Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

1.1 Fonctions réelles d'une variable réelle

Une fonction réelle d'une variable réelle est donnée par

- Un ensemble de départ $A \subset \mathbb{R}$
- Un ensemble d'arrivée $B \subset \mathbb{R}$
- Une relation faisant correspondre à **chacun des éléments** de A **un et un seul élément** de B.

L'unique correspondant de $x = a$ par f est noté $f(a)$ et est appelé l'**image de a par f**

On note la fonction f comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f : & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$$

Exemple 1.1.

On achète des carottes à 2.8 francs le kilogramme. Donner la fonction f qui associe à la quantité (en kg) de carottes achetées son prix (en francs).

Exemple 1.2.

Déterminer deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $f : A \longrightarrow B, f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une fonction réelle.

Ensemble de définition

Soit f une fonction réelle donnée par son expression algébrique $f(x)$.

Rappelons qu'un nombre réel $x = a$ est une **indéfinition** de f si $f(a)$ n'existe pas.

Ensemble de définition de f :

$$ED(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{ \text{ indéfinitions } \}$$

On note alors

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & ED(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \cdots\cdots \text{ avec } ED(f) = \cdots\cdots$$

Plus simplement, une fonction réelle d'une variable réelle sera appelée une fonction.

Exemple 1.3.

Compléter

1) $\begin{array}{rcrcl} f & : & & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2x-1 \end{array}$

Déterminer l'image de $x = 0$ par f, de $x = a$ par f.

2) $\begin{array}{rcrcl} f & : & & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$

Déterminer l'image de $x = -2$ par f, l'image de $x = 0$ par f.

Remarque 1.1.

Les principales fonctions étudiées dans le cadre du cours de deuxième année sont les fonctions **polynomiales, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques.**

Exemple 1.4.

Préciser le type des fonctions suivantes et donner leur ensemble de définition.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 24$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 8}$

c) $f(x) = \sqrt{x + 6}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1 - x}}$

f) $f(x) = \sin(x)$

1.2 Graphe d'une fonction

Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x; f(x))$ où $x \in ED(f)$.

- En général, on représente le graphe d'une fonction dans un système d'axes Oxy.
- La représentation graphique de f est appelée **courbe représentative de *f*** ou plus simplement **graphe de *f***.
- Les points du graphe de f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$, appelée **équation cartésienne** du graphe de f.
- Une courbe donnée par son équation cartésienne en x et y peut représenter le graphe d'une fonction, mais ce n'est pas toujours le cas !

Exemple 1.5.

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Donner son ensemble de définition et représenter son graphe. Pour quelle valeur de a le point $(a; 2)$ appartient-il au graphe de f ?

b) La courbe d'équation $3x - 4y - 6 = 0$ est-elle le graphe d'une fonction ?

c) La courbe d'équation $y^2 = x + 2$ est-elle le graphe d'une fonction ?

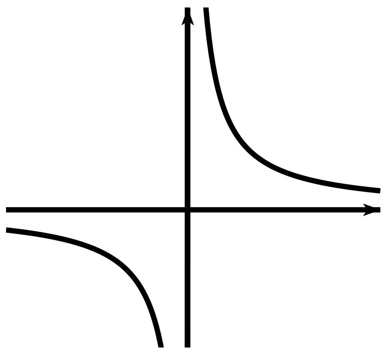
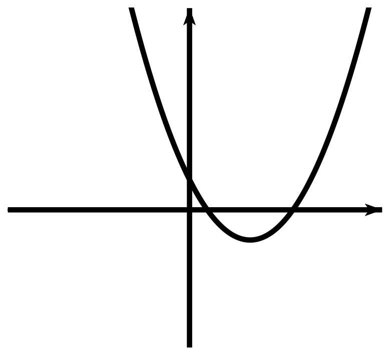
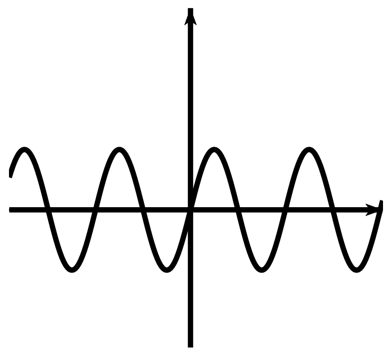
Graphes de quelques fonctions d'usage courant

