Chapitre 4

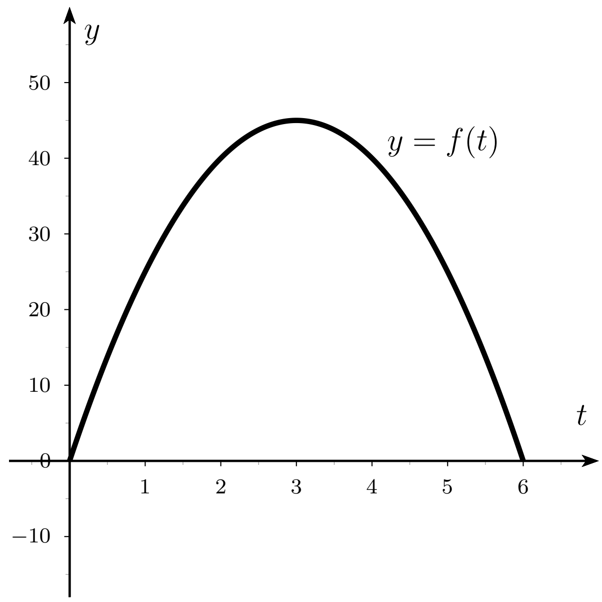
Dérivée

4.1 Exemple d'introduction : vitesse instantanée

On observe la vitesse d'une balle tirée en l'air : la balle part à une très grande vitesse, ensuite elle ralentit (sa vitesse diminue) au fur et à mesure jusqu'à atteindre sa hauteur maximale (où sa vitesse est nulle). Ensuite, sa vitesse devient négative et augmente en valeur absolue tandis qu'elle tombe ; finalement, c'est l'impact avec le sol.

Soit $y = f(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle en fonction du temps t (en secondes ; $t = 0$ est l'instant de départ de la balle).

Exemple 4.1.
Supposons que $f(t) = -5t^2 + 30t$ (voir ci-dessous le graphe de f dans un repère Oty).



La **vitesse moyenne** de la balle dans l'intervalle de temps $[a, b]$ est donnée par

$$v_{moy} = \frac{\text{variation de la position}}{\text{variation du temps}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

a) Calculer la vitesse moyenne de la balle dans les intervalles $[0; 6]$, $[0; 3]$, $[0; 1]$, $[0; 0.1]$ et $[0; 0.01]$

b) Calculer la vitesse instantanée de départ, soit la limite de la vitesse moyenne sur l'intervalle $[0; h]$ quand h tend vers 0.

La **vitesse instantanée** de la balle au temps $t = a$ est donnée par

$$v_{ins}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 4.1, suite

Rappelons que la position de la balle au temps t est donnée par $f(t) = -5t^2 + 30t$.

a) Calculer la vitesse instantanée au temps $t = 1$:

$v_{ins}(1) =$

b) Calculer la vitesse instantanée au temps t :

$v_{ins}(t) =$

Remarque 4.1.

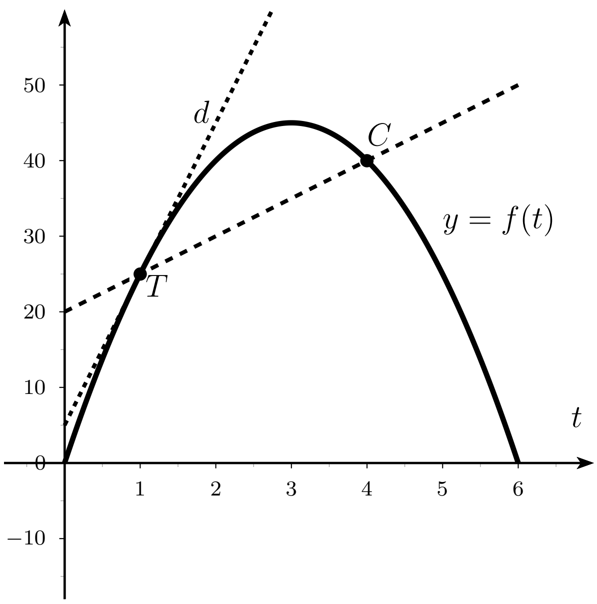
a) La vitesse moyenne sur $[a : b]$ représente la pente de la droite reliant les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.

