Chapitre 3

Limites à l'infini, asymptotes

3.1 Limites à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment grand
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty; a]$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$

Remarque 3.1.

1) Les propriétés énoncées dans le théorème pour les limites finies peuvent être étendues sans autre aux limites à l'infini
2) Dans certains ouvrages, la notation ∞ représente $\pm\infty$.

Exemple 3.1.

Calculer (si elles existent) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

Limites à l'infini de fonctions polynomiales et rationnelles

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$) et $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ un polynôme de degré m ($b_m \neq 0$).

On a

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n)$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}$

Exemple 3.2.

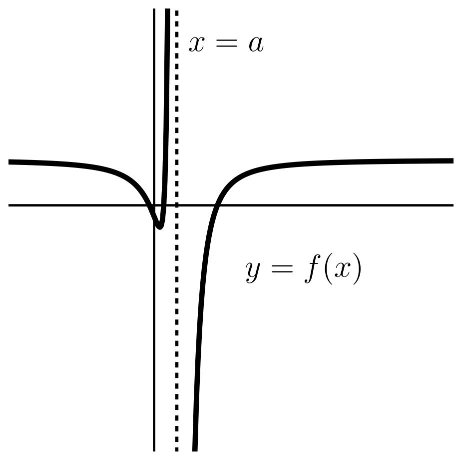
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1}$

3.2 Asymptotes

Soit $f : ED(f) \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

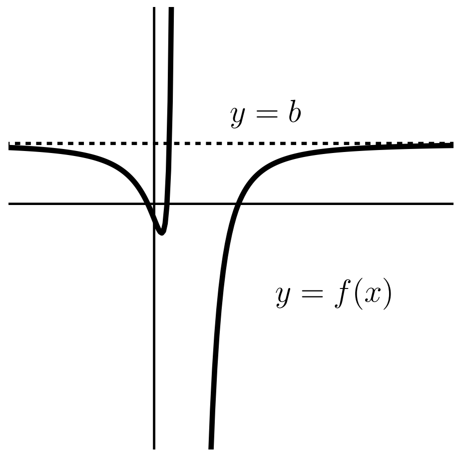
La droite verticale d'équation $x = a$ est **asymptote verticale (AV)** du graphe de la fonction f si la limite en $x = a$ de la fonction f est infinie.

- $x = a$ est AV de f si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



La droite d'équation $y = b$ est **asymptote horizontale (AH)** du graphe de la fonction f si le graphe de f se rapproche « indéfiniment » de la droite d'autant plus que x se rapproche de $+\infty$ ou de $-\infty$.

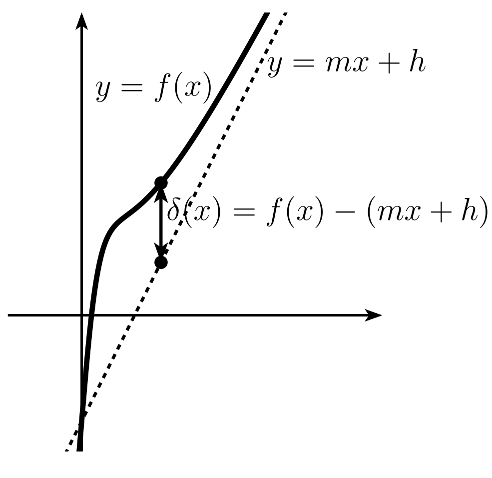
- $y = b$ est AH en $+\infty$ de f si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.
- $y = b$ est AH en $-\infty$ de f si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.



La droite d'équation $y = mx + h$ est **asymptote oblique (AO)** du graphe de la fonction f si le graphe de f se rapproche « indéfiniment » de la droite d'autant plus que x se rapproche de $+\infty$ ou de $-\infty$.

- $y = mx + h$ est AO de f en $+\infty$ de f si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$.
- $y = mx + h$ est AO de f en $-\infty$ de f si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$.

