Chapitre 2

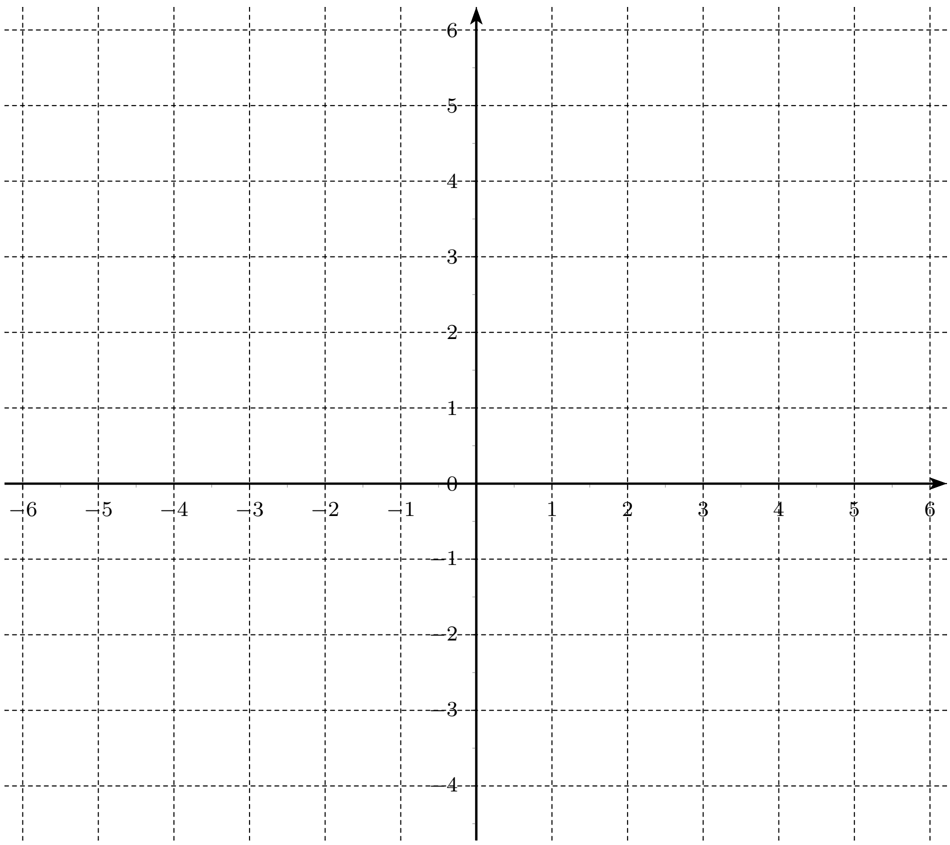
Limites finies et infinies

La notion de limite est particulièrement utile pour étudier le comportement d'une fonction au **voisisinage** d'un pôle.

2.1 Notion intuitive de limite finie

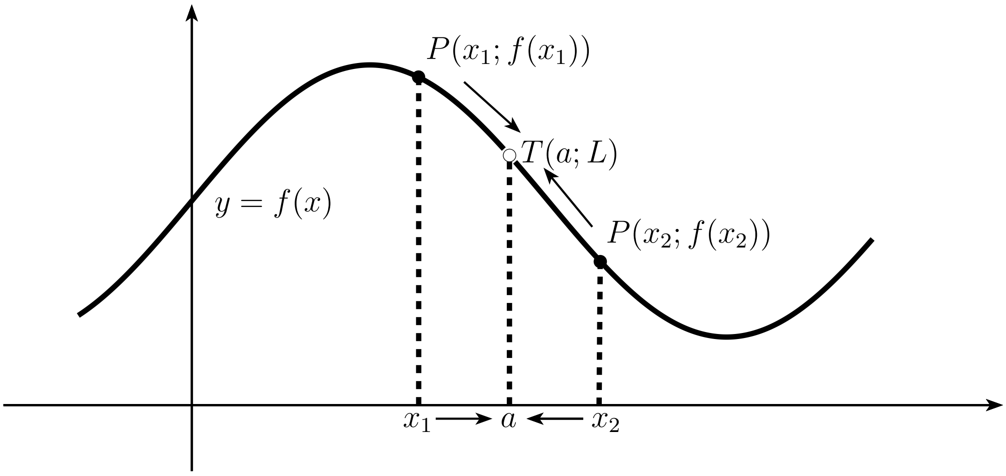
Exemple 2.1.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$. Déterminer son ensemble de définition, son signe et la représenter graphiquement.