Dans l'exemple 4.1, la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1; 4]$ est la pente m_{TC} de la droite TC où $T(1; 25)$ et $C(4; 40)$ sont les positions de la balle aux temps $t = 1$ et $t = 4$ respectivement.

Elle vaut $m_{TC} = \frac{40-25}{4-1} = 5$.

b) La vitesse instantanée en $t = a$ est la pente m de la tangente à la courbe $y = f(t)$ en $T(a; f(a))$.

Dans l'exemple 4.1, la vitesse instantanée en $t = 1$ est la pente de la tangente d en T. Elle vaut $m = 20$.



4.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant une valeur a.

- **Nombre dérivé de la fonction f au point a** :

  $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si elle existe et est finie.

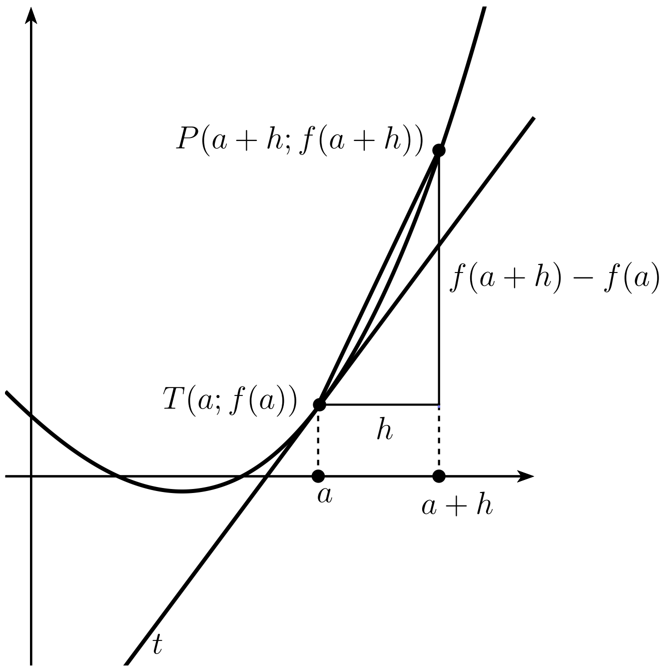
- Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

Remarque 4.2.

a) S'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse a, donc au point $T(a; f(a))$.

b) En posant $x = a + h$, il est aussi possible de calculer $f'(a)$ de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



Exemple 4.2.

a) Calculer $f'(4)$ avec f définie par $f(x) = x^2$.

4.3 Fonction dérivée

Soit f une fonction, $ED(f)$ son ensemble de définition et $I \subseteq ED(f)$.

Si le nombre dérivé de f existe pour tous les points $x \in I$, on définit f' **la fonction dérivée** par

$$\begin{array}{rcccc} f' & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemple 4.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous, calculer leur fonction dérivée et donner l'ensemble de définition de celle-ci.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \sqrt{x}$

Remarque 4.3.

Pour une fonction f donnée par son expression algébrique $f(x)$, on notera $(f(x))'$ l'expression algébrique de la fonction dérivée f'.

Par exemple, pour f définie par $f(x) = x^2$, on a vu que la fonction dérivée f' est donnée par $f'(x) = 2x$. On notera $(x^2)' = 2x$.

4.4 Règles de dérivation

Dérivée d'une constante ou d'une puissance entière positive de x

$$\boxed{(k)' = 0, \quad k \in \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{(x^m)' = mx^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}}$$

Exemple 4.4.
Calculer

a) $(-2)' =$

b) $(x)' =$

c) $(x^3)' =$

d) $(x^7)' =$

$\boxed{\text{Dans les formules qui suivent, } k \text{ est un nombre réel et } u, v \text{ et } w \text{ sont des } \textbf{fonctions de } x.}$

Règle de la somme

La dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \quad \text{et} \quad \boxed{(u+v+w)' = u' + v' + w'}$$

