

Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

6.1 Les fonctions trigonométriques

Dans un système d'axes Oxy , rappelons que le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α (degrés ou radians) avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

6.1.1 Fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha)$:

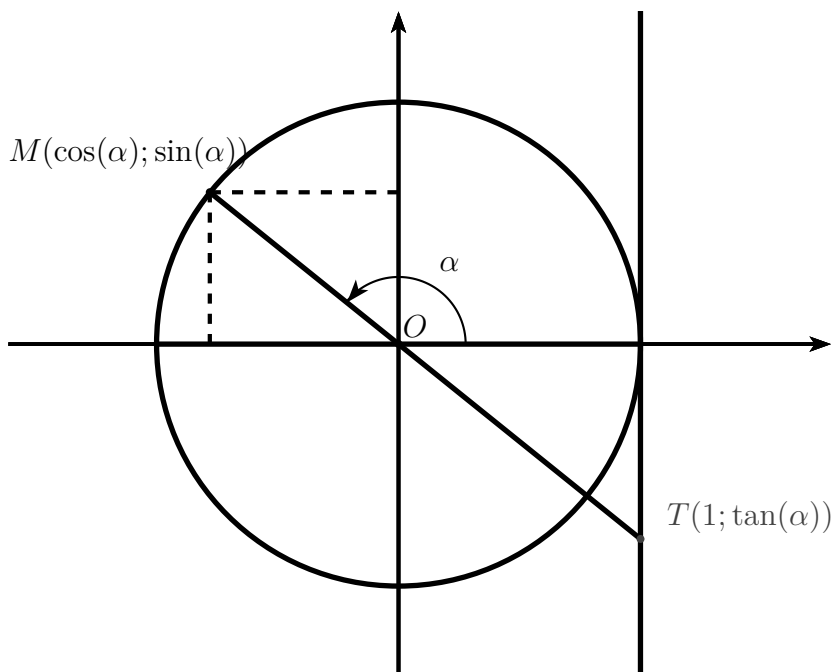
1^{ère} coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\sin(\alpha)$:

2^e coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

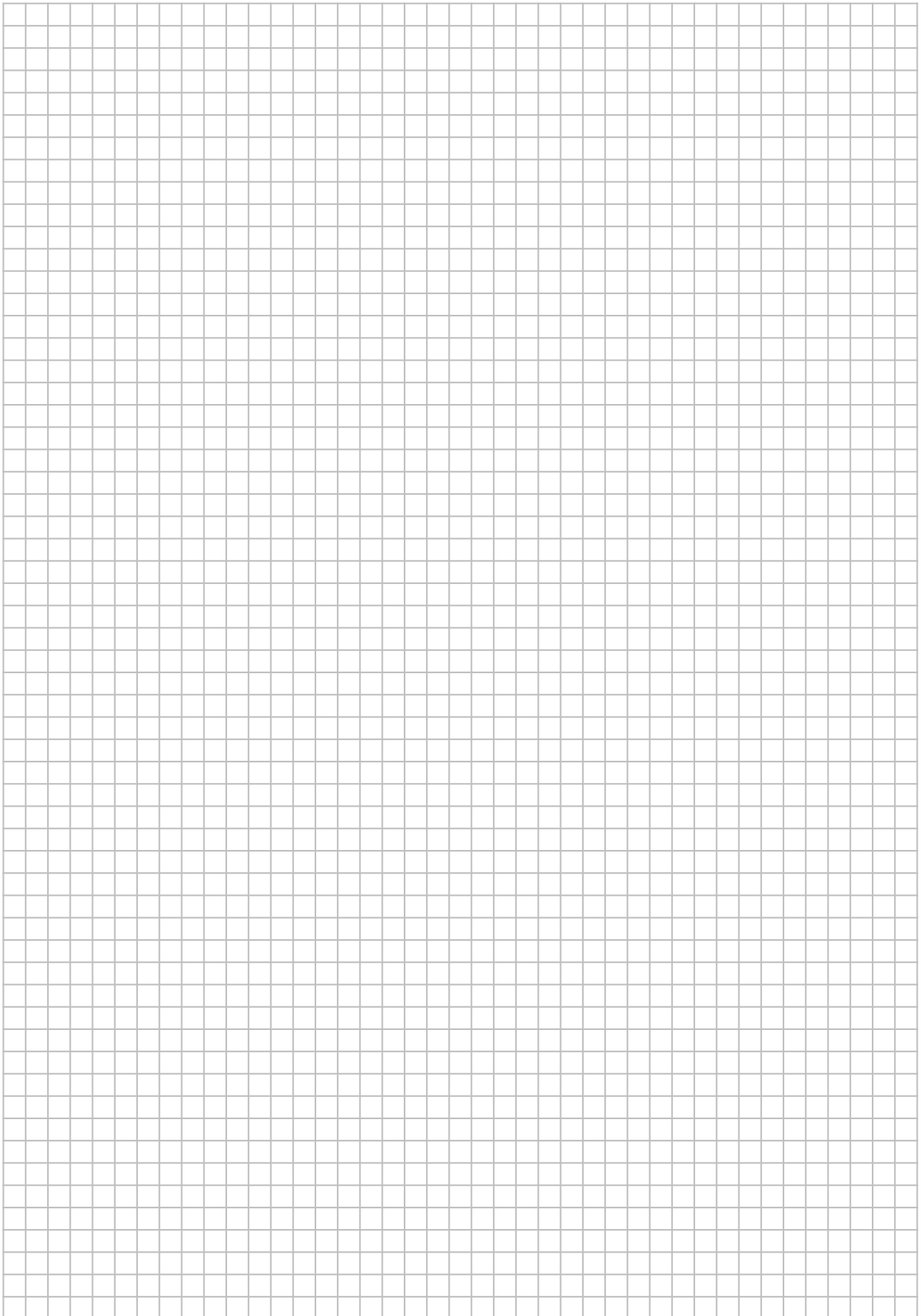
$\tan(\alpha)$:

2^e coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 6.1.

