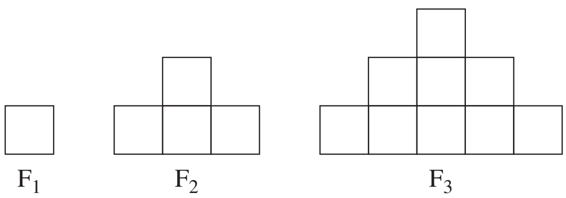
1.7

Calculer quelques éléments de la suite (a_n) donnée , puis conjecturer une définition explicite et la démontrer par récurrence :

1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
2) $b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

1.8

Soit la suite de figures F_n dont les trois premières sont représentées ci-dessous.



Le côté d'un petit carré mesure 1 unité. Etablir la formule de récurrence et une formule explicite pour :

1) L'aire a_n de la figure F_n.
2) Le périmètre p_n de la figure F_n.

Démontrer les résultats obtenus par récurrence.

1.9

Trouver le terme a_n des progressions arithmétiques suivantes, puis calculer $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

a) $a_1 = 4, a_2 = 6, a_3 = 8, a_4 = 10, ...$

b) $a_1 = 17, a_2 = 14, a_3 = 11, a_4 = 8, ...$

c) $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{n-1}{n}, a_3 = \dfrac{n-2}{n}, a_4 = \dfrac{n-3}{n}, \cdots$

d) $a_1 = \dfrac{n^2-1}{n}, a_2 = n, a_3 = \dfrac{n^2+1}{n}, a_4 = \dfrac{n^2+2}{n}, \cdots$

1.10

Trouver cinq termes consécutifs de la progression $\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{21}{2}, \cdots$ ayant pour somme $\dfrac{375}{2}$.

1.11

Dans une progression arithmétique de 10 termes, la somme des termes est 245 et la différence des extrêmes est 45. Quelle est cette progression ?

1.12

Calculer en fonction de n la somme des n premiers nombres naturels non nuls.

1.13

Calculer x pour que les carrés de $1+x, q+x, q^2+x$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique (q est un paramètre réel).

1.14

Les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30 sièges, 32 sièges, 34 sièges, et ainsi de suite. De la onzième rangée à la vingtième rangée, chaque rangée est formée de 50 sièges. Calculer le nombre total de sièges dans cette partie du stade.

1.15

Les méthodes de **dépréciation** sont parfois utilisées par les financiers et les particuliers pour estimer la valeur d'un objet pendant une durée de vie de n années. Dans la méthode de la somme des années, pour chaque année $k = 1, 2, 3, \cdots, n$,

la valeur de l'objet est diminuée de la fraction $A_k = \dfrac{n-k+1}{1+2+3+\cdots+n}$ de sa valeur initiale.

Sachant que $n = 8$,

a) Calculer $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$.

b) Prouver que la suite $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$ est une progression arithmétique, et calculer S_8.

c) Si la valeur initiale d'un objet est de CHF 1'000.-, quelle sera sa dépréciation après 4 ans ?

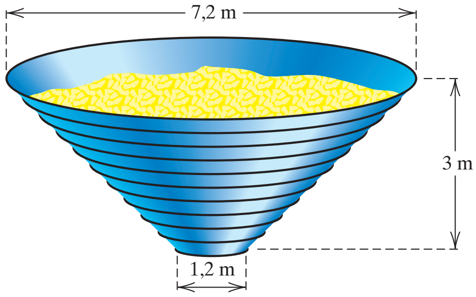
1.16

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $x^4 + px^2 + q = 0$ admette quatre racines en progression arithmétique ? (x est l'inconnue de l'équation)

1.17

Insérer deux nombres a et b entre 4 et 500 de sorte que la suite 4, a, b, 500 forme une progression géométrique.

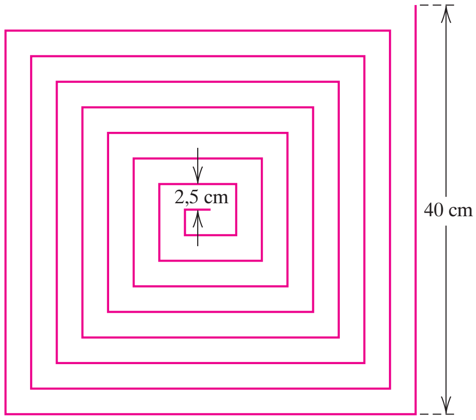
1.18



Un silo à grains doit être construit en forme de tronc de cône. Le silo doit avoir une hauteur de 3 m et 11 anneaux métalliques de renforcement sont répartis uniformément sur son pourtour, à partir de l'ouverture du haut, d'un diamètre de 7.2 m, jusqu'à l'ouverture du bas, d'un diamètre de 1.2 m.
Calculer la longueur totale de métal nécessaire pour fabriquer les anneaux.

1.19

Calculer la longueur totale de la ligne brisée dans la figure ci-contre, sachant que la largeur totale du labyrinthe formé par la courbe est de 40 cm et tous les couloirs du labyrinthe ont une largeur de 2.5 cm.
Quelle est la longueur totale de la ligne si la largeur totale du labyrinthe est de 80 cm ?



1.20

La méthode du bilan de dépréciation double est une méthode de dépréciation dans laquelle, pour chaque année $k = 1, 2, 3, \cdots, n$,

la valeur d'un capital est diminuée de la fraction $A_k = \dfrac{2}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{k-1}$ de sa valeur initiale.

Sachant que $n = 5$,

a) Calculer A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

b) Prouver que la suite A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 est une progression géométrique, et calculer S_5.

c) Si la valeur initiale d'un objet est de CHF 25'000, quelle valeur de ce montant se sera dépréciée après 2 ans ?

1.5 Réponses

1.1

1) a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$; b) 0, 1, 4, 18, 96.
2) $e_1 = 2, e_7 = 29$.
3) $f_1 = 5, f_6 = 3600$.
4) $g_5 = 11$.

1.2

1) 41, 201, 401, 4001.
2) $n = 250000$.
3) $b_n = 4n + 1$
4) $b_0 = 1, b_{n+1} = b_n + 4$.

1.3

1) 486, 118098, 6973568802, $1.03 \cdot 10^{48}$.
2) $n = 209$.
3) $c_n = 2 \cdot 3^n$
4) $c_0 = 2, c_{n+1} = 3 \cdot c_n$

1.4

1) $82.8\pi, 79.6\pi, 76.4\pi, 70\pi, 54\pi, 22\pi$.
2) $u_n = 86\pi - 3.2\pi n$.
3) 26 tours.

1.5

1) 128 cm, 65.5 cm, 21.5 cm, 2.3 cm.
2) $u_n = 200\left(\frac{4}{5}\right)^n$.
3) Dès le 35$^{\text{ème}}$ rebond.

1.6

1) $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.
2) $b_0 = 0,\ b_n = 2(n-1) - 5,\ n \geqslant 1$.
3) $c_0 = 0,\ c_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n,\ n \geqslant 1$.
4) $d_n = \dfrac{10}{2^n} = \dfrac{5}{2^{n-1}}$.
5) $e_n = 1 + 10^{-n-1}$.
6) $f_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$.
7) $g_n = 1 - (-0.1)^{n+1} = 1 + (-1)^n \cdot 10^{-n-1}$.

1.7

1) $a_n = n^2 + 1$.
2) $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1.8

1) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1; a_n = n^2$.
2) $p_{n+1} = p_n + 6; p_n = 6n - 2$.