Règle du produit par une constante

La dérivée du produit par une constante est égale au produit de la constante par la dérivée :

$$\boxed{(ku)' = ku', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Remarque 4.4.
ATTENTION ! Ne pas confondre produit par une constante et somme d'une constante ! Dans le cas d'une somme, on a :

$$\boxed{(k+u)' = u', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exemple 4.5.
Calculer

a) $(x^3 + x^2 + x - 5)' =$

b) $(6x^5 + 7x^3 - 1)' =$

c) $(6\sqrt{x} + 7x^2)' =$

Règle du produit

*ATTENTION ! La dérivée d'un produit **n'est pas** égale au produit des dérivées !*

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Exemple 4.6. Calculer

a) $((x^2 + 1)(4x^2 - 3x + 1))' =$

b) $((x - 1)\sqrt{x})' =$

Règle du quotient

*ATTENTION ! La dérivée d'un quotient **n'est pas** égale au quotient des dérivées !*

Si v est tel que $v(x) \neq 0$, on a la règle

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \quad \text{et en particulier} \quad \boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

Exemple 4.7.

Calculer

a) $\left(\dfrac{3x-2}{x^2-4}\right)' =$

b) $\left(\dfrac{5}{x^2-3x+6}\right)' =$

Dérivée d'une puissance à exposant entier

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

a) $\left(\dfrac{2}{x}\right)' =$

b) $\left(\dfrac{5}{3x^4}\right)' =$

Règle de la composition

La règle de la composition permet de dériver les fonctions qui sont des composées de fonctions dont on connaît les dérivées.

$$\boxed{\left(\, f(u(x))\,\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\left(\, f(u)\,\right)' = f'(u) \cdot u'}$$

Cas particulier

$$\boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Exemple 4.8.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $\left((2x-1)^5\right)' =$

b) $\left(\dfrac{1}{(7-x)^3}\right)' =$

c) $\left(\dfrac{x}{(x-1)^3}\right)' =$

Dérivée d'une puissance à exposant rationnel

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Q}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Q}}$$

Exemple 4.9.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' =$

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)' =$

4.5 Exercices

4.1

Calculer le nombre dérivé $f'(a)$ lorsque f et a sont donnés par

a) $f(x) = \dfrac{1}{8\,x+1}, \quad a = 2$

b) $f(x) = x^2 - x, \quad a = -1$

4.2

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous sous la forme d'une somme de termes.

a) $f(x) = x^8$

b) $f(x) = x^4 + x^3$

c) $f(x) = 4\,x^3 + 2\,x^2 + 7\,x + 5$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^3 + 4\,x - \dfrac{3}{4}$

e) $f(x) = \sqrt{3}\,x + \pi$

f) $f(x) = 6\,x^4 - 2\,x^3 + x^2 - 9\,x + 5$

g) $f(x) = x^{103} + 2\,x^{57} - 5\,x^4 + 4$

h) $f(x) = (4\,x - 11)\,(x^2 + x + 7)$

i) $f(x) = (5\,x + 3)\,(x^3 + 5)$

j) $f(x) = (x^2 + 7\,x)\,(3\,x^2 - x - 3)$

k) $f(x) = (x + \sqrt{5})\,(x^2 + 2)$

l) $f(x) = (3\,x^2 + 4)\,(2x - 7)$

4.3

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous sous la forme d'une somme de termes.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} + 41$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - \dfrac{16}{x^5}$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{7\,x+1}{2\,x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2\,x+7}$

f) $f(x) = x + 3 + \dfrac{x+3}{6\,x-3}$

g) $f(x) = \dfrac{3\,x^2+6}{2\,x^3-1}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + 4\,x^4 - 11\,x^3 + 12}$

4.4

Donner la dérivée des fonctions suivantes sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1 ou 2 :

a) $f(x) = (x^2 + 5\,x + 6)^4$

b) $f(x) = (5\,x^3 - 8\,x + 1)^7$

c) $f(x) = \dfrac{(x-3)^3}{(2\,x+7)^3}$

d) $f(x) = (4\,x^2 + 5)^4(6\,x^2 - 5)^3$

e) $f(x) = (-2\,x^2 + 5)^3(3\,x^2 + 7)^2$

f) $f(x) = \dfrac{(x^2-6)^3}{(3\,x+4)^3}$

g) $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(2\,x+7)^4}$

4.5

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3\,x + 2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2 - x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,x}}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

4.6

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, sachant que a, b, c, d, h et m désignent des constantes :

a) $f(x) = m\,x + h$

b) $f(x) = (a - 1)\,x^3 + a\,(x - 3)$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$

4.7

Déterminer la valeur des paramètres réels a et b pour lesquels la fonction f définie par $f(x) = (ax + b)(1 - x)^5$ possède la dérivée $f'(x) = 3x(1 - x)^4$.