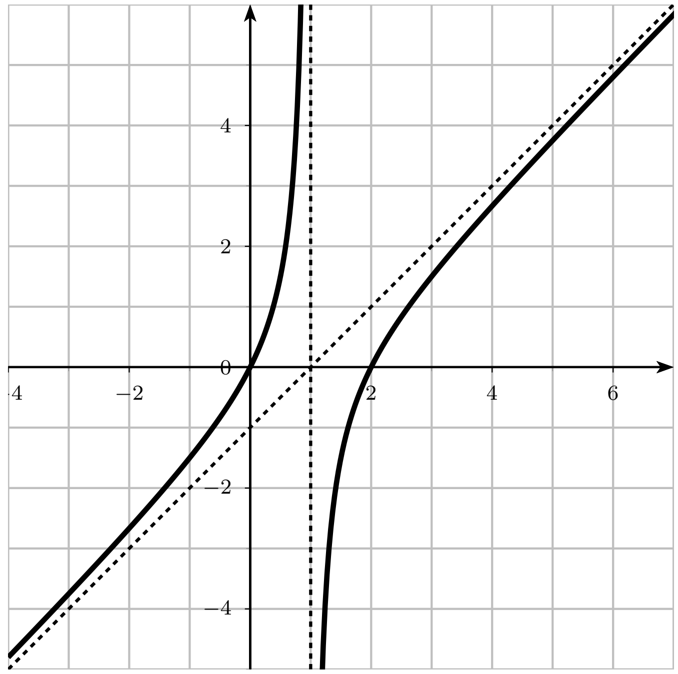
La différence $\delta(x) = f(x) - (mx + h)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$



Exemple 3.3.

Soit la fonction f représentée ci-dessous avec ses asymptotes.

En utilisant le graphe de f, donner son ensemble de définition et ses zéros, établir son tableau du signe, ainsi que l'équation de ses asymptotes.