1.9

a) $t_n = 2 + 2n$ et $S_n = (3 + n) \cdot n$

b) $t_n = 20 - 3n$ et $S_n = \dfrac{(37 - 3n) \cdot n}{2}$

c) $t_n = \dfrac{1}{n}$ et $S_n = \dfrac{n+1}{2}$

d) $t_n = \dfrac{n^2 + n - 2}{n}$ et $S_n = \dfrac{2n^2 + n - 3}{2}$

1.10 $\dfrac{63}{2}, \dfrac{69}{2}, \dfrac{75}{2}, \dfrac{81}{2}, \dfrac{87}{2}$

1.11 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47

1.12 $S_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

1.13

a) si $q \in \mathbb{R} - \{1\}, x = -\dfrac{1}{2}(q+1)^2$ et $r = q - q^3$

b) si $q = 1, x \in \mathbb{R}$ et $r = 0$

1.14 890

1.15

a) $\dfrac{8}{36}, \dfrac{7}{36}, \dfrac{6}{36}, \cdots, \dfrac{2}{36}, \dfrac{1}{36}$.

b) $r = -\dfrac{1}{36}$ et $S_8 = 1$

c) CHF 722.22

1.16 $9p^2 = 100q$ et $p < 0$

1.17 $a = 20$ et $b = 100$

1.18 Environ 145.14 m

1.19 680 cm pour le premier et $2'640$ cm pour le second

1.20

a) $\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{25}, \dfrac{18}{125}, \dfrac{54}{625}, \dfrac{162}{3125}$.

b) $r = \dfrac{3}{5}$ et $S_5 = \dfrac{2882}{3125}$

c) CHF 16’000

Chapitre 2

Convergence des suites numériques

2.1 Suites monotones

Définition 2.1

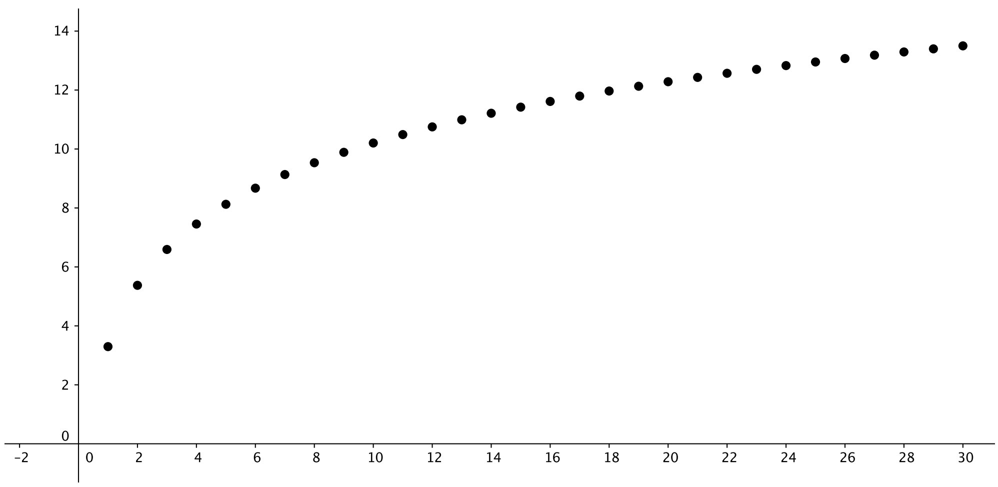
Une suite (u_n) est dite ***croissante*** *si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; elle est dite* ***décroissante*** *si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
La suite est dite ***monotone*** *si elle est soit croissante, soit décroissante.*
De manière analogue, on définit une suite ***strictement croissante*** *si $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et* ***strictement décroissante*** *si $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
La suite est ***strictement monotone*** *lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.*

Exemple 2.1.

a) La suite $(a_n) : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ est croissante, mais non strictement croissante.

b) La suite $(b_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ est strictement décroissante.

c) La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $d_n = 3\ln(n) + \ln(27)$ est strictement croissante, comme en témoigne le graphe ci-dessous.



Remarque 2.1.

Une suite est dite **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une suite alternée peut s'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n\, v_n$ avec $v_n \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Une telle suite n'est ni croissante, ni décroissante.

La croissance ou la décroissance d'une suite (u_n) peut être déterminée en étudiant le signe de la suite $v_n = u_{n+1} - u_n$. On peut le voir dans les exemples qui suivent.

Exemple 2.2.

Prouver que la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$ est strictement croissante.

Exemple 2.3.

Considérons la suite (u_n) définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n - 3}{2} \text{ pour } n \geqslant 1 \end{array} \right.$

Démontrer par récurrence que cette suite est strictement décroissante.

2.2 Suites bornées

Rappelons tout d'abord les notions de majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure.

Définition 2.2

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Un nombre p est un ***majorant*** *de A si $p \geqslant a$ pour tout $a \in A$.*

Un nombre p est un ***minorant*** *de A si $p \leqslant a$ pour tout $a \in A$.*

Un ensemble qui possède un majorant est dit ***majoré*** *; il est dit* ***minoré*** *s'il possède un minorant.*

Si l'ensemble des majorants de A est non-vide, alors il admet un plus petit élément s ; on dit que s est la ***borne supérieure*** *de A (ou le* ***supremum*** *de A). On note $s = \sup A$.*

De même, si l'ensemble des minorants de A est non-vide, alors il admet un plus grand élément i, qu'on appelle la ***borne inférieure*** *de A (ou l'****infimum*** *de A). On note $i = \inf A$.*

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes (données sans démonstration).

Théorème 2.3

a) *Dans $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble majoré non vide possède une borne supérieure et tout sous-ensemble minoré non vide possède une borne inférieure.*

b) *Soit A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$.*

$$s = \sup A \iff s \text{ est un majorant et } (\forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A \text{ tel que } s - \epsilon < a \leqslant s)$$

c) *Soit A un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$.*

$$i = \inf A \iff i \text{ est un minorant et } (\forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A \text{ tel que } i \leqslant a < i + \epsilon)$$

Exemple 2.4.

Soit l'intervalle $A =]-1; 3]$.

Déterminer l'ensemble M de ses majorants et l'ensemble N de ses minorants, ainsi que sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exemple 2.5.

Soit $B = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

a) Déterminer l'ensemble M de ses majorants, ainsi que $\sup u_n$, sa borne supérieure .

b) Déterminer l'ensemble N de ses minorants, ainsi que $\inf u_n$, sa borne inférieure .

Définition 2.4

*Une suite (u_n) est **minorée** si l'ensemble de ses valeurs est minoré, donc s'il existe un nombre réel r tel que $u_n \geqslant r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
*La suite (u_n) est **majorée** si l'ensemble de ses valeurs est majoré, donc s'il existe un nombre réel s tel que $u_n \leqslant s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
*La suite est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque 2.2.

Toute suite croissante est minorée et toute suite décroissante est majorée.

Exemple 2.6.

La suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$ vue dans l'exemple 2.2 est minorée par $a_0 = \dfrac{1}{2}$ puisqu'elle est strictement croisssante.

Prouver les deux affirmations suivantes :

a) La suite (a_n) est majorée par $\dfrac{3}{5}$.

b) $\sup a_n = \dfrac{3}{5}$.

Exemple 2.7.

La suite (b_n) définie par

$$b_n = (-1)^n \cdot n$$

n'est ni majorée ni minorée.

En effet, $|b_n| = n$ croît indéfiniment lorsque n augmente.

2.3 Suites convergentes

Commençons par reprendre l'exemple d'une des suites que nous avons déjà traitées.

Exemple 2.8.

Calculons les termes de rang 10, 100, 200, 300, 400, 500, 1 000 et 10 000 de la suite $\dfrac{3n+1}{5n+2}$ en donnant leur valeur approchée avec 6 chiffres significatifs.

$$a_{10} \cong 0.596\,154, \quad a_{100} \cong 0.599\,602, \quad a_{200} \cong 0.599\,800, \quad a_{300} \cong 0.599\,867,$$
$$a_{400} \cong 0.599\,900, \quad a_{500} \cong 0.599\,920, \quad a_{1'000} \cong 0.599\,920, \quad a_{10'000} \cong 0.599\,996$$

On constate que les termes de la suite (a_n) se rapprochent de plus en plus du nombre $\dfrac{3}{5} = 0.6$.