- Lorsque α est compris entre 0° et 90° , on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.
- Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.



Exemple 6.1.

Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des deux angles α suivants à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

- a) $\alpha_1 = 130^\circ$
- b) $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6}$

6.1.2 Périodicité

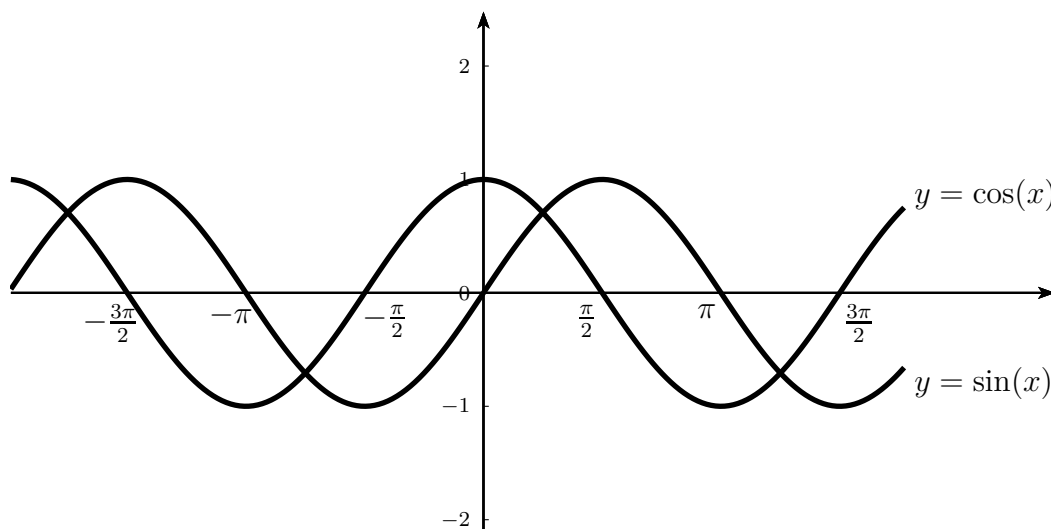
- $\sin(\alpha) \in [-1; 1]$, $\cos(\alpha) \in [-1; 1]$ et $\tan(\alpha) \in]-\infty; +\infty[$.
- Les fonctions trigonométriques sont **périodiques** :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .



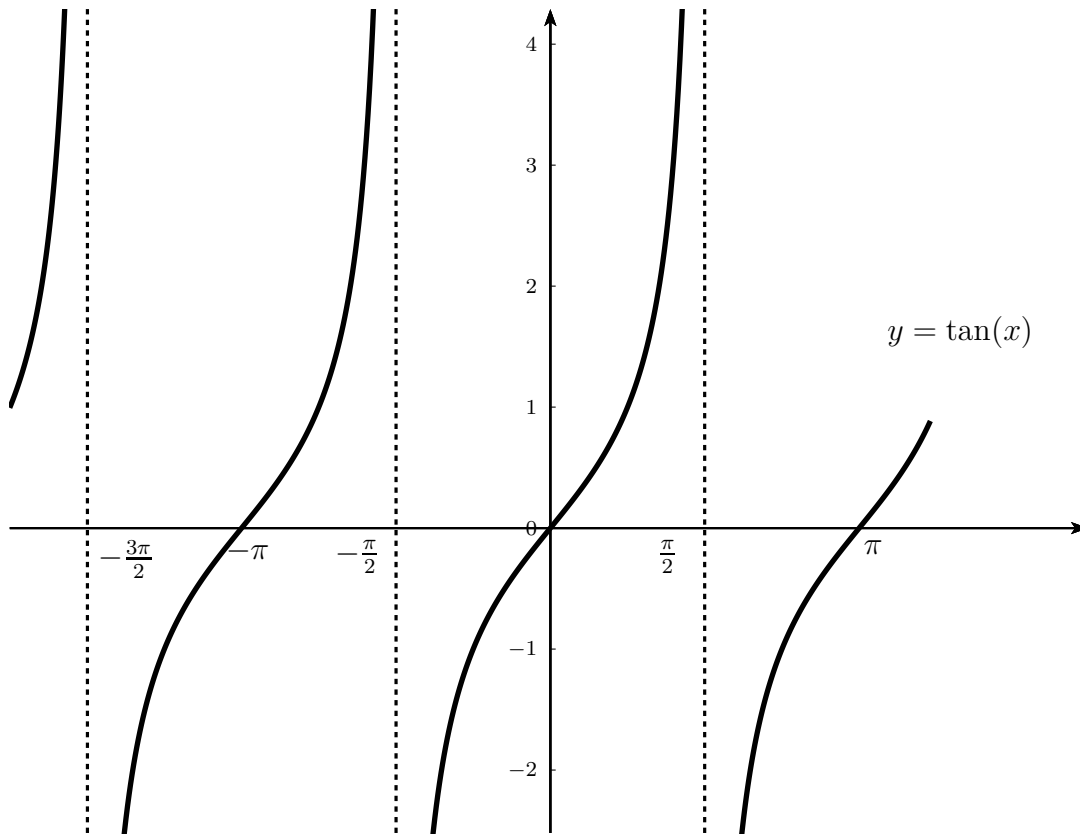
$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$



Graphes de la fonction tangente (en radians)

La fonction tangente est **périodique de période π** .