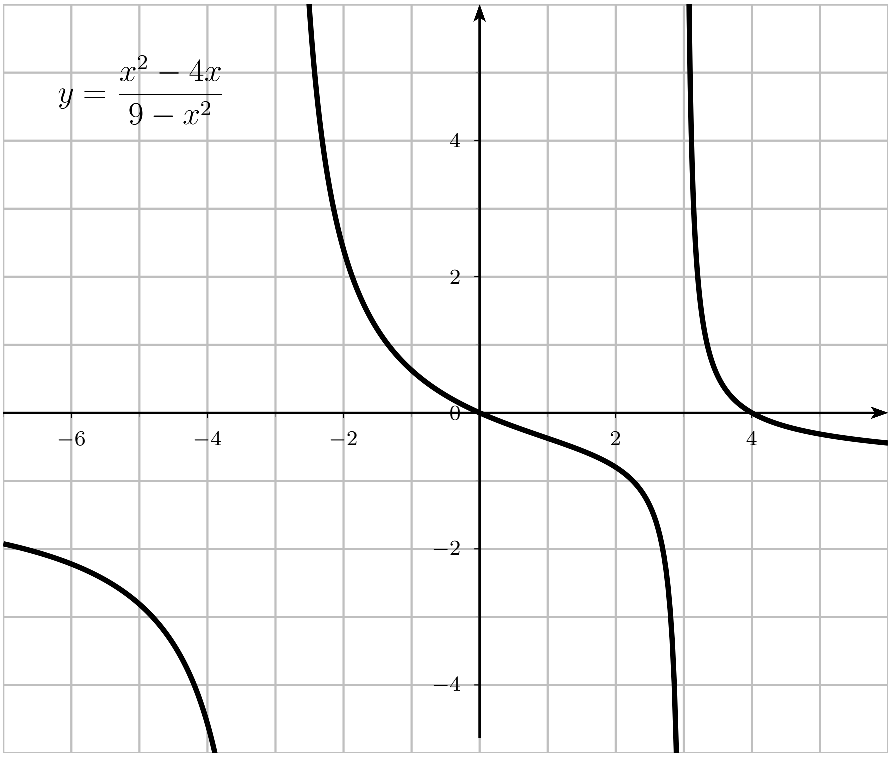


3.3 Recherche d'asymptotes

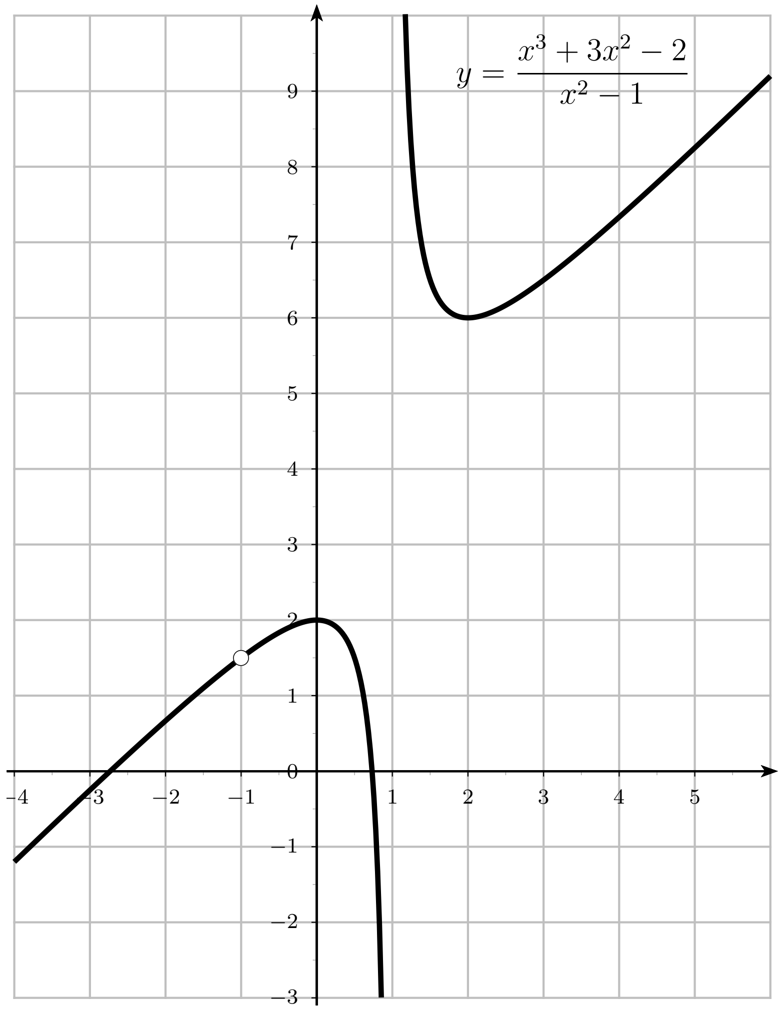
Exemple 3.4.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous. Calculer une équation de leurs asymptotes éventuelles et les représenter graphiquement.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{9 - x^2}$



b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1}$



Asymptote oblique ou horizontale d'une fonction rationnelle

Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{P(x)}{S(x)}$ où $P(x)$ et $S(x)$ sont des polynômes.

En divisant $P(x)$ par $S(x)$, on obtient un quotient $Q(x)$ et un reste $R(x)$:

$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$ avec $\deg(R(x)) < \deg(S(x))$.

On a donc

$$f(x) = \frac{P(x)}{S(x)} = \frac{Q(x) \cdot S(x) + R(x)}{S(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)}.$$

- Si $Q(x) = b$ est un **nombre réel**, $y = b$ est AH de f et f n'a pas d'AO
- Si $Q(x) = mx + h$ est du **premier degré**, $y = mx + h$ est AO de f et f n'a pas d'AH
- Si $Q(x)$ est du **deuxième degré ou plus**, f n'a ni AH, ni AO.

Remarque 3.2.

Si $y = mx + h$ est asymptote oblique d'une fonction rationnelle en $+\infty$, sa pente m et son ordonnée à l'origine h peuvent être obtenues sans division euclidienne à l'aide des limites suivantes :

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

De même en $-\infty$.

Exemple 3.4, suite

Déterminer à l'aide de limites une équation de l'asymptote oblique de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

3.4 Exercices

3.1

Calculer les limites suivantes ou expliquer pourquoi elles n'existent pas.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(x+2)}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x^2}{x^2-32}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^3+7x+9}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3}{5-3x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3x^2-x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-x^2}{x+2}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{2x^2-5}$

3.2

On verse de l'eau salée, concentrée à 10 grammes de sel par litre d'eau, dans une cuve qui contient 200 litres d'eau pure.

a) Si l'eau salée s'écoule à la vitesse de 20 litres par minute dans la cuve, quel est le volume d'eau $v(t)$ (en litres) ainsi que la quantité de sel $q(t)$ (en grammes) après t minutes ?

b) Quelle est la concentration $c(t)$ en sel (en grammes par litre) après t minutes ?

c) Que devient cette concentration après une longue période de temps ($t \to +\infty$) ?