Déterminer l'ensemble des indices pour lesquels cette différence est inférieure au milliardième, soit à $\epsilon = 10^{-9}$.

Traduit en langage symbolique, la convergence d'une suite se définit comme suit.

Définition 2.5

> *Soit $L \in \mathbb{R}$. Une suite* $\boldsymbol{(u_n)}$ ***converge vers L*** *si pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel p (qui dépend de ϵ) tel que $|u_n - L| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant p$.*
>
> *Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, et on dit que L est la* ***limite de la suite*** *(u_n).*
>
> *On dit que la suite* ***diverge*** *si elle n'est pas convergente.*

Exemple 2.9.

a) La suite (b_n) définie par $b_n = (-1)^n$ diverge.

b) Prouver que la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers $L = 0$.

Remarque 2.3.

On prouve de manière analogue que la suite $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où k est un entier positif, converge vers $L = 0$.

Théorème 2.6

Dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), si une suite admet une limite, cette limite est unique.

*On parlera donc de **la limite** d'une suite convergente.*

Lemme 2.7

[**Inégalité triangulaire**] *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Preuves

Remarque 2.4.

La limite d'une suite n'est pas forcément unique si l'espace n'est pas de Hausdorff... (cf. cours de topologie générale à l'EPFL).

2.4 Théorèmes de convergence

Enonçons un théorème important concernant les suites convergentes.

Théorème 2.8

a) *Une suite convergente est bornée.*

b) *Toute suite croissante (à partir d'un certain rang) qui est majorée converge ; toute suite décroissante (à partir d'un certain rang) qui est minorée converge.*

Preuve

Corollaire 2.9

a) Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

b) Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.

c) Toute suite monotone et bornée est convergente.

Remarque 2.5.

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais non convergente.

Exemple 2.10.

La suite (u_n) de l'exemple 2.3 est strictement décroissante, et on peut aisément prouver, par récurrence, qu'elle admet comme borne inférieure $\inf u_n = -3$. Par le corollaire ci-dessus, (u_n) converge vers la limite $L = -3$.

Exemple 2.11.

On considère à nouveau la suite de l'exemple 2.5, à savoir $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démontrer que cette suite est strictement croissante et en déduire la valeur de sa limite.

Théorème 2.10

a) ***Théorème des deux gendarmes***

Soit (a_n) *et* (b_n) *deux suites qui convergent vers la même limite* L*.*

Si une suite (c_n) *est telle qu'il existe un entier* N *avec* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \ \forall n \geqslant N$*, alors la suite* (c_n) *converge également vers la limite* L*.*

b) *Soit* (x_n) *et* (y_n) *des suites convergentes de limites respectives* x *et* y*. On a :*

1) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

3) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$ *si* $y \neq 0$ *et* $y_n \neq 0$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |x|$

Lemme 2.11

[**Inégalité triangulaire inverse**] *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x - y|$.

Preuves

Exemple 2.12.

On rappelle, comme on l'a vu dans l'exemple 2.9, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

a) Dans l'exemple 2.8, on a prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{5n+2} = \dfrac{3}{5}$. Démontrer ce résultat en utilisant le théorème 2.10.

b) Considérons la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_n & = & \dfrac{\sin(n^3)}{n}, \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

Prouver que cette suite est convergente et calculer sa limite.

c) Soit la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ x_n & = & \dfrac{(-1)^n}{2n^2}, \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

Prouver que cette suite est convergente et calculer sa limite.

2.5 Extension de la notion de limite

Exemple 2.13. Considérons les suites suivantes :

$$(a_n) = (10^n) : 1,\ 10,\ 100,\ 1\,000,\ 10\,000,\ 100\,000,\ \ldots$$
$$(b_n) = ((-1)^n \cdot (n+1)) : 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ \ldots$$

On constate que les suites non bornées (a_n) et (b_n) ont des « comportements à l'infini » différents : lorsque n tend vers l'infini, la suite (a_n) augmente indéfiniment ; on peut même prouver que pour tout nombre positif donné arbitrairement, les termes de la suite (a_n) deviennent et restent, à partir d'un certain rang, supérieurs à ce nombre. Ce n'est pas le cas de la suite (b_n) qui alterne des valeurs positives et négatives.

Dans le cas de la suite (a_n), on dit que celle-ci tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

On peut donc dire que la limite de cette suite est infinie, mais on ne peut pas parler de convergence dans cette situation. En effet, toute suite qui admet une limite infinie est divergente.

Donnons une définition plus précise d'une limite infinie.

Définition 2.12

*La suite (u_n) **tend vers $+\infty$** si elle satisfait la propriété suivante :*

$$\forall\, M > 0, \exists\, p \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \ (n \geqslant p \implies u_n > M)$$

*La suite (u_n) **tend vers $-\infty$** si elle satisfait la propriété suivante :*

$$\forall\, M < 0, \exists\, p \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \ (n \geqslant p \implies u_n < M)$$

Exemple 2.14.

a) Prouver que la suite $(a_n) = (n^2)$ tend vers $+\infty$.

Exemple 2.15.

Soit la suite (b_n) définie par $b_n = \dfrac{n^2}{1-n}$ pour $n \geqslant 2$.

Déterminer le plus petit entier p tel que $(n \geqslant p \implies u_n < -1000)$.

2.6 Convergence d'une suite géométrique

Puisqu'une suite arithmétique de pas d n'est pas bornée, elle diverge par le théorème 2.8.

Pour les suites géométriques, le critère de convergence est le suivant. Ces résultats sont donnés sans démonstration.

Théorème 2.13

Soit (b_n) une suite géométrique de raison $r \neq 0, 1$. Alors

1) Si $r > 1$, la suite (b_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

2) Si $0 < r < 1$, la suite (b_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

3) Si $-1 < r < 0$, la suite (b_n) est alternée et converge vers 0.

4) Si $r \leqslant -1$, la suite (b_n) est alternée et divergente.

Exemple 2.16.

Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n =$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n =$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-3)^n =$

2.7 Somme infinie de termes en progression géométrique

Théorème 2.14

Soit $b_n = b_0 \cdot r^n$ *une suite géométrique de raison* $r \neq 0, 1$.
La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ *converge si et seulement si* $|\, r \,| < 1$ *et dans ce cas :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = b_0 + b_0 \cdot r + b_0 \cdot r^2 + \cdots + b_0 \cdot r^n + \cdots = \frac{b_0}{1-r}$$

Preuve

Exemple 2.17.

Zénon d'Elée (philosophe grec né vers 480 avant J.-C.) énonça le problème suivant : on décide de faire courir ensemble Achille et une tortue ; Achille doit rattraper la tortue à qui l'on a donné une certaine avance ; les deux antagonistes partent en même temps. Zénon d'Elée présente l'argumentation suivante : Lorsque Achille atteint la position de départ de la tortue, celle-ci a avancé d'une certaine distance ; pendant qu'Achille franchit cette deuxième distance, la tortue s'est éloignée d'une nouvelle distance ; lorsque Achille parcourt cette troisième distance, la tortue s'est encore éloignée. En continuant ce raisonnement, on peut prétendre qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue.

On suppose qu'Achille court à 10 m/s, que sa vitesse vaut 40 fois la vitesse de la tortue et que la distance entre Achille et la tortue vaut 390 m.

Calculer le temps mis par Achille pour rattraper la tortue en calculant la somme infinie des temps mis par Achille pour passer d'une position de la tortue à la suivante.

2.8 Exercices

2.1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-2}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite est monotone pour $n \geq 1$.