2.2 Limite finie

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie que la suite de points $(x; f(x))$ du graphe représentant la fonction f s'approchent indéfiniment du point $(a; L)$ lorsque x se rapproche indéfiniment de a (sans prendre la valeur a). Les mots « proche » et « s'approcher de » sont employés ici dans un sens très intuitif !

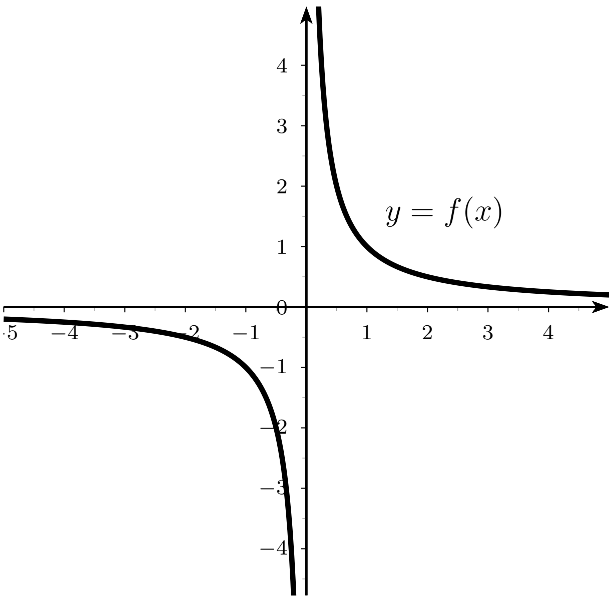


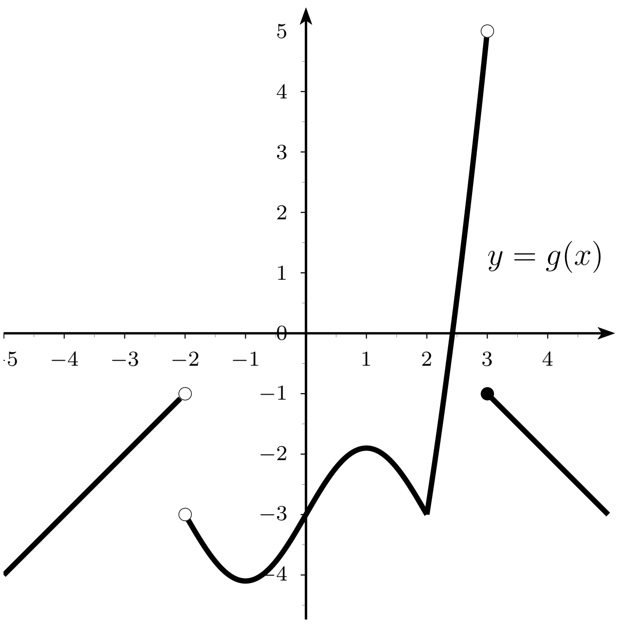
Remarque 2.1.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ne se calcule que si a est un pôle de f ou si $a \in I \subset ED(f)$ où I est un intervalle ouvert.

Exemple 2.2.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données graphiquement ci-dessous. Evaluer graphiquement les limites demandées.





$\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -2} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) =$

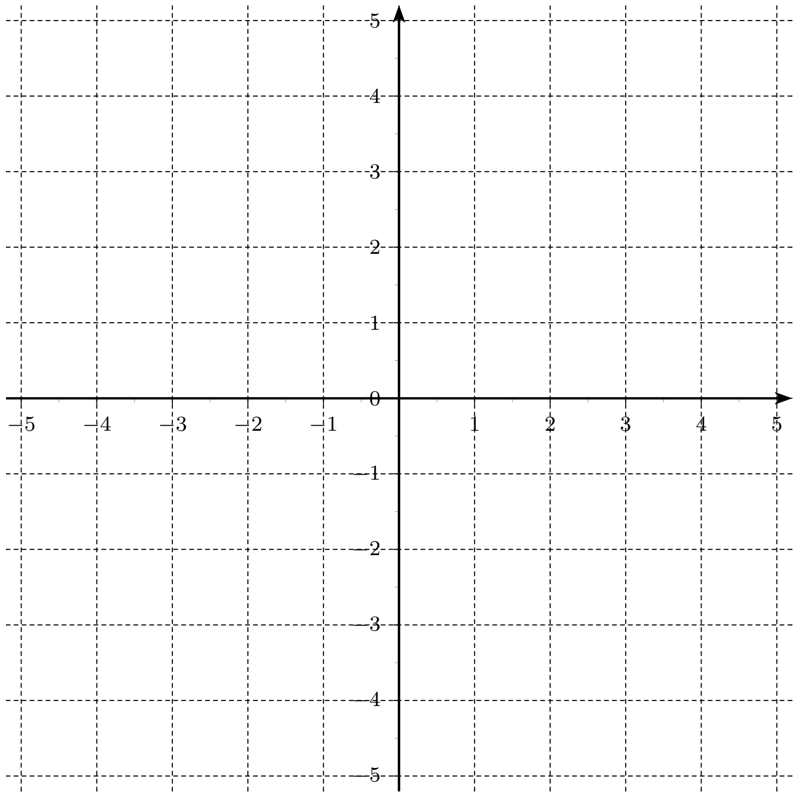
2.3 Limites à gauche et limites à droite