$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) \end{aligned}$$

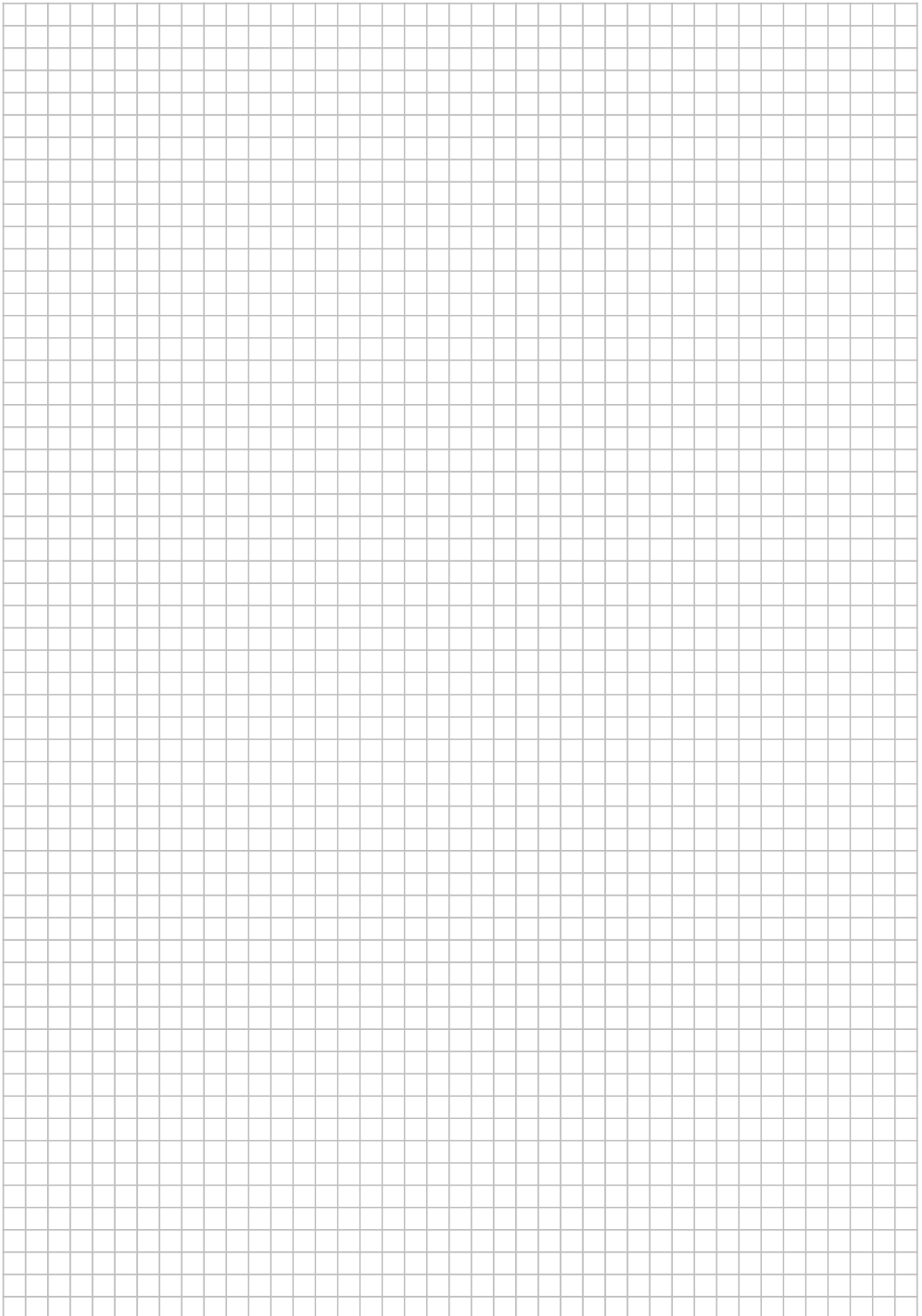
6.1.3 Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