2.2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la formule de récurrence $u_n = \dfrac{3u_{n-1}+5}{4}$, $n \geqslant 1$.

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite est monotone.

2.3

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{7-2n}{3n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite est décroissante.
2) Démontrer que cette suite possède -1 comme minorant.
3) Quelle est la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de la suite ? Justifier la réponse.

2.4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \sqrt{2}$ et la formule de récurrence $u_n = \sqrt{2u_{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

1) Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2) Prouver par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
3) Prouver que 2 est un majorant de (u_n).

2.5

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Ecrire sous forme décimale les termes $u_1, u_5, u_{10}, u_{100}, u_{1'000}$ et $u_{10'000}$. Conjecturer la valeur L de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2) Calculer le plus petit entier p tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq p \Longrightarrow |u_n - L| < 10^{-6})$.
3) En utilisant la définition de la limite, prouver que la valeur L est bien la limite de la suite (u_n).

2.6

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculer le plus petit entier p tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq p \Longrightarrow |u_n - 1| < 10^{-100})$.

2.7

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+3n-2}{(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Ecrire les quatre premiers termes de la suite.
2) Prouver que la suite est croissante.
3) Prouver que la suite est bornée.
4) En utilisant la définition de la limite, prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2.8

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la formule de récurrence $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \geqslant 1$.

1) Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer une formule pour u_n.
2) Démontrer la formule par récurrence.
3) En utilisant la définition de la limite, prouver que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2.9

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Prouver par récurrence que la suite est majorée par 2 et minorée par 1.
3) Prouver que la suite est croissante.
4) La limite L de la suite (u_n) existe-t-elle ? Si c'est le cas, la calculer. Justifier le résultat.

2.10

Etudier la convergence de chacune des suites suivantes. Justifier le résultat.

Pour chacune de ces suites, calculer la limite si elle existe.

a) $(a_n) = \left(\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) $(b_n) = \left(\dfrac{\cos(\sqrt[3]{n+1})}{\sqrt[4]{n^3+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c) $(c_n) = \left(\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2.11

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$.

Calculer le plus petit entier p tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq p \Longrightarrow |u_n| > 1'000)$.

2.12

Déterminer le plus petit entier p tel que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq p \Longrightarrow 1.1^n > 100\,000)$.
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq p \Longrightarrow \sqrt[3]{n^2} > 100\,000)$.

2.13

Calculer la somme des n premières puissances de $\frac{2}{3}$; vers quelle limite tend cette somme pour n tendant vers l'infini ?

2.14

Trouver le code fractionnaire de $2.4\overline{17}$.

2.15

Le poids d'un pendule balance le long d'un arc de 24 cm de long lors de son premier balancement. Sachant que la longueur de chaque balancement successif est approximativement les $\frac{5}{6}$ de la longueur qu'il avait parcourue lors du balancement précédent, utiliser une série géométrique illimitée pour évaluer la distance totale que parcourt le poids avant de s'arrêter.

2.16

En reliant les milieux des côtés d'un carré de côté a, on obtient un deuxième carré, dont on joint les milieux des côtés pour obtenir un troisième carré, et ainsi de suite ... Calculer la limite de la somme des aires de ces carrés.

2.17

Dans un cercle de rayon r on inscrit un carré. Dans ce carré, on inscrit un cercle. Dans ce cercle on inscrit un carré et ainsi de suite. On demande :

a) La limite de la somme des aires des cercles.

b) La limite de la somme des aires des carrés.

2.18

Dans un triangle équilatéral de côté a_1, on inscrit un cercle dont le rayon est noté r_1. Dans ce cercle, on inscrit un triangle équilatéral et on désigne son côté par a_2. Puis on désigne le rayon du cercle suivant par r_2 , le côté du triangle équilatéral suivant par a_3, et ainsi de suite.
Calculer :

a) La limite de la somme des rayons des cercles inscrits.

b) La limite de la somme des côtés des triangles équilatéraux.

c) La limite de la somme des aires des cercles.

d) La limite de la somme des aires des triangles.

2.9 Réponses

2.1
1) $2, -1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}$.
2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{(2n+1)(2n-1)}$. (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

2.2
1) $1, 2, \frac{11}{4}, \frac{53}{16}, \frac{239}{64}$.
2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n + 5}{4}$ ou $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{4}(u_n - u_{n-1})$. (u_n) est strictement croissante.

2.3
1) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-25}{(3n+2)(3n+5)}$.
3) $\inf u_n = -\dfrac{2}{3}$

2.4
1) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[8]{2^7}, \sqrt[16]{2^{15}}$.

2.5
1) $u_1 \approx 0.2222, u_5 \approx 0.56, u_{10} \approx 0.6444, u_{100} \approx 0.7383, u_{1000} \approx 0.7488, u_{10000} \approx 0.7499; L = \dfrac{3}{4}$
2) $p = 1'187'499$

2.6 $p = 333$.

2.7
1) $-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.

2.8
1) $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

2.9
1) $u_1 = \frac{5}{3}, u_2 = \frac{21}{11}$.
4) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

2.10

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \dfrac{1}{3}$

2.11 $p = 501$.

2.12

1) $p = 121$.
2) $p = 31'622'777$.

2.13 $S_n = 2\left(1 - (\frac{2}{3})^n\right)$ et $S = 2$

2.14 $\frac{2393}{990}$

2.15 144 cm

2.16 $2a^2$ en comptant le carré donné

2.17

a) $2\pi r^2$

b) $4r^2$

2.18

a) $\frac{a_1\sqrt{3}}{3}$

b) $2a_1$

c) $\frac{\pi a_1^2}{9}$

d) $\frac{a_1^2\sqrt{3}}{3}$

Chapitre 3

Nombres complexes

Soit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(a;b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition et de la multiplication suivantes :

- $(a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$
- $(a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc)$

Exemple 3.1.

Effectuer les opérations suivantes :

a) $(3;4) + (5;-2) =$

b) $(3;4) \cdot (5;-2) =$

c) $(-2;5) \cdot (1;0) =$

d) $(0;1) \cdot (-2;5) =$

e) $(2;-1)^2 =$

f) $(0;1)^2 =$

Propriétés des opérations

1) L'addition et la multiplication sont **commutatives**.
2) $(0;0)$ est l'**élément neutre** de l'addition : $(a;b) + (0;0) = (0;0) + (a;b) = (a;b)$
3) $(1;0)$ est l'**élément neutre** de la multiplication : $(a;b) \cdot (1;0) = (1;0) \cdot (a;b) = (a;b)$
4) Tout élément $(a;b) \neq (0;0)$ possède un inverse :

   $(a;b)^{-1} =$

3.1 Nombres complexes $\mathbb{C}$

Avec les notations

- $(1;0) = 1$ et $(a;0) = a(1;0) = a$
- $(0;1) = i$ et $(0;b) = b(0;1) = bi$
- $(a;b) = a(1;0) + b(0;1) = a + bi$

L'ensemble des **nombres complexes** est défini par

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

- Si $z = a + bi$, a est la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire** de z.
  On note $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.
- $z = bi$, avec $b \neq 0$, est dit **imaginaire pur**.

Remarque 3.1.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales :

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Opérations dans $\mathbb{C}$

addition

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mutiplication

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemple 3.2.

a) $(-2 + 4i) - (5 - 3i) =$

b) $i^4 =$

c) $(4 - 5i)(3 + 2i) =$

d) $(3 - 5i)^2 =$

e) $(1 - i)(1 + i) =$

f) $(3 + i)^3 =$

Inverse et division

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$

Exemple 3.3.

Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a+bi$.

a) $\dfrac{1}{5-12i} =$

b) $\dfrac{15-35i}{3+4i} =$

3.2 Conjugué et module

- Le **conjugué** de $z = a+bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.
- Le **module** de $z = a+bi$ est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Remarque 3.2.