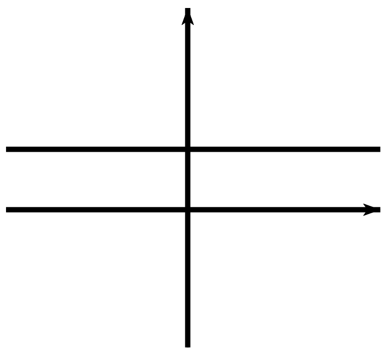
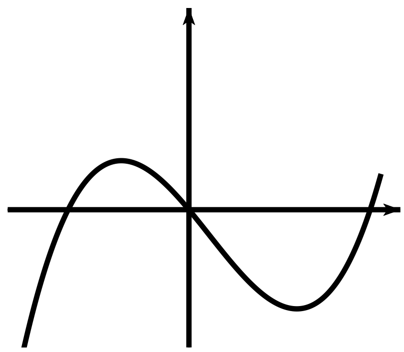
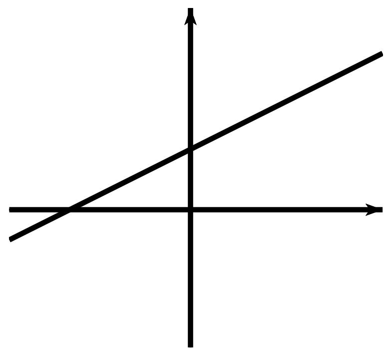
Ce sont les fonctions :

- constante
- identité
- affine
- valeur absolue
- quadratique
- cubique
- racine carrée
- inverse
- cubique
- puissance
- sinus
- cosinus
- tangente

Exemple 1.6.

Nommer les fonctions d'usage courant dont les graphes sont donnés ci-dessous.

1.3 Caractéristiques d'une fonction

1.3.1 Zéro et pôle d'une fonction

- Un nombre réel $a \in ED(f)$ est un **zéro** de f si $f(a) = 0$.
- Une indéfinition $b \notin ED(f)$ est un **pôle** de f s'il existe un intervalle ouvert $]c; d[$ contenant b avec f définie sur $]c; b[$ ou sur $]b; d[$ ou sur les deux intervalles.

Remarque 1.2.

a) Les zéros de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, les zéros de f sont les abscisses des points où le graphe de f coupe l'axe Ox.

b) Un pôle est une indéfinition qui est au « milieu » ou au « bord » de l'ensemble de définition. Par exemple, pour la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$, les nombres réels $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$ sont des indéfinitions de f, mais seul $x_1 = 2$ est un pôle.

1.3.2 Signe d'une fonction

L'axe Ox partage le plan en deux demi-plans. L'étude du signe de la fonction f permet de connaître les parties de $ED(f)$ pour lesquelles le graphe de f se situe au-dessus ou au-dessous de l'axe Ox.

Exemple 1.7.

a) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe de f donnée par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

b) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe de f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 3}$.

c) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe des fonctions f et g données par :
$f(x) = \sqrt{5 - x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

1.4 Croissance et décroissance d'une fonction

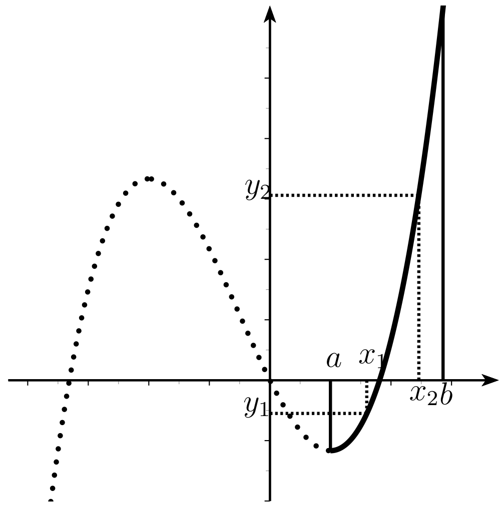
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I =]a; b[$.