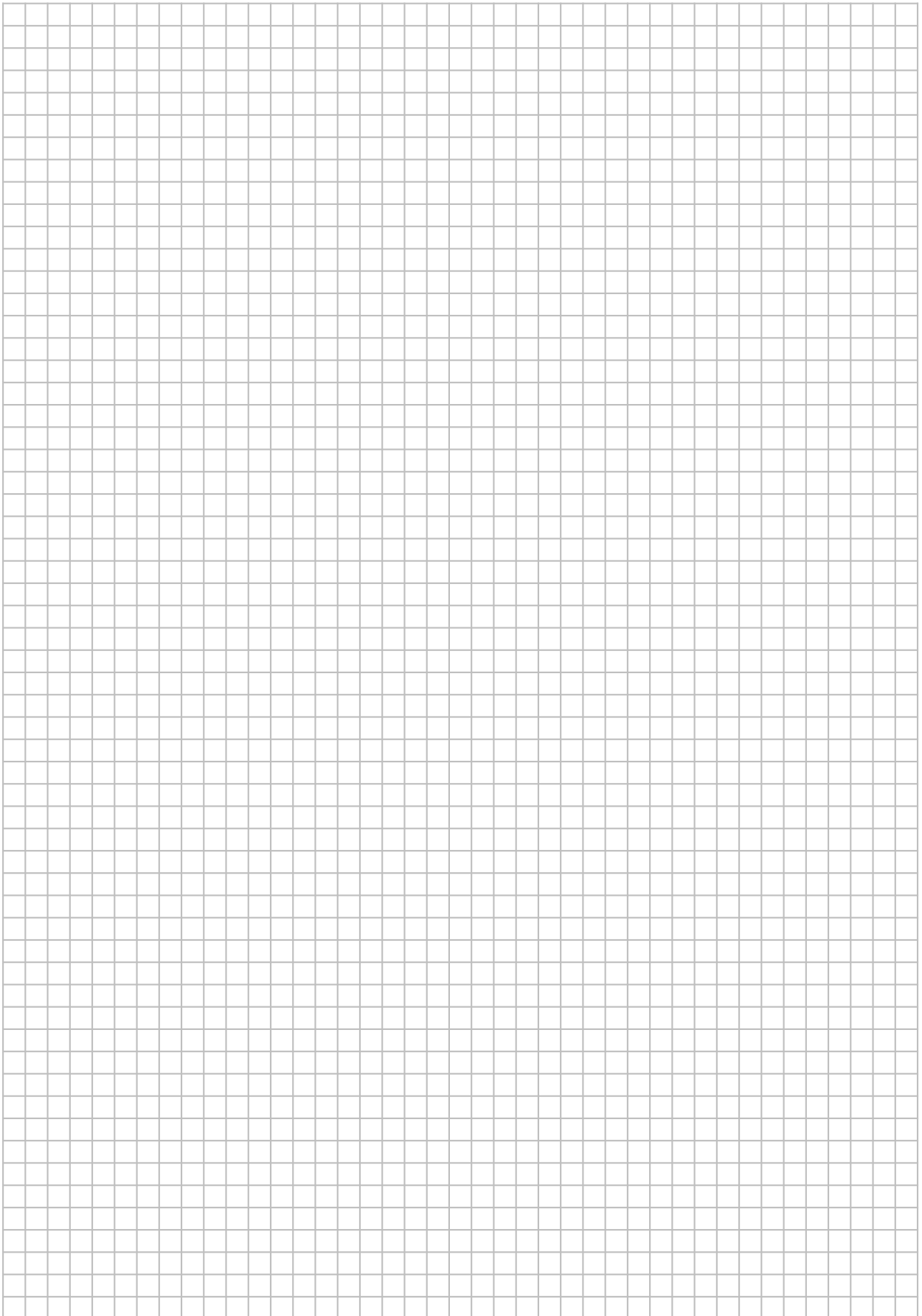
6.2 Equations trigonométriques

Une **équation trigonométrique** est une équation contenant des expressions trigonométriques.

Exemple 6.2.