On peut obtenir le module d'un nombre complexe à l'aide du conjugué : $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Propriétés du module et du conjugué

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

4) $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ si $\lambda \in \mathbb{R}$

5) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

8) $|z^m| = |z|^m$

9) $|z| = 0 \iff z = 0$

3.3 Racines carrées d'un nombre complexe

Les solutions de l'équation $z^2 = u$ sont appelées les **racines carrées** du nombre complexe u.

Exemple 3.4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 4$

b) $z^2 = 32$

c) $z^2 = -25$

Racines carrées d'un complexe non réel

Exemple 3.5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 15 + 8i$.

Cas général

$$(x+yi)^2 = a + bi \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

3.4 Equations dans $\mathbb{C}$

On résoud une équation dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ à l'aide des mêmes principes d'équivalence.

Equations du premier degré

Exemple 3.6.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z - 2 = (4 - z) \cdot i$

Equations du deuxième degré

Pour résoudre l'équation du deuxième degré en z

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation possède alors les deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

qui sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et identiques (solution double) si $\Delta = 0$.

Exemple 3.7.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+3i)z + i - 5 = 0$.

3.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $\mathbb{C}[z]$ l'ensemble des polynômes en la variable z à coefficients complexes.

Théorème fondamental de l'algèbre (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855)

- Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré n se décompose en un produit de n polynômes du premier degré à coefficients complexes.
- Toute équation polynomiale à coefficients complexes de degré n admet n solutions complexes (distinctes ou non). La somme de la multiplicité des solutions est égale à n.

Exemple 3.8.

Factoriser dans $\mathbb{C}[z]$ les polynômes suivants :

1 $P(z) = z^2 - 2z + 5 =$

2 $Q(z) = z^2 - (2+3i)z + i - 5 =$

3.6 Conséquences du théorème fondamental pour les polynômes à coefficients réels

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en la variable x à coefficients réels.

- Si un nombre complexe $z = a + bi$ est un zéro d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ à coefficients réels, alors son conjugué $\overline{z} = a - bi$ est également zéro de ce polynôme.
- Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n se décompose en un produit de polynômes du premier degré à coefficients réels et de polynômes du deuxième degré à discriminant négatif.
- Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré impair possède un zéro réel.

Exemple 3.9.

a) Vérifier que $z = 1 + i$ est un zéro du polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.
En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

b) Factoriser $Q(x) = x^4 + 64$ dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

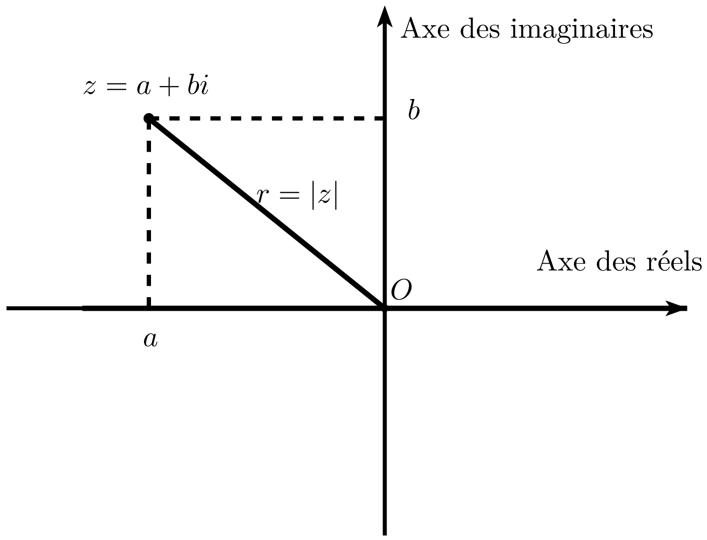
3.7 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

3.7.1 Représentation géométrique

On représente géométriquement les nombres complexes dans le **plan d'Argand-Cauchy** ou **plan de Gauss** :

On associe à un nombre complexe $z = a + bi$ le point $P(a; b)$ dans un système orthonormé Oxy.

- L'axe Ox est appelé l'**axe des réels**
- L'axe Oy est appelé l'**axe des imaginaires**
- Le nombre complexe $z = a + bi$ associé à un point $P(a; b)$ du plan est appelé l'**affixe** de P



Remarque 3.3.

1) Les points correspondants à $z = a + bi$ et à son conjugué $\overline{z} = a - bi$ sont symétriques relativement à Ox.
2) Le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de $z = a + bi$ est la distance entre l'origine $(0; 0)$ et le point $P(a; b)$ qui représente z.
3) **L'addition de nombres complexes** correspond à **une addition vectorielle**.

   Plus précisément, soient $P(a; b)$ et $Q(c; d)$ deux points du plan de Gauss, ainsi que $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$ les affixes respectives de P et Q.

   Le nombre complexe $z = z_1 + z_2$, somme des nombres complexes z_1 et z_2, est l'affixe du point R du plan de Gauss tel que
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

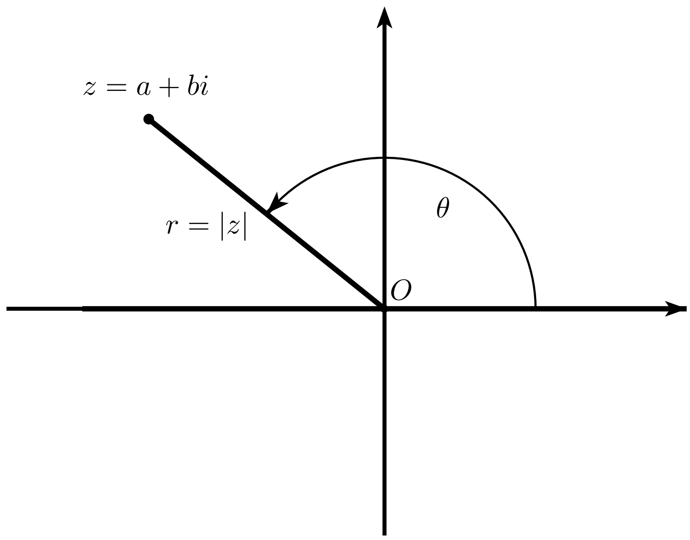
3.7.2 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique de $z = a + bi$ est donnée par

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ est le **module** de z
- θ est l'angle orienté de côté initial Ox et de côté final OP, où $P(a; b)$ est le point associé à z
- θ est appelé un **argument** de z.



Remarque 3.4.

1) La forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'abrège $z = r\, cis(\theta)$
2) La forme trigonométrique n'est pas unique : il y a une infinité de choix possible de l'angle θ.
3) Les arguments d'un même nombre complexe diffèrent d'un multiple de 2π.

Exemple 3.10.

Exprimer les nombres complexes $z_1 = -4+4i$, $z_2 = 2\sqrt{3}-2i$ et $z_3 = 2+7i$ sous forme trigonométrique.

3.7.3 Produit et division sous forme trigonométrique

Soit $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) = r_1\, cis(\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = r_2\, cis(\theta_2)$ deux nombres complexes donnés sous forme trigonométrique. Le produit et la somme sous forme trigonométrique sont les suivants.

- $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) = r_1 r_2\, cis(\theta_1 + \theta_2)$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) = \dfrac{r_1}{r_2}\, cis(\theta_1 - \theta_2)$

Remarque 3.5.

Le module du produit est le produit des modules ; l'argument du produit est la somme des arguments.

Exemple 3.11.

A l'aide de la forme trigonométrique de $z_1 = -4 - 4i$ et de celle de $z_2 = -2i$, déterminer la forme trigonométrique de $z_1 \cdot z_2$ et de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Vérifier le résultat en effectuant le calcul sous forme algébrique.

3.8 Racines n-ième d'un nombre complexe

3.8.1 Formule de De Moivre

$$z^n = [r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Exemple 3.12.