La fonction f est **croissante** (**strictement croissante**) sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$:

$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp $f(x_1) < f(x_2)$)

Le graphe d'une fonction croissante sur $I =]a; b[$ « monte » lorsqu'on le parcourt I de gauche à droite. On note

x	a $\quad$ b
$f(x)$	$\nearrow$

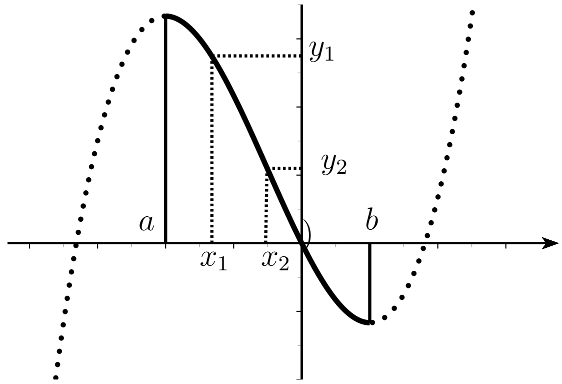


La fonction f est **décroissante** (**strictement décroissante**) sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$:

$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (resp $f(x_1) > f(x_2)$)

Le graphe d'une fonction décroissante sur $I =]a; b[$ « descend » lorsqu'on parcourt I de gauche à droite. On note

x	a $\quad$ b
$f(x)$	$\searrow$



1.5 Extremums d'une fonction

Intuitivement, un extremum est un point du graphe de f situé « au-dessus de tous ses voisins » (pour un maximum), ou « au-dessous de tous ses voisins » (pour un minimum).

Soit f une fonction et $ED(f)$ son ensemble de définition.

f admet un **maximum** en $c \in ED(f)$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant c, tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I \cap ED(f)$.

f admet un **minimum** en $c \in ED(f)$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant c, tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I \cap ED(f)$.

Un **extremum** désigne soit un maximum soit un minimum.

Remarque 1.3.

a) On parle indistinctement d'extremum en c ou d'extremum de coordonnées $(c; f(c))$ du graphe de f.

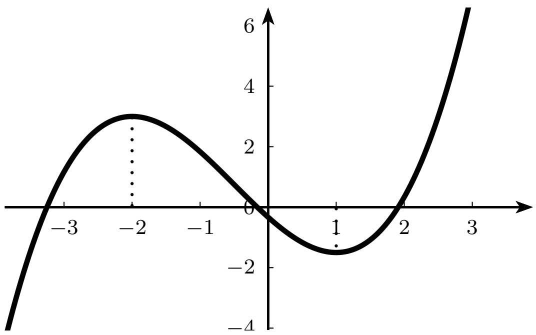
b) Un extremum est **absolu** si en ce point la fonction prend sa plus grande (ou sa plus petite) valeur sur tout son ensemble de définition. Sinon l'extremum est dit **local**.

c) La recherche des extremums d'une fonction débouche fréquemment sur des calculs compliqués, même pour des fonctions qui s'expriment simplement. La théorie sur les dérivées nous fournira une méthode très pratique pour résoudre ce type de problème.

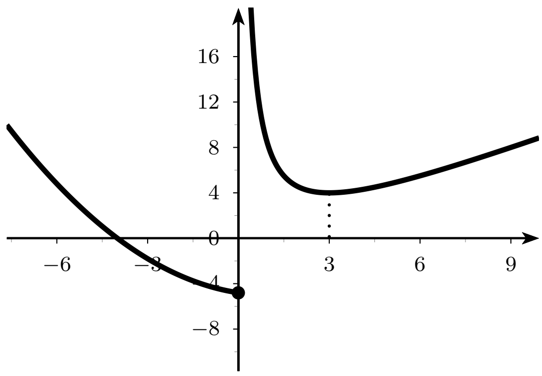
Exemple 1.8.

a) En consultant le graphe des fonctions suivantes, établir leur tableau de croissance. Les extremums sont-ils absolus ?

1)



2)



b) Etudier la croissance de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 4x + 5$.
L'extremum est-il absolu ?

1.6 Opérations sur les fonctions

On considère f et g deux fonctions avec $A = ED(f)$ et $B = ED(g)$.

1) La **somme** de f et g est la fonction $f + g$ définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } ED(f+g) = A \cap B$$

2) La **différence** de f et g est la fonction $f - g$ définie par

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \text{ avec } ED(f-g) = A \cap B$$

3) Le **produit** de f par un nombre réel c est la fonction $c \cdot f$ définie par

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \text{ avec } ED(c \cdot f) = A$$

4) Le **produit** de f et g est la fonction $f \cdot g$ définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ avec } ED(f \cdot g) = A \cap B$$

5) Le **quotient** de f et g est la fonction $\dfrac{f}{g}$ définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } ED\left(\frac{f}{g}\right) = A \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$$

Exemple 1.9.