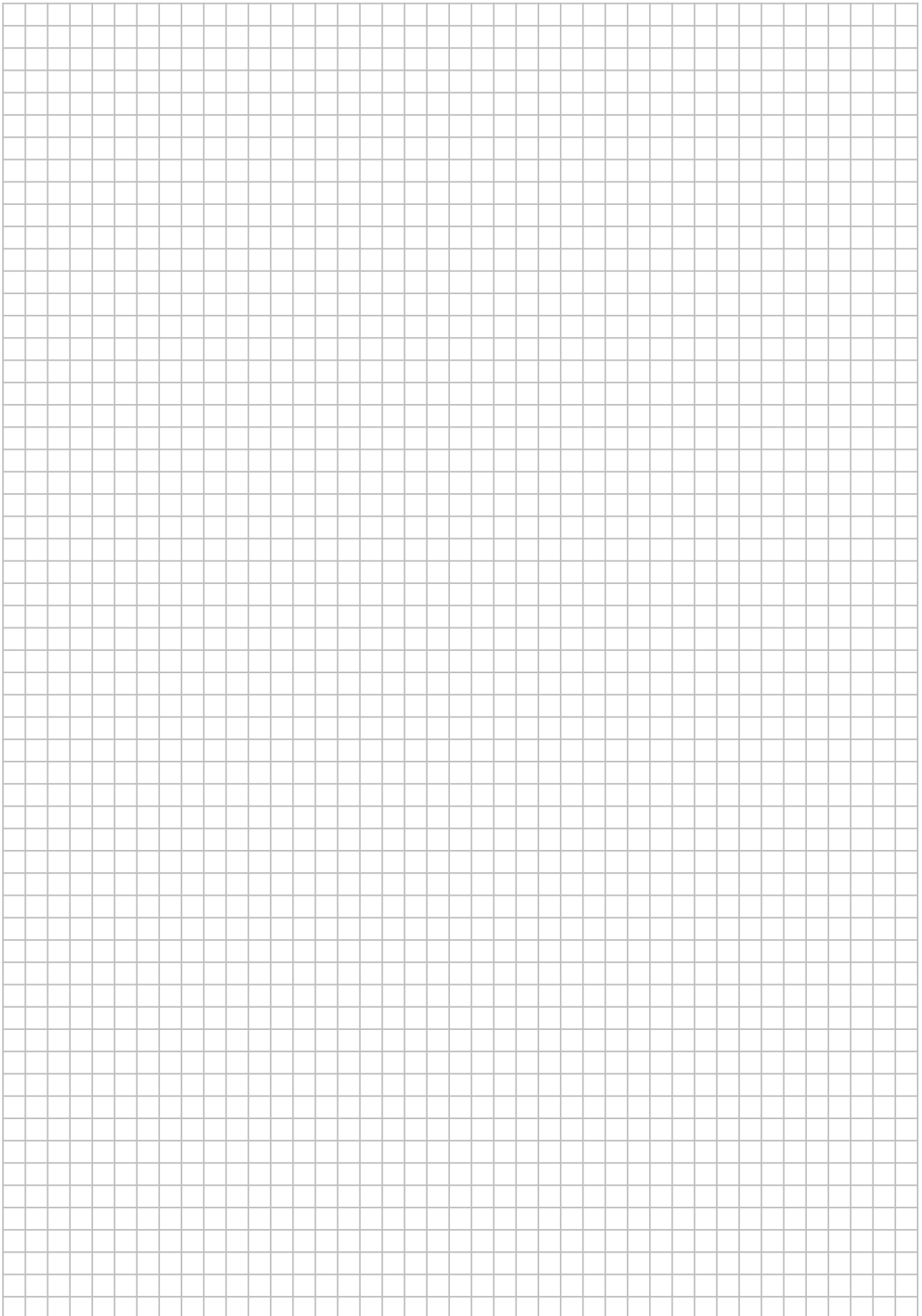
a) Résoudre en degrés l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$

b) Résoudre en radians l'équation $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



c) Résoudre en radians l'équation $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) Résoudre en radians l'équation $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5 = 4$



e) Résoudre en radians l'équation $2 \cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$



6.3 Dérivée des fonctions trigonométriques (en radians)

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

Remarque 6.2.

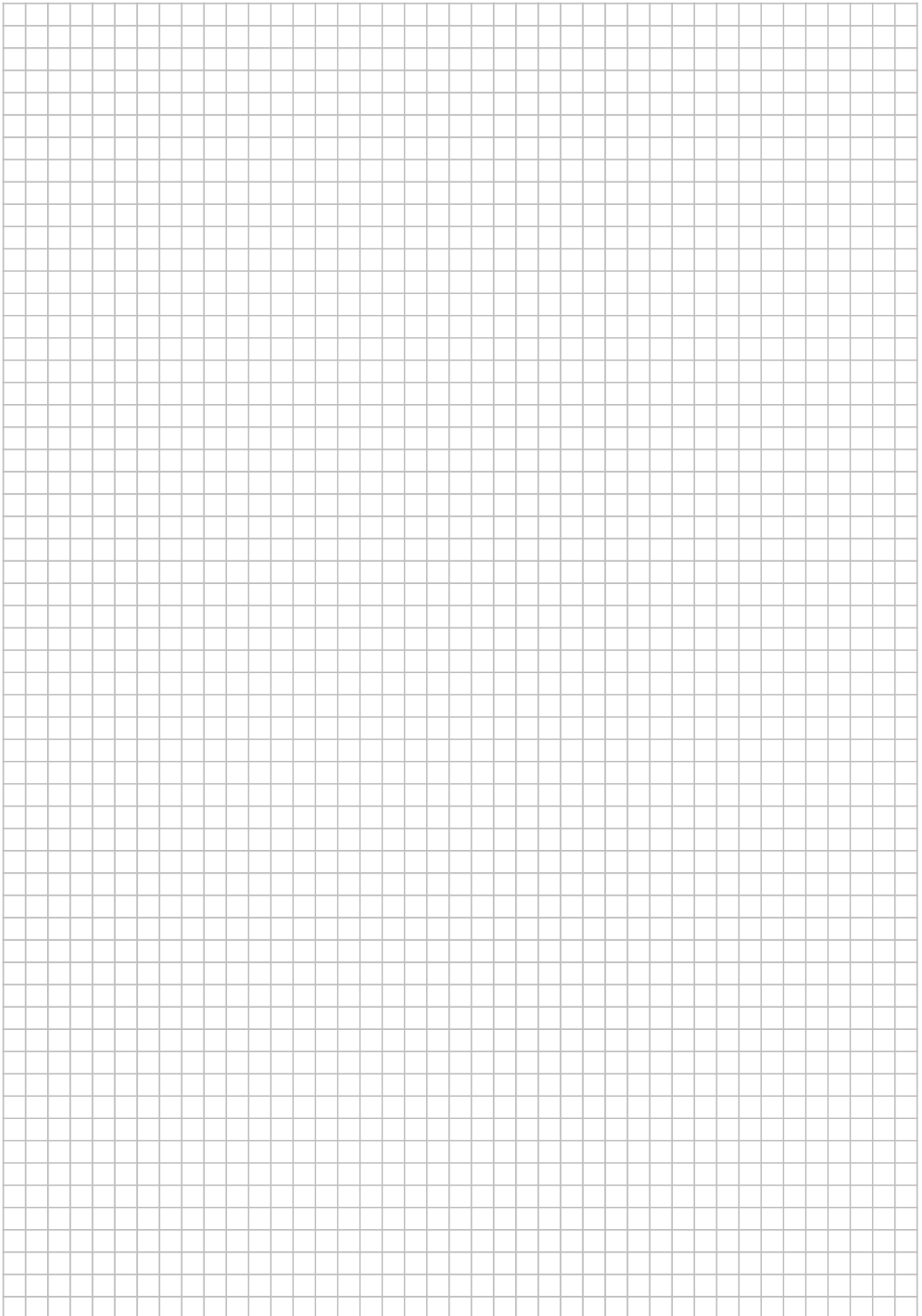
Si la variable d'une fonction trigonométrique est donnée en degrés, sa dérivée n'est pas égale à celle énoncée ci-dessus.