3.3

On appelle *fonction demande* ou simplement *demande* la quantité d'un bien que les consommateurs sont disposés à acheter en fonction du prix de ce bien. Un manufacturier de lampes a observé que la demande pour son modèle spécial de lampe de bureau obéit à la fonction

$$d(x) = \frac{5x+600}{x} \quad \text{où } x \text{ est le prix de vente de ses lampes.}$$

Que devient cette demande si on fixe un prix de vente extrêmement bas ($x \underset{>}{\to} 0$) ? un prix de vente extrêmement élevé ($x \to +\infty$) ?

3.4

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes verticales et horizontales éventuelles des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{5x-x^2}$

3.5

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-4x-6}{x^2-2x-3}$

3.6

Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, toutes les asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^n+1}{x^2-9}$$

3.7

Trouver dans chacun des cas suivants une fonction rationnelle admettant pour seule(s) asymptote(s) celle(s) qui est proposée(s). Donner la solution la plus simple pour ces fonctions, c'est-à-dire celles pour lesquelles les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer les résultat sous la forme d'une seule fraction.

a) Une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$

b) Une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

c) Une asymptote verticale d'équation $x = 4$

d) Une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 1$ et $x = -2$

e) Une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$.

3.8

Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5; 20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2, x = 1$ et $y = 3x - 7$.

3.9

Etudier la position relative de la courbe $y = f(x)$ et de ses asymptotes, si f est donnée par :

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2-x+6}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5}$

3.5 Réponses

3.1

a) $-\dfrac{3}{5}$

b) -1

c) $+\infty$

d) $\dfrac{3}{2}$

e) -1

f) 0

g) $-\infty$

h) 0

i) $+\infty$

j) $+\infty$

3.2

a) $v(t) = 200 + 20t$ et $q(t) = 200t$

b) $c(t) = \dfrac{10t}{t+10}$

c) Elle s'approche de $10g/l$.

3.3

Dans le premier cas, la demande devient infiniment grande.

Dans le deuxième cas, elle s'approche de 5 lampes.

3.4

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

c) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 2$

d) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 0$

e) $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3, 2\}, x = 0, x = 2, y = 0$; trou de continuité en $(-3; \frac{1}{15})$

f) $\mathbb{R}^* - \{5\}, x = 5, y = -1$; trou de continuité en $(0; -\frac{1}{5})$

3.5

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}, x = 2, y = 2$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

c) $ED(f) = \mathbb{R}^*, x = 0, y = x$

d) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}, x = -1, x = 1, y = 0$

e) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}, x = 1, y = 3x - 1$

f) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}, x = -1, y = x + 1$; trou de continuité en $(3; \frac{17}{4})$

3.6

	AV	**AH**	**AO**
$n < 2$	$x = -3$ et $x = 3$	$y = 0$	aucune
$n = 2$	$x = -3$ et $x = 3$	$y = 1$	aucune
$n = 3$	$x = -3$ et $x = 3$	aucune	$y = x$
$n \geq 4$	$x = -3$ et $x = 3$	aucune	aucune

3.7

Par exemple :

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 3}{x - 2}$

3.8

$f(x) = \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 13x + 770}{x^2 + x - 2}$

3.9

Si c représente la courbe et d l'asymptote,

a) AO : $y = x$; c et d se coupent en $I(1; 1)$. c est au-dessus de d à gauche de I et au-dessous sinon.

b) AO : $y = 2x - 3$; c et d se coupent en $I(-3; -9)$. d est au-dessus de c dans $]-\infty; -3[\cup]-1; 1[$ et d est au-dessous de c dans $]-3; -1[\cup]1; +\infty[$.

c) AH : $y = 1$; c et d se coupent en $I(-2; 1)$. c est au-dessous de d à gauche de I est au-dessus sinon.

d) AH : $y = 0$; c et d se coupent en $I(4; 0)$. c est au-dessous de d à gauche de I est au-dessus sinon.