Calculer $(1+i)^{10}$ en utilisant la formule de De Moivre.

3.8.2 Racines n-ième

Soit $u = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ un nombre complexe non nul et n un entier positif.

Les racines n-ième de u sont les solutions complexes de $z^n = u$.

u possède n racines n-ième distinctes données par :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

Exemple 3.13.

a) Déterminer les racines cubiques de $z = 1$.

b) Déterminer les racines sixièmes de $z = -1$.

3.9 Exercices

3.1 Calculer oralement.

1) $z_1 = 1 + 4\,i$ $z_2 = 2 - 5\,i$ $z_1 + z_2 =$ ....

2) $z_1 = 1 + 6\,i$ $z_2 = 2 + 5\,i$ $z_1 + z_2 =$ ....

3) $z_1 = 2 + 4\,i$ $z_2 = 2 - 4\,i$ $z_1 + z_2 =$ ....

4) $z_1 = 8 + 7\,i$ $z_2 = -8 - 7\,i$ $z_1 + z_2 =$ ....

3.2 Calculer oralement.

1) $z_1 = 1 + 2\,i$ $z_2 = 2 + i$ $z_1 z_2 =$ ....

2) $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 2 - 5\,i$ $z_1 z_2 =$ ....

3) $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 2 + 2\,i$ $z_1 z_2 =$ ....

4) $z_1 = -3 + i$ $z_2 = 2 + 3\,i$ $z_1 z_2 =$ ....

5) $z_1 = -1 + 3\,i$ $z_2 = 3 - 5\,i$ $z_1 z_2 =$ ....

6) $z_1 = -2 - 2\,i$ $z_2 = -1 + 3\,i$ $z_1 z_2 =$ ....

3.3 Soit $z_1 = 7 - 5\,i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -5 + 2\,i$, $z_4 = -10 - 3\,i$, $z_5 = 8$ et $z_6 = 8\,i$.

Calculer

1) $z_1 - z_3 - z_5$ 2) $z_2 + (z_3 - z_4)$ 3) $z_5 - (z_6 - z_1)$

4) $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4$ 5) $z_1^2 + z_2^2$ 6) $z_3^2 + z_4^2$

7) $z_2 \cdot (z_4 - z_6)$ 8) $i \cdot z_4 - z_3 \cdot z_6$ 9) $\mathrm{Re}(z_1 + 4\,z_2)$

10) $\mathrm{Re}(z_1^2 \cdot z_3)$ 11) $\mathrm{Im}(2z_2 - 3z_3)$ 12) $\mathrm{Im}(z_2^2 \cdot z_4)$

3.4 Calculer l'inverse $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ de z (a et b sont des nombres réels non nuls).

1) $z = 2 + i$ 2) $z = 4 + 3\,i$ 3) $z = -24 - 7\,i$

4) $z = i$ 5) $z = a$ 6) $z = b\,i$

3.5 Exprimer les nombres complexes sous la forme $a + b\,i$.

1) $15\,i : 3$	2) $15 : 5\,i$	3) $30 : 6\,i$
4) $8i : (-12\,i)$	5) $(-100) : 20\,i$	6) $(5 + 3\,i) : (2 + 4\,i)$
7) $(63 + 16\,i) : (4 + 3\,i)$	8) $(56 + 33\,i) : (12 - 5\,i)$	9) $(13 - 5\,i) : (1 - i)$
10) $\dfrac{1+2\,i}{2+i}$	11) $\dfrac{-1+3\,i}{3-5\,i}$	12) $\dfrac{1+i}{1-i}$
13) $\dfrac{3-2\,i}{4\,i+5}$	14) $\dfrac{1+2\,i}{1-2\,i}$	15) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

3.6 Soit $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$. Calculer $z^2, z^3, 1 + z + z^2$.

3.7 Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant (z et z' sont les inconnues complexes).

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \\ (1+i)z - iz' = 2+i \end{cases}$$

3.8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$.

3.9 Calculer le module $|\,z\,|$ des nombres complexes suivants.

1) $z = 2 + 3i$	2) $z = 1 + i$	3) $z = 2i$
4) $z = -3i$	5) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$	6) $z = 5$
7) $z = -6$	8) $z = 0$	9) $z = \cos(t) + i\sin(t)$

3.10 1) Calculer $(a + bi) \cdot (a - bi)$

2) Calculer $z_1 = (a + b\,i)(c + d\,i)$ et $z_2 = (a - b\,i)(c - d\,i)$; quel lien y a-t-il entre z_1 et z_2 ?

3) En utilisant les résultats obtenus aux points 1 et 2, montrer comment transformer le produit de la somme de deux carrés $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ en une somme de deux carrés.

3.11 Résoudre les équations dans les nombres complexes.

1) $2z - 3 + i = 0$	2) $(1 - 4\,i)\,z = 6 - 7\,i$
3) $5z = 8i\,z + (81 - 5\,i)$	4) $(2 + i)\,z - (5 + 2\,i) = 8 - 3\,i$

5) $(1+2\,i)\,z=(5-i)z+(7+26\,i)$ 6) $(z+5\,i)(4+2\,i)-(z+2)(4+2\,i) \;=\; 24+2\,i$

3.12 Quelles sont les racines carrées des nombres complexes suivants ?

1) -16 2) $8\,i$ 3) $5+12\,i$

4) $-32+24\,i$ 5) $16-30\,i$ 6) $15-8\,i$

7) $-8-6\,i$ 8) i

3.13 Résoudre dans les complexes les équations réelles quadratiques suivantes.

1) $x^2=25$ 2) $x^2=-169$ 3) $(x-2)^2=289$

4) $(2x-5)^2=-25$ 5) $x^2+6x=-25$ 6) $2x^2+10x=-13$

3.14 Résoudre dans les complexes les équations quadratiques suivantes.

1) $(1+i)\,z^2+(i-6)\,z+(2-3\,i)=0$ 2) $2\,i\,z^2+3(1+i)\,z+(3-i)=0$

3) $(i-3)\,z^2+(7-11\,i)\,z+(4+6\,i)=0$ 4) $z^2-(1+12\,i)\,z-(13+9\,i)=0$

5) $z^4+2\,(2\,i-1)\,z^2-(3-4\,i)=0$.

3.15 On considère la fonction complexe f définie sur $\mathbb{C}-\{-i\}$ par $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z)=i$.

2) Trouver les éléments z invariants par f, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)=z$.

3.16 Soit l'équation complexe $z^3-i\,z^2-i\,z-1=0$.

1) Vérifier que $z=i$ est solution de cette équation.

2) Résoudre complètement l'équation ci-dessus.

3.17 Soit l'équation $3z^3+2z^2+7z-20=0$.

1) Vérifier que le nombre complexe $u=-1+2\,i$ est solution de l'équation ci-dessus.

2) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

3) En déduire une factorisation du polynôme $p(x)=3x^3+2x^2+7x-20$ dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

3.18 Factoriser complètement les polynômes $p(x)$ suivants dans l'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à coefficients complexes et dans $\mathbb{R}x$ des polynômes à coefficients réels.

1) $p(x) = x^4 - 1$ 2) $p(x) = x^4 + 1$

3) $p(x) = x^3 + 1$ 4) $p(x) = x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64$.

3.19 Décomposer le polynôme $T(z) = z^8 + 63z^4 - 64$ dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

3.20 Dans le plan de Gauss, on désigne par A, B et C les représentations géométriques des nombres complexes $z_1 = 1 + 2\,i$, $z_2 = 4 - 2\,i$ et $z_3 = 1 - 6\,i$.

Vérifier par calculs que le triangle ABC est isocèle et déterminer la longueur de ses côtés.