Exemple 6.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a) $f(x) = \frac{1}{\cos(3x)}$

b) $g(x) = \sin(x) \cos(x)$



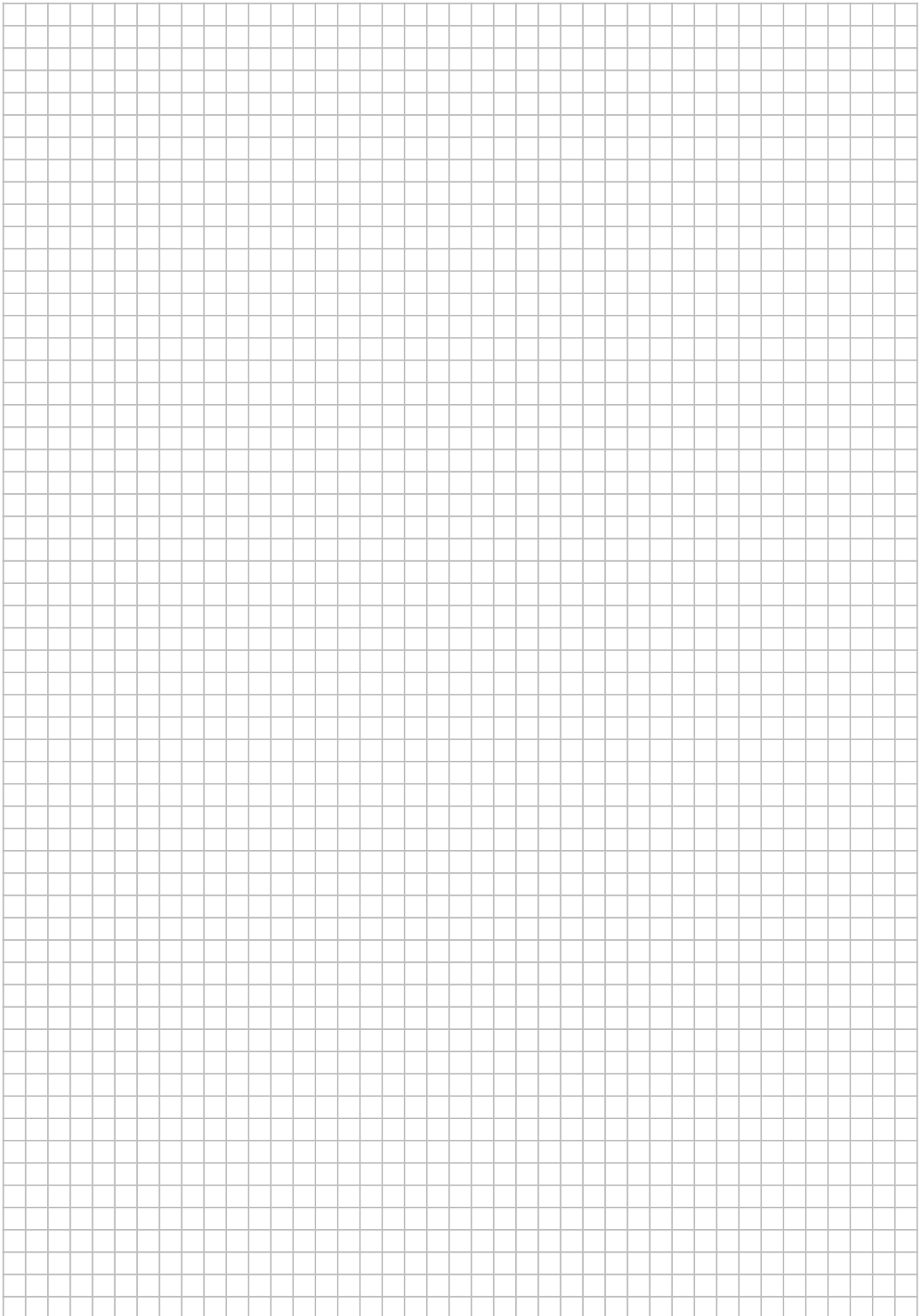
6.4 Etude d'une fonction trigonométrique

Plan d'étude d'une fonction f trigonométrique

- a) Recherche de $ED(f)$.
- b) Périodicité et choix d'un intervalle d'étude I couvrant une période.
- c) Signe et zéros de f sur I .
- d) Dérivée première de f , $ED(f')$. Signe et zéros de f' . Tableau de croissance de f sur I .
- e) Graphe de f sur I .