Compléter :

$$f : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$$g : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{x}{x-3}$$

$$f+g : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto$$

$$f-g : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto$$

$$5 \cdot f : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto$$

$$f \cdot g : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto$$

$$\frac{f}{g} : \quad \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto$$

1.7 Composée de fonctions

Une fonction peut-être comparée à une machine.

Par exemple

- La fonction f donnée par $f(x) = 5x$ peut être vue comme une machine qui multiplie par 5 l'élément qui est entré dans la machine.
- La fonction g donnée par $g(x) = x^2 - 9$, peut être vue comme une machine qui met au carré l'élément qui est entré dans la machine, puis ôte la valeur 9 au résultat.

Il est possible de mettre ces deux machines l'une après l'autre :

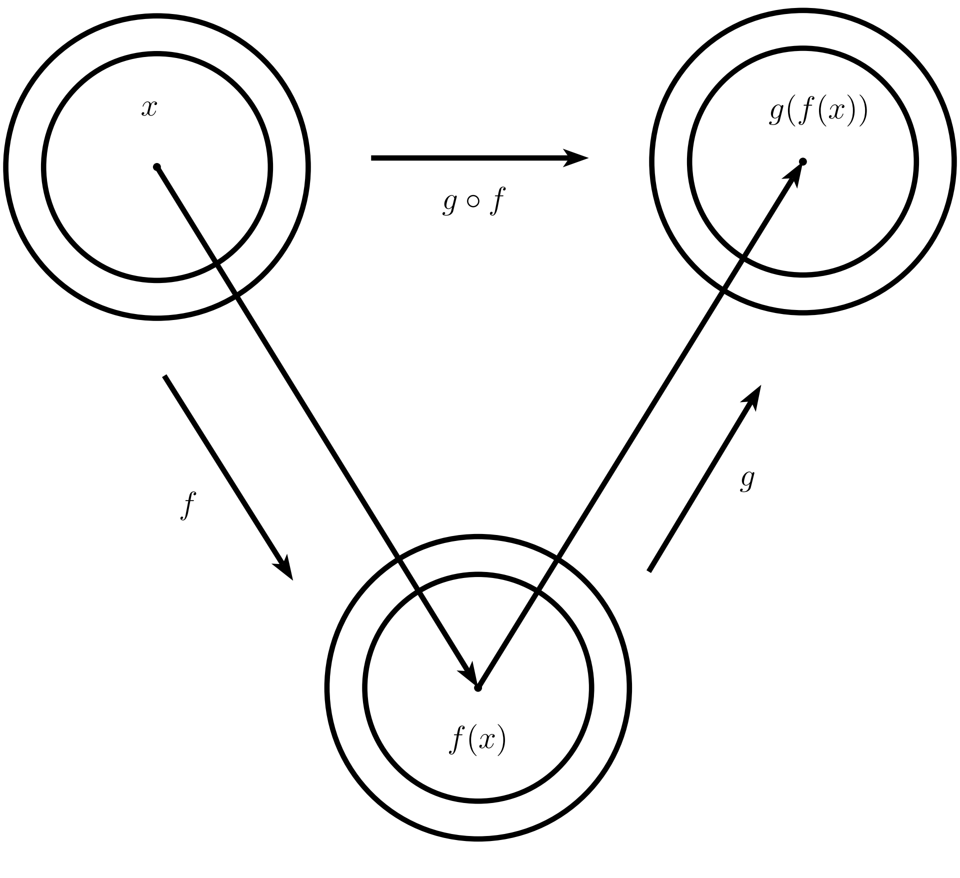
- si l'on met d'abord la machine f puis la machine g, $x \xrightarrow{f} 5x \xrightarrow{g} (5x)^2 - 9 = 25x^2 - 9$
- si l'on met d'abord la machine g puis la machine f, $x \xrightarrow{g} x^2 - 9 \xrightarrow{f} 5(x^2 - 9) = 5x^2 - 45$

Cette opération se nomme la **composée** de fonctions.

On considère f et g deux fonctions avec $A = ED(f)$ et $B = ED(g)$.