3.21 Dans le plan de Gauss, on désigne par A, B, C et D des points non alignés qui sont les représentations géométriques respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 . Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$.

3.22 Exprimer les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique en donnant un argument compris entre 0 et 2π.

1) $1 - i$ 2) $\sqrt{3} + i$ 3) $-2 - 2\,i$

4) $-6\,i$ 5) -7 6) $4 - 3\,i$

3.23 Utiliser les formes trigonométriques pour calculer $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

1) $z_1 = -1 + i$ $z_2 = 1 + i$ 2) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ $z_2 = 5\,i$

3) $z_1 = 2\,i$ $z_2 = -3\,i$ 4) $z_1 = -10$ $z_2 = -4$

3.24 Calculer le module et un argument des nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et utiliser ce résultat pour calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3.25 Utiliser la formule de De Moivre pour écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique : $z_1 = \left(1+\sqrt{3}\ i\right)^7$, $z_2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}\right)^{10}$ et $z_3 = (-2-2\ i)^{10}$.

3.26 Calculer les quatre racines quatrièmes de $-1-\sqrt{3}\ i$.

3.27 Calculer les cinq racines cinquièmes de $1+i$.

3.28 Calculer les huit racines huitièmes de l'unité.

3.29 Déterminer les solutions complexes des équations suivantes.

1) $x^4 - 16 = 0$ 2) $x^3 + 8i = 0$

3) $x^4 + 81 = 0$.

3.30 En électricité, on utilise souvent la forme trigonométrique des nombres complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$ pour décrire le courant (I), la tension (U) et l'impédance (Z) d'un circuit à courant alternatif. L'impédance représente l'opposition du circuit électrique au passage du courant électrique. La relation entre ces trois quantités est $Z = \underline{U}/\underline{I}$. Calculer la quantité inconnue et exprimer le résultat sous forme algébrique en arrondissant le résultat à 2 décimales près (voir annexe).

1) $\underline{I} = 10\,\mathrm{cis}(35°)$, $Z = 3\ \mathrm{cis}(20°)$

2) $\underline{I} = 8\,\mathrm{cis}(5°)$, $\underline{U} = 115\ \mathrm{cis}(45°)$

3) $\underline{U} = 163\ \mathrm{cis}(17°)$, $Z = 78\ \mathrm{cis}(61°)$.

3.31 Le module de l'impédance Z représente l'opposition totale d'un circuit au passage du courant électrique. La valeur absolue de la partie réelle de Z représente la résistance, soit l'opposition d'un circuit au passage du courant électrique. La valeur absolue de la partie imaginaire de Z représente la réactance. L'unité pour ces trois grandeurs est le Ohm (Ω). Calculer l'opposition totale, la résistance et la réactance si $\underline{I}$ = 5 cis(90°) et $\underline{U}$ = 220 cis(34°) (voir annexe).

3.10 Réponses

3.1 1) $3-i$; 2) $3+11\,i$; 3) 4 ; 4) 0.

3.2 1) $5\,i$; 2) $7-3\,i$; 3) $4\,i$; 4) $-9-7\,i$; 5) $12+14\,i$; 6) $8-4\,i$.

3.3 1) $4-7\,i$; 2) $7+6\,i$; 3) $15-13\,i$; 4) $367-315\,i$; 5) $27-66\,i$; 6) $112+40\,i$;

7) $-9-32\,I$; 8) $19+30\,i$; 9) 15 ; 10) 20 ; 11) -4 ; 12) -49.

3.4 1) $\frac{1}{5}(2-i)$; 2) $\frac{1}{25}(4-3\,i)$; 3) $\frac{1}{625}(-24+7\,i)$; 4) $-i$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $-\frac{1}{b}\,i$.

3.5 1) $5\,i$; 2) $-3\,i$; 3) $-5\,i$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $5\,i$; 6) $\frac{1}{10}(11-7\,i)$; 7) $12-5\,i$;

8) $3+4\,i$; 9) $9+4\,i$; 10) $\frac{1}{5}(4+3\,i)$; 11) $\frac{1}{17}(-9+2\,i)$; 12) i ; 13) $\frac{1}{41}(7-22\,i)$;

14) $\frac{1}{5}(-3+4\,i)$; 15) $\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

3.6 $z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z^3=1,\quad 1+z+z^2=0$ **.**

3.7 $(3-i\ ;\ 1-2i)$.

3.8 $z=\frac{4}{13}+i$.

3.9 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2 ; 4) 3 ; 5) 1 ; 6) 5 ; 7) 6 ; 8) 0 ; 9) 1 .

3.10 1) a^2+b^2 ; 2) $z_1=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$; $z_2=(ac-bd)-(ad+bc)\,i$; $z_2=\overline{z_1}$;

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

3.11 1) $z=\frac{3-i}{2}$; 2) $z=2+i$; 3) $z=5+7\,i$; 4) $z=5-3\,i$; 5) $z=2-5\,i$; 6) aucune solution .

3.12 1) $\pm 4\,i$; 2) $\pm(2+2\,i)$; 3) $\pm(3+2\,i)$; 4) $\pm(2+6\,i)$; 5) $\pm(5-3\,i)$; 6) $\pm(4-i)$;

7) $\pm(1-3\,i)$; 8) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$.

3.13 1) $\{\pm 5\}$; 2) $\{\pm 13\,i\}$; 3) $\{-15\ ;\ 19\}$; 4) $\left\{\frac{5}{2}\pm\frac{5}{2}\,i\right\}$; 5) $\{-3\pm 4\,i\}$; 6) $\left\{-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\,i\right\}$.

3.14 1) $\left\{2-3\,i\ ;\ \frac{1}{2}(1-i)\right\}$; 2) $\left\{i\ ;\ \frac{1}{2}(-3+i)\right\}$; 3) $\left\{3-2i\ ;\ \frac{1}{5}(1-3\,i)\right\}$;

4) $\{-1+i\ ;\ 2+11\,i\}$; 5) $\{i\ ;\ -i\ ;\ 2-i\ ;\ -2+i\}$.

3.15 1) -1 ; 2) $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$.

3.16 $S = \left\{ i; \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)\right\}$.

3.17 2) $S = \left\{ -1+2\,i\,; -1-2\,i\,; \dfrac{4}{3} \right\}$; 3) $p(x) = (3x-4)\left(x^2+2x+5\right)$.

3.18 1) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

2) $x^4 + 1 = \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)$

$= \left(x^2 - \sqrt{2}\, x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\, x + 1\right)$

3) $x^3 + 1 = (x+1)\left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$

4) $x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64 = (x + 2\,i)^3 (x - 2\,i)^3 = \left(x^2 + 4\right)^3$.

3.19 $T(z) = z^8 + 63z^4 - 64 = (z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)\left(z^2-4z+8\right)\left(z^2+4z+8\right) =$

$= (x-1)(x+1)(z-i)(z+i)(z-2-2i)(z-2+2i)(z+2-2i)(z+2+2i)$.

3.20 isocèle en B ; longueur des côtés : 8 et 5.

3.22 1) $1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$; 2) $\sqrt{3} + i = 2\ \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; 3) $-2 - 2\,i = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

4) $-6\,i = 6\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$; 5) $-7 = 7\ \text{cis}(\pi)$; 6) $4 - 3\,i = 5\ \text{cis}(5.640)$.

3.23 1) $-2,\ i$; 2) $10\sqrt{3} - 10\,i,\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{5} + \dfrac{2}{5}\, i$; 3) $6,\ -\dfrac{2}{3}$; 4) $40,\ \dfrac{5}{2}$.

3.24 $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right),\ z_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3.25 $z_1 = 64 + 64\sqrt{3}\, i,\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i,\ z_3 = 32'768\, i$.

3.26 $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right),\ w_1 = \sqrt[4]{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i\right),\ w_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right),\ w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i\right)$.