Exemple 6.4.

Etudier la fonction f donnée par $f(x) = 1 + 2 \cos(2x)$.



6.5 Exercices

6.1

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos(t) = -1.43$

g) $\tan(5t) = 3.273$

b) $\sin(t) = 0.829$

e) $\tan(t) = 5.33$

h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $\tan(t) = -0.754$

f) $\sin(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.2

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $4 \sin^2(x) - 3 = 0$

b) $\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

e) $(\sin(x) - 1) \cos(x) = 0$

c) $2 \cos(t) + 1 = 0$

f) $\sqrt{3} + 2 \sin(3x) = 0$

6.3

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $4 \cos^2(t) - 4 \cos(t) - 3 = 0$

d) $3 \sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

b) $2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$

e) $5 \sin(x) = 6 \cos^2(x)$

c) $3 \sin^2(z) + 8 \cos(z) + 1 = 0$

f) $\tan^4(t) - 4 \tan^2(t) + 3 = 0$

6.4

De nombreuses populations animales fluctuent selon un cycle de 10 ans. Supposons que le nombre de lapins dans une région à l'instant t (en années) soit donné (la fonction \cos est en radians) par

$$N(t) = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$$

a) Vérifier par calculs que le cycle de fluctuation de la population est bien de 10 ans.

b) Représenter graphiquement N pour $t \in [0; 10]$.

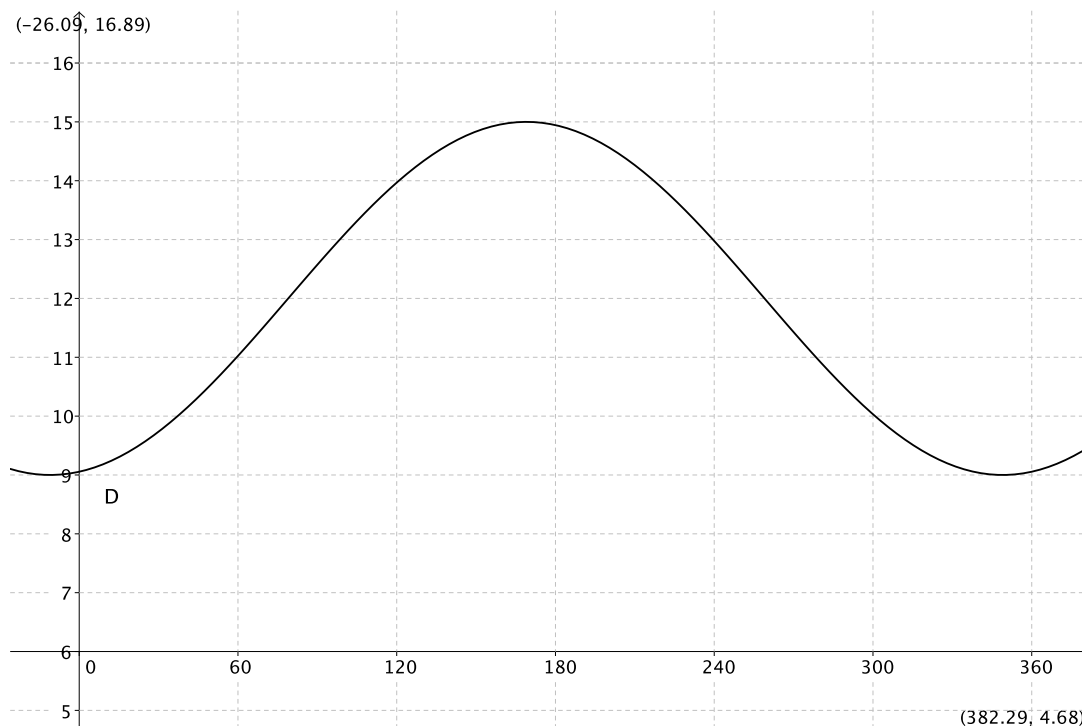
c) Pour quelles valeurs de t dans l'intervalle $[0; 10]$ a-t-on une population supérieure ou égale à 4500 ?

6.5

A Boston, le nombre d'heures D de lumière par jour à une certaine époque de l'année peut être modélisé par

$$D(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(t - 79)\right) + 12$$

où t est donné en jours et $t = 1$ correspond au 1^{er} janvier (année de 360 jours, voir le graphique page suivante)



- Pendant combien de jours par année a-t-on plus de 10,5 heures de lumière? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.
- Quel est le nombre maximal d'heure de lumière et à quel jour a-t-on ce maximum? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.

6.6

On peut prédire la hauteur (en mètres, relativement à la marée basse) de la marée à un endroit précis d'une plage par la fonction $h(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 1)\right)$, où t est en heures ($t = 0$ à minuit et $0 \leq t \leq 24$).

- Calculer la hauteur (au cm près) à minuit et à 15 heures.
- Déterminer l'heure de la marée basse.
- Déterminer la hauteur maximale et l'heure de cette marée haute.
- Dans un autre endroit du bord de mer, la hauteur de la marée vaut $g(t) = 0.8 + 0.8 \sin(a(t - 2))$ où a est un paramètre réel. Déterminer la valeur de a si l'on sait que la marée haute a lieu à 10 heures. Quelle est cette hauteur maximale?