Nous allons devoir étudier le comportement de certaines fonctions au voisinage d'un point a d'une manière plus attentive, c'est-à-dire une fois à gauche de a, et une fois à droite de a. Le résultat ne sera pas nécessairement le même.

Exemple 2.3.

Représenter graphiquement ci-dessous la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0.5x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Déduire du graphe les limites suivantes (si elles existent) :

Limite en $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

Limite à gauche en $x = 2$: $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ <}} f(x) =$

Limite à droite en $x = 2$: $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ >}} f(x) =$

2.4 Calculs de limites

2.4.1 Opérations sur les limites

1) La limite est unique : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$, alors $L = M$.
2) La limite d'une somme est la somme des limites.
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$
3) La limite d'un produit est le produit des limites
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$
$\lim\limits_{x \to a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha \cdot L$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
4) La limite d'un quotient est le quotient des limites
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $M \neq 0$.

2.4.2 Calculs de limite en un point défini

- Soit f est une fonction polynomiale, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, logarithmique ou exponentielle et $a \in ED(f)$.
Si f définie dans un intervalle ouvert contenant a, alors :
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemple 2.4.

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 5} (3x^2 - 2x + 1) =$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{6 - x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1} =$

2.4.3 Calculs de la limite en un pôle

Fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $D(a) = 0$.

Premier cas : $N(a) = 0$

On obtient dans ce cas une forme $\dfrac{0}{0}$, dite **forme indéterminée**.

Dans cette situation, $N(x)$ et $D(x)$ sont divisibles par $x - a$. On peut donc simplifier la fraction par $x - a$.

Exemple 2.5.

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} =$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} =$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x} =$

Deuxième cas : $N(a) \neq 0$

On obtient dans ce cas une forme $\dfrac{b}{0}$ où $b \neq 0$. On verra plus loin comment poursuivre le calcul dans cette situation.

Quotients de fonctions non polynomiales

On utilise la formule $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ pour résoudre une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ dans le cas d'un quotient de fonctions contenant une racine carrée.

Exemple 2.6.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} =$$

2.5 Limites infinies

On va traiter la forme $\dfrac{b}{0}$ où $b \neq 0$.

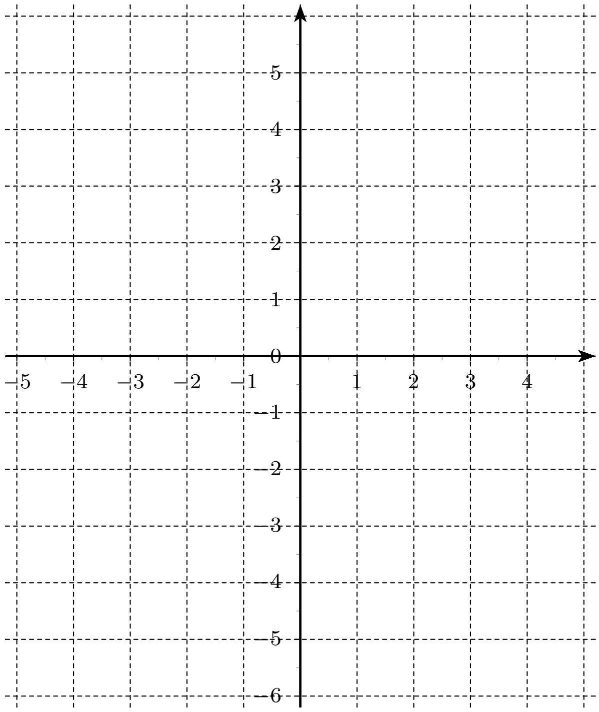
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment proche et différent de a

On a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x\to a} (-f(x)) = +\infty$.