3.27 $w_0 = \sqrt[10]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{20}\right)$, $w_1 = \sqrt[10]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{20}\right)$, $w_2 = \sqrt[10]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{17\pi}{20}\right)$, $w_3 = \sqrt[10]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{20}\right)$,

$w_4 = \sqrt[10]{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{33\pi}{20}\right)$.

3.28 $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_2 = i$, $w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_4 = -1$, $w_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$w_6 = -i$, $w_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

3.29 1) $S = \{-2, 2, -2\,i, 2\,i\}$; 2) $S = \{2\,i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}$;

3) $S = \left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i\right\}$.

3.30 1) $\underline{U} = 17.21 + 24.57\,i$; 2) $Z = 11.01 + 9.24\,i$; 3) $\underline{I} = 1.50 - 1.45\,i$.

3.31 résistance totale : 44 Ω ; résistance : 24.6 Ω ; réactance : 36.5 Ω.

Annexe : Les nombres complexes en électricité

Dès la fin du XIXème siècle, les nombres complexes se révéleront particulièrement pratiques en électricité pour l'étude du courant alternatif.

La loi d'Ohm, du nom du physicien allemand Georg Simon Ohm, est une loi physique reliant l'intensité I (mesurée en ampères) d'un courant électrique traversant un circuit, la tension ou différence de potentiel U (mesurée en volts) aux bornes du circuit et la résistance R (mesurée en ohms). Dans le cas d'un courant continu, la loi d'Ohm s'écrit $U = R \cdot I$

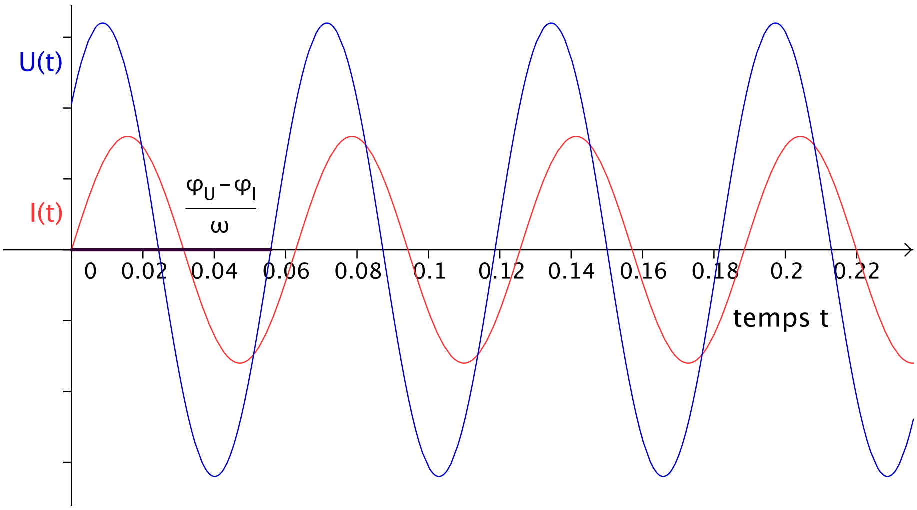
Or, pour des raisons de techniques de production, le courant qui arrive dans nos prises électriques est généralement de type alternatif. Ainsi, dans un circuit électrique, le courant I et la tension U sont décrites par des fonctions sinusoïdales :

$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_I)$ $\qquad$ $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U)$

où I_0 est l'amplitude de I, U_0 l'amplitude de U, ω la pulsation (en radians par seconde)[1], t le temps (en secondes), φ_I et φ_U les phases à l'origine (en radians) de I et de U.

Si le circuit ne contient qu'une résistance pure R (comme par exemple le circuit d'un corps de chauffe), I et U sont en phase, $\varphi_I = \varphi_U$, et la loi d'Ohm $U = R \cdot I$ reste valable.

Mais en présence de certains éléments de circuit, comme par exemple une bobine ou un condensateur, on observe une réactance X (mesurée en ohms, comme la résistance) qui provoque un déphasage entre I et U et la loi d'Ohm ne s'applique plus dans sa « version réelle ».



Graphes de $I(t)$ et $U(t)$ avec $I_0 = 0.8$, $U_0 = 1.6$, $\omega = 100$, $\varphi_I = 0$ et $\varphi U = 0.7$.

[1] On utilise parfois la notion de fréquence f mesurée en Herz et telle que $\omega = 2\pi \cdot f$

On utilise alors un artifice de calcul, qui permet de retrouver la loi d'Ohm dans une « version complexe ». Le courant I et la tension U sont représentés par deux nombres complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$ tels que

$$\underline{I} = I_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_I)$$
$$\underline{U} = U_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U)$$

Ainsi, l'intensité du courant au temps t vaut $I = \mathrm{Im}(\underline{I})$ et la tension $U = \mathrm{Im}(\underline{U})$.

On définit l'impédance d'un circuit comme un nombre complexe Z dont la partie réelle est la résistance R et la partie imaginaire la réactance X.

$$Z = R + iX$$

Avec ces nouvelles définitions, la loi d'Ohm devient

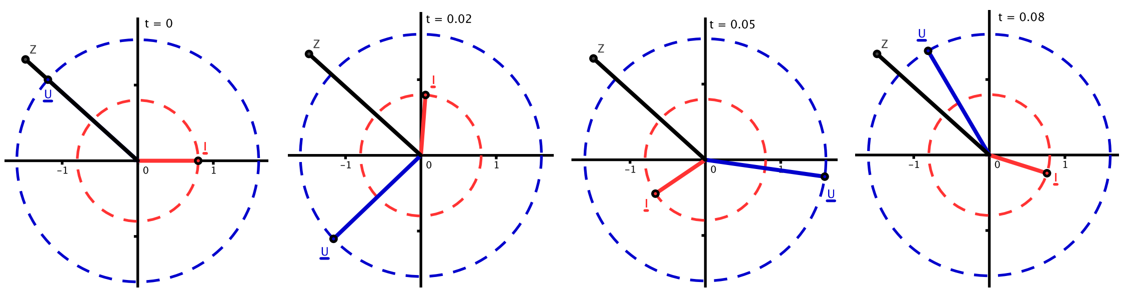
$$\underline{U} = Z\,\underline{I}$$

En explicitant Z, il vient

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U)}{I_0 \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_I)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot cis(\omega \cdot t + \varphi_U - \omega \cdot t - \varphi_I) = \frac{U_0}{I_0} \cdot cis(\varphi_U - \varphi_I)$$

Ainsi, on constate que l'impédance ne dépend pas du temps. Son argument est égal au déphasage $\varphi_U - \varphi_I$ entre U et I et son module $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U_0}{I_0}$ correspond à l'opposition totale du circuit au passage du courant électrique.

Les figures ci-dessous représentent les positions de $\underline{U}$, $\underline{I}$ et Z dans le plan complexe pour différentes valeurs du temps t (comme précédemment, $I_0 = 0.8$, $U_0 = 1.6$, $\omega = 100$, $\varphi_I = 0$ et $\varphi U = 0.7$.



Z est invariant alors que $\underline{U}$ et $\underline{I}$ effectuent des rotations sur deux cercles centrés à l'origine et de rayon respectif U_0 et I_0 à une vitesse angulaire égale et constante.

Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1998.

[2] Alex Willa, Cahier de la commission romande de mathématique n° 1 *: Suites de nombres réels*, CRM 2004.

[3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2005.

[4] Monographie de la commission romande de mathématique 19 *: Fundamentum de mathématique : Algèbre,* Editions du Tricorne, 1986.

[5] Gymnases cantonaux, fascicule 34, *: Les nombres complexes,* 1978

[6] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[7] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[8] H. Bovet et F. Détraz, *: Les nombres complexes, cours et exercices*, Gymnase de Beaulieu 2000.