La **composée** de f et g, prise dans cet ordre (autrement dit on applique d'abord la fonction f puis la fonction g), est la fonction $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \text{ avec } ED(g \circ f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$



Remarque 1.4.

a) Dans la notation $g \circ f$, la première fonction qui agit est écrite à droite. Il s'agit en fait d'une convention en harmonie avec la définition de $g \circ f$, puisque $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. On cherche en effet d'abord l'image de x par f, puis l'image de cette image par g.

b) $g \circ f$ et $f \circ g$ sont en général des fonctions différentes.

Exemple 1.10.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

1.8 Fonctions réciproques

Une fonction réelle $f : A \to B$ est dite **bijective** s'il existe une fonction $g : B \to A$ telle que $(g \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in A$ et $(f \circ g)(y) = y$ pour tout $y \in B$.

La fonction g est appelée la **réciproque** de f.

Exemple 1.11.

Pour les fonctions f suivantes, déterminer deux ensembles A et B tels que $f : A \to B$ soit bijective et déterminer la fonction réciproque $g : B \to A$.

a) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

1.9 Exercices

1.1

Pour les fonctions suivantes

1) Donner l'ensemble de définition.
2) Donner une équation cartésienne du graphe.
3) Esquisser le graphe des fonctions proposées.

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = -2x + 8$

c) $f(x) = -x^2 + x + 15$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

e) $f(x) = \sqrt{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x}$

1.2

Pour les courbes géométriques suivantes

1) Donner, lorsque c'est possible, l'expression $f(x)$ de la fonction associée.
2) Esquisser les courbes géométriques proposées aux questions b), c), e) et f).

a) $3x - 2y = 6$

b) $y = x^2$

c) $x = y^2$

d) $x = \dfrac{1}{y-1}$

e) $y = 9 - x^2$

f) $x = y^2 + 5$

1.3

Donner $ED(f)$ puis étudier le signe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 8x + 15}$

e) $f(x) = x + 5 - \dfrac{6}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x}$

g) $f(x) = \dfrac{-1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 12}$

h) $f(x) = x^3 - 4x$

i) $f(x) = \dfrac{(x+4)^3}{(x-5)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{(x^2+4x)(3x-1)}{15x^2 + x - 2}$

1.4

Donner $ED(f)$ puis étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{5x\sqrt{x+2}}{x-7}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\sqrt{x-5}$

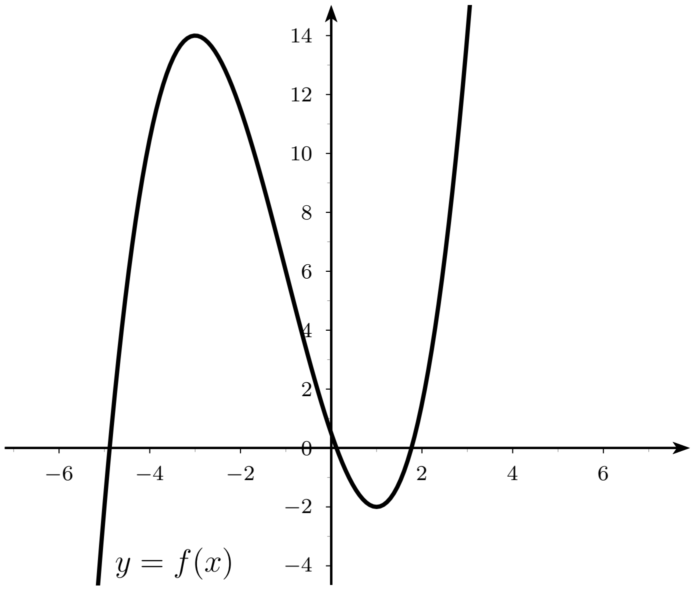
f) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-5)}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$