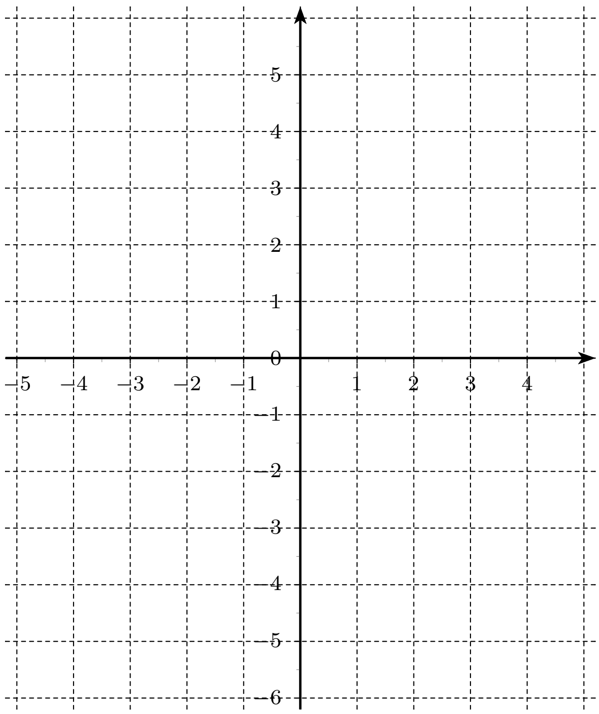
Exemple 2.7.

Déterminer l'ensemble de définition, le signe et esquisser les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$



b) $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$



2.5.1 Algèbre de l'infini

Les propriétés énoncées dans le théorème ne se généralisent pas sans autre aux limites infinies. Certaines de ces propriétés restent tout de même valables. Par exemple :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c > 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c < 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c < 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0_-$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Remarque 2.2.

1) On abrège les propriétés précédentes en notant par exemple :

$$\forall c \in \mathbb{R} :\ c + (+\infty) = +\infty \quad \text{ou} \quad \forall c \in \mathbb{R}, c < 0 :\ \frac{c}{0_-} = +\infty$$

2) Il existe des formes, dites **indéterminées**, pour lesquelles la conclusion n'est pas immédiate. Voici les principales :

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad (+\infty) - (+\infty) \qquad \text{et} \qquad 0 \cdot \pm\infty$$

Exemple 2.8.

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{5}{x-3} =$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4} =$

Remarque 2.3.

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ sont infinies, on notera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si les limites à gauche et à droite ne sont pas demandées.

2.6 Exercices

2.1

Déterminer à l'aide du graphique, lorsque c'est possible :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4) $f(2)$

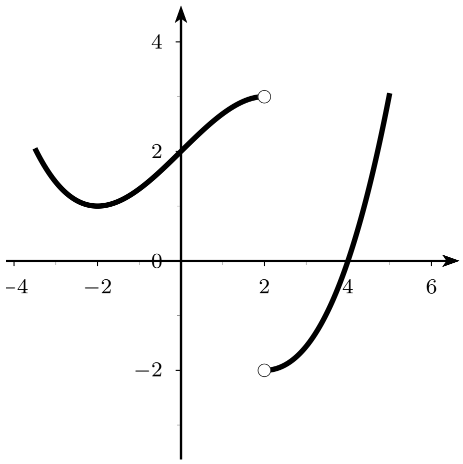
5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

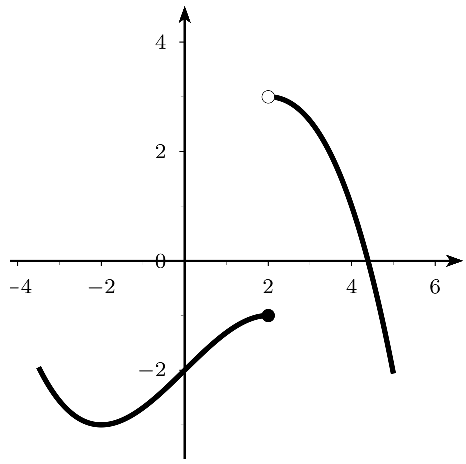
7) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