4.8

Un sac de sable est lâché d'une montgolfière située une altitude de 150 m. En négligeant la résistance de l'air, la position du sac au-dessus du sol est donnée par $f(t) = -5\,t^2 + 150$.

a) Calculer l'altitude et la vitesse du sac après 2 secondes.

b) Après combien de temps le sac touche-t-il le sol ? Quelle est sa vitesse à ce moment là ?

4.6 Réponses

4.1

a) $-8/289$ b) -3

4.2

a) $f'(x) = 8\,x^7$

b) $f'(x) = 4\,x^3 + 3x^2$

c) $f'(x) = 12\,x^2 + 4\,x + 7$

d) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\,x^2 + 4$

e) $f'(x) = \sqrt{3}$

f) $f'(x) = 24\,x^3 - 6\,x^2 + 2\,x - 9$

g) $f'(x) = 103\,x^{102} + 114\,x^{56} - 20\,x^3$

h) $f'(x) = 12\,x^2 - 14\,x + 17$

i) $f'(x) = 20\,x^3 + 9\,x^2 + 25$

j) $f'(x) = 12\,x^3 + 60\,x^2 - 20\,x - 21$

k) $f'(x) = 3\,x^2 + 2\,\sqrt{5}\,x + 2$

l) $f'(x) = 18\,x^2 - 42\,x + 8$

4.3

a) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{15}{x^4}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}} + 2\,x + \dfrac{80}{x^6}$

c) $f'(x) = -\dfrac{6}{(x-5)^2}$

d) $f'(x) = -\dfrac{23}{(2\,x-3)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{2\,x^2 + 14\,x - 6}{(2\,x+7)^2}$

f) $f'(x) = 1 - \dfrac{21}{(6\,x-3)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{-6\,x^4 - 36\,x^2 - 6x}{(2\,x^3-1)^2}$

h) $f'(x) = -\dfrac{5\,x^4 + 16\,x^3 - 33\,x^2}{(x^5 + 4\,x^4 - 11\,x^3 + 12)^2}$

4.4

a) $f'(x) = 4\,(x^2 + 5\,x + 6)^3(2\,x+5)$

b) $f'(x) = 7\,(15\,x^2 - 8)(5\,x^3 - 8\,x + 1)^6$

c) $f'(x) = \dfrac{39\,(x-3)^2}{(2\,x+7)^4}$

d) $f'(x) = 4\,x\,(4\,x^2+5)^3(6\,x^2-5)^2(84\,x^2+5)$

e) $f'(x) = -12\,x\,(2\,x^2-5)^2(3\,x^2+7)(5\,x^2+2)$

f) $f'(x) = \dfrac{3\,(x^2-6)^2(3\,x^2+8\,x+18)}{(3\,x+4)^4}$

g) $f'(x) = -\dfrac{(x-5)^2(2\,x-61)}{(2\,x+7)^5}$

4.5

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{7\,\sqrt[7]{x^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{2\,x-3}{2\,\sqrt{x^2 - 3\,x + 2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2\,x}{3\,\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-2\,x)^3}}$

f) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

4.6

a) $f'(x) = m$

b) $f'(x) = 3\,(a-1)\,x^2 + a$

c) $f'(x) = 2\,a\,x + b$

d) $f'(x) = \dfrac{a\,d - b\,c}{(c\,x+d)^2}$

4.7

$f(x) = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{10})(1-x)^5$

4.8

a) L'altitude est de 130 m et la vitesse est de -20 m/s.

b) Après environ 5.5 s. Sa vitesse vaut alors -54.77 m/s.