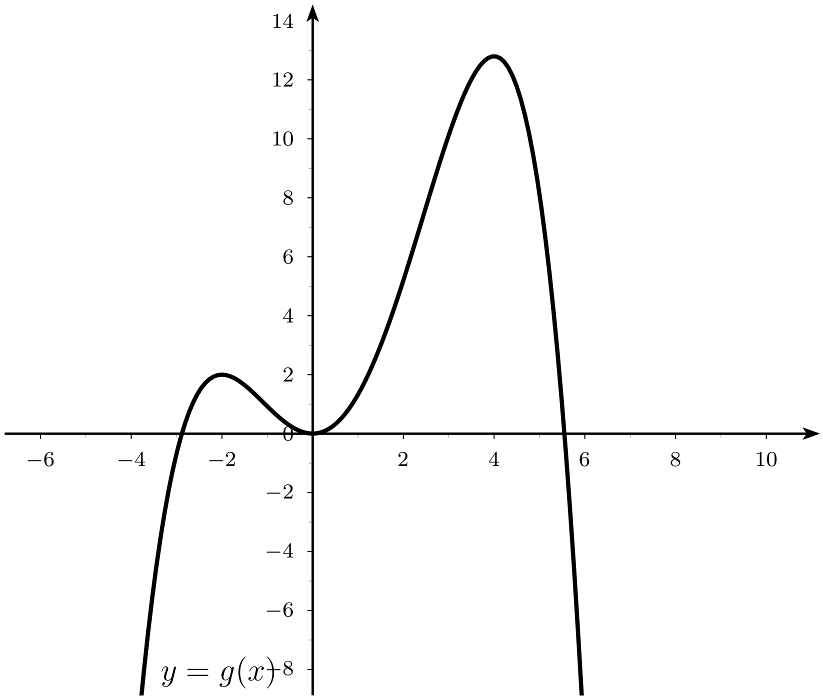
h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$

1.5

1) Établir le tableau de croissance de la fonction f représentée ci-contre par son graphe. Donner les coordonnées des extremums éventuels (les coordonnées sont entières).



2) Établir le tableau de croissance de la fonction g représentée ci-contre par son graphe. Donner les coordonnées des extremums éventuels (les coordonnées sont entières).



1.6

Donner l'ensemble de définition, le signe et le tableau de croissance des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x^2 + 2x - 24$

2) $f(x) = 2x^2 + 10x - 48$

3) $f(x) = -2x^2 - x + 15$

4) $f(x) = \dfrac{16}{x^2 + 4}$

1.7

Un maraîcher doit décider du nombre x de pommiers à planter sur une parcelle donnée. Des études ont montré que si l'on plante x pommiers sur la parcelle, chaque pommier produit $N(x) = 888 - 12x$ pommes (pour $x \geq 20$).

1) Si $x = 30$, déterminer le nombre total T de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle.
2) Soit T le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle. Exprimer T en fonction de x .
3) Le maraîcher souhaite que le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle soit maximal. Combien de pommiers doit-il planter et quel est le maximum de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle ? Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

1.8

Un quincaillier a 300 tondeuses à gazon à vendre pour la saison. Il sait qu'au prix de 400 francs, il les vendra toutes. Il suppose que pour chaque augmentation de 10 francs du prix, il perdra 4 ventes.

1) Déterminer le nombre N de tondeuses à gazon vendues en fonction du prix p de vente.
2) Quel prix devrait-il vendre ses tondeuses à gazon s'il souhaite avoir un revenu maximal ? Quels sont alors le revenu maximal et le nombre de tondeuses non vendues. Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

1.9

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-2x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 6-x-x^2 \end{array}$$

Définir avec la même présentation les fonctions :

a) $f+g$ b) $f-3g$ c) $f \cdot g$ d) $\dfrac{f}{g}$ e) $\dfrac{5}{g}$ f) $f \circ g$ g) $f \circ f$ h) $g \circ f$ i) $g \circ g$

1.10

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

Définir avec la même présentation les fonctions :

a) $f \circ g$ b) $f \circ f$ c) $g \circ g$ d) $g \circ f$

1.11

Ecrire les fonctions suivantes comme composée de plusieurs autres fonctions.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$

b) $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 16}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 3)^4}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 4} + 2}$

g) $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

1.12

Pour les fonctions f suivantes, déterminer deux ensembles A et B tels que $f : A \to B$ soit bijective et déterminer la fonction réciproque $g : B \to A$.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = 3 - 2x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{4x - 3}{2x - 2}$

f) $f(x) = x^3$

1.13

Etudier la position relative des courbes représentant les graphes des fonctions f et g définies par :

a) $f(x) = 4(x^2 - x - 2)$ et $g(x) = 3x(x - 2)$

b) $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = 4x^2 + 6x - 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ et $g(x) = 3x^2 + 7x$

d) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - x + 6}{x^2 - 1}$ et $g(x) = 2x - 3$