8) $f(0)$

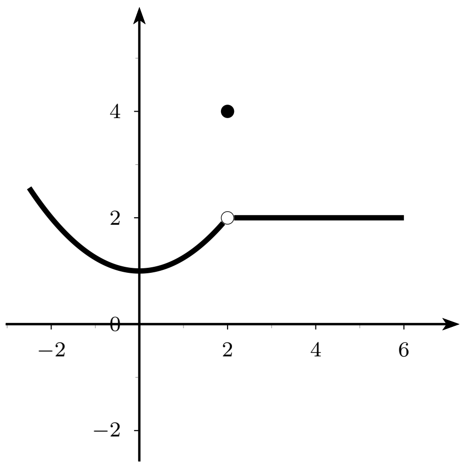
a)



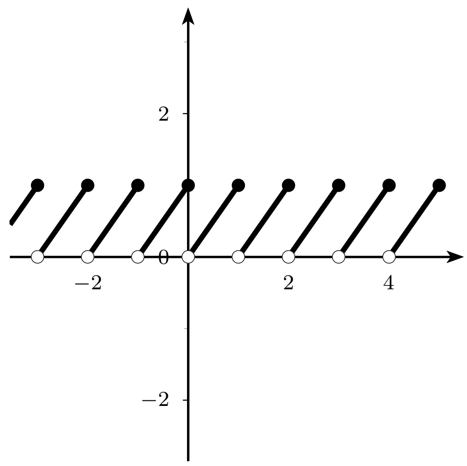
d)



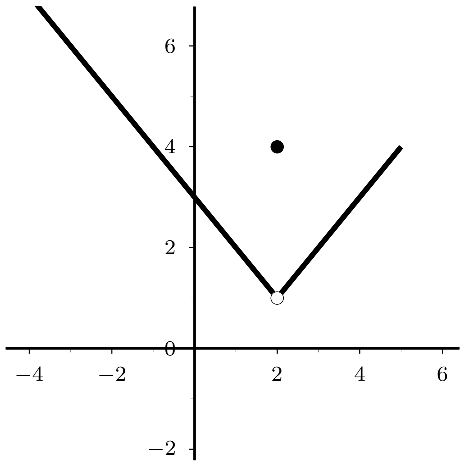
b)



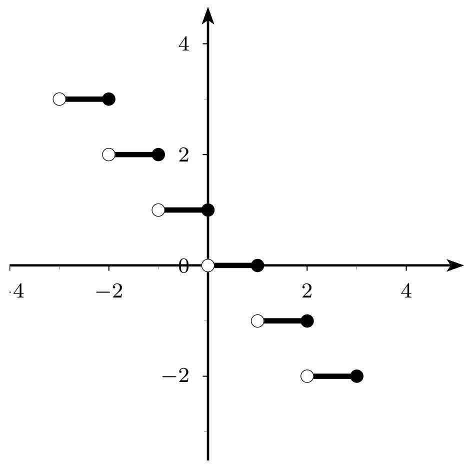
e)

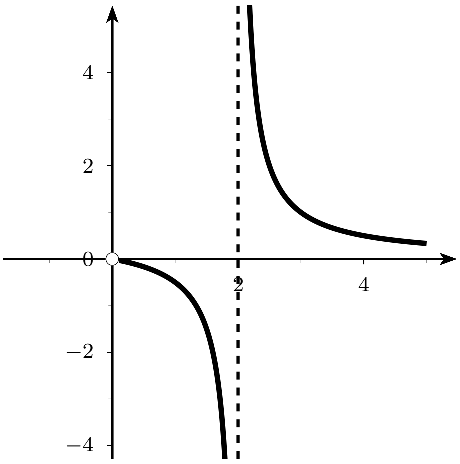


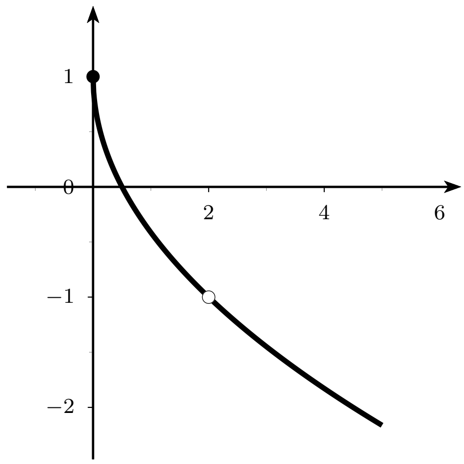
c)