6.7

Donner l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions f données par :

a) $f(x) = \sin(2x)$

c) $f(x) = \sin^2(x)$

e) $f(x) = \sin^3(4x)$

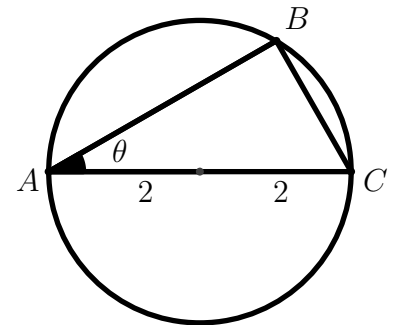
b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

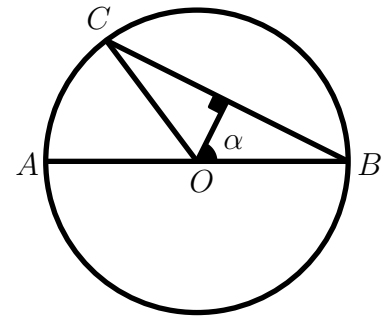
6.8

Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Elle souhaite atteindre le point B , en barque, à la vitesse moyenne de 2 km/h, puis le point C , diamétralement opposé à A , à pied, à la vitesse moyenne de 4 km/h. Calculer la valeur de θ lui permettant de rejoindre C le plus lentement possible (Madame aime prendre son temps!). Calculer également la distance parcourue.



6.9

007 court deux fois plus vite (8 m/s) qu'il ne nage (4 m/s). Il se trouve en A , au bord d'une piscine circulaire de 40 m de diamètre. Il lui reste neuf secondes pour désamorcer la bombe posée en B qu'il désire atteindre au plus vite. Sa stratégie est de courir jusqu'en C , de piquer une tête et de crawler en ligne droite B . A quel endroit doit-il plonger ?



6.10

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = 1 - 2 \sin(x)$$

6.11

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = \sin(x) - \sqrt{3} \cos(x)$$

6.6 Réponses

6.1

- a) $t_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 = -120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 b) $t_1 \cong 56^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 \cong 124^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 c) $t \cong -37^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 d) Pas de solution
 e) $t \cong 79.4^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 f) $t_1 = -20^\circ + k \cdot 120^\circ, t_2 = 80^\circ + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 g) $t \cong 14.6^\circ + k \cdot 36^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 h) $t_1 = 240^\circ + k \cdot 720^\circ, t_2 = -240^\circ + k \cdot 720^\circ, k \in \mathbb{Z}$

6.2

- a) $t_1 = k \cdot 3\pi, t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\pi, t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, t_2 = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x_1 = -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

6.3

- a) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $z = \pm 2.016 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x_1 = 0.730 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 2.412 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

6.4

- c) $[0; \frac{5}{3}] \cup [\frac{25}{3}; 10]$

6.5

- a) 240 jours ; b) nombre maximal de 15 heures le 169^{ème} jour.

6.6

- a) 74 cm à minuit et 50 cm à 15 heures
 b) 19 heures
 c) 7 heures ; 2 m
 d) $a = \frac{\pi}{16}$; 1.6 m

6.7

- a) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2 \cos(2x)$
 b) $ED(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;
 $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
 c) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$
 d) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2 \cos^2(x) - 1$
 e) $ED(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 12 \sin^2(4x)$
 f) $ED(f) = \mathbb{R} - \left\{ \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;
 $f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$

6.8

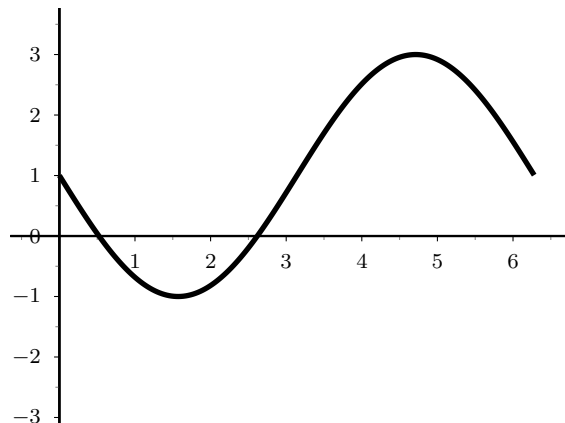
$\theta=30^\circ$ et la distance parcourue est de 5.56 km

6.9

007 ferait mieux de faire le tour du bassin au lieu de réfléchir...

6.10

$ED(f) : \mathbb{R}$
 f est de période 2π .
 Etude de f sur $[0; 2\pi]$
 Asymptote : aucune
 $f'(x) = -2 \cos(x)$
 $ED(f) = ED(f')$
 Max : $M\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$
 Min : $M\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$



6.11

$ED(f) : \mathbb{R}$
 f est de période 2π .
 Etude de f sur $[0; 2\pi]$
 Asymptote : aucune
 $f'(x) = \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x)$
 $ED(f) = ED(f')$
 Max : $M\left(\frac{5\pi}{6}; 2\right)$
 Min : $M\left(\frac{11\pi}{6}; -2\right)$