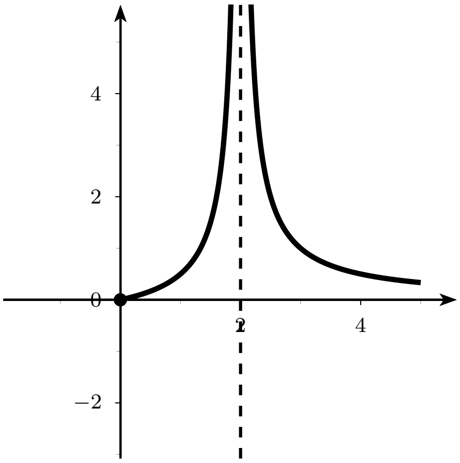


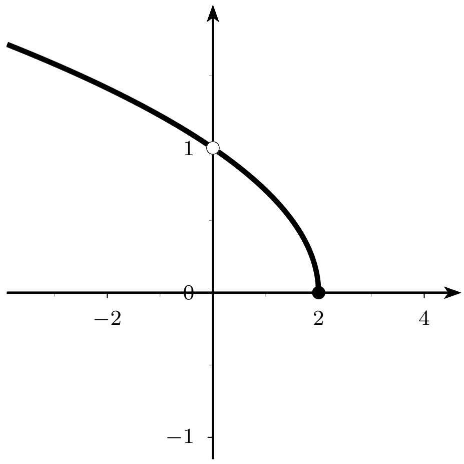
f)



g) 

i) 

h) 

j) 

2.2

Représenter graphiquement la fonction f et calculer :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 4) $f(1)$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

2.3

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 4} (x^2-9)$

b) $\lim_{x\to -3} (x^2-9)$

c) $\lim_{x\to -1} (1+x+x^2+x^3)$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x^2+1}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

f) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

h) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

i) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

j) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\pi\cdot x}$

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{(x+2)^2-(x-2)^2}$

l) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

m) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-8x+3}{16x^3-8x+2}$

n) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$

o) $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$

2.4

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^3-x^2-27x+9}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$

e) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

f) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

g) $\lim_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

h) $\lim_{h\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

j) $\lim_{t\to 2} \dfrac{1+\sqrt{t-2}}{t}$

k) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

2.5

Calculer les limites suivantes. Si la limite est infinie, préciser les limites à gauche et à droite si elles sont différentes.

a) $\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{1}{3-x}$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(3-x)^2}$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3}{(3-x)^2}$

d) $\lim_{x\to -\frac{5}{2}} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

f) $\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

g) $\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \dfrac{2x+7}{x^2+x-2}$

h) $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{x}{(2-x)^3}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{4-5x}{x^4}$

j) $\lim_{x\to 2} \left(8x+7+\dfrac{x}{x-2}\right)$

k) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-6x^2+12x-8}$

l) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-6x+5}$

m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

n) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{x^2-2x+1}$

o) $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

2.7 Réponses

2.1

a) 3/-2/-/-/2/2/2/2

b) 2/2/2/4/1/1/1/1

c) 1/1/1/4/3/3/3/3

d) $-1/3/-/-1/-2/-2/-2/-2$

e) $1/0/-/1/1/0/-/1$

f) $-1/-2/-/-1/1/0/-/1$

g) $-\infty/+\infty/-/-/-/0/-/-$

h) $+\infty/+\infty/+\infty/-/-/0/-/0$

i) $-1/-1/-1/-/-/1/-/1$

j) $0/-/-/0/1/1/1/-$

2.2

a) 0/3/-/3

b) 2/2/2/2

c) 0/0/0/1

d) 2/2/2/1

e) -1/-1/-1/2

2.3

a) 7

b) 0

c) 0

d) $\frac{1}{5}$

e) 0

f) -2

g) 0

h) $\frac{1}{2}$

i) 3

j) 0

k) $\frac{3}{8}$

l) $-\frac{8}{3}$

m) -1

n) $\frac{3}{16}$

o) $\frac{1}{2}$

2.4

a) $\frac{7}{48}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

e) 3

f) $\frac{5}{3}$

g) 8

h) $-\frac{1}{8}$

i) 2

j) $\frac{1}{2}$

k) $-2\sqrt{3}$

2.5

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) 0

e) $\frac{1}{2}$

f) $+\infty$

g) $+\infty$

h) $-\infty$

i) $+\infty$

j) $-\infty$ et $+\infty$

k) $-\infty$ et $+\infty$

l) $-\infty$ et $+\infty$

m) $+\infty$

n) $+\infty$ et $-\infty$

o) $\frac{1}{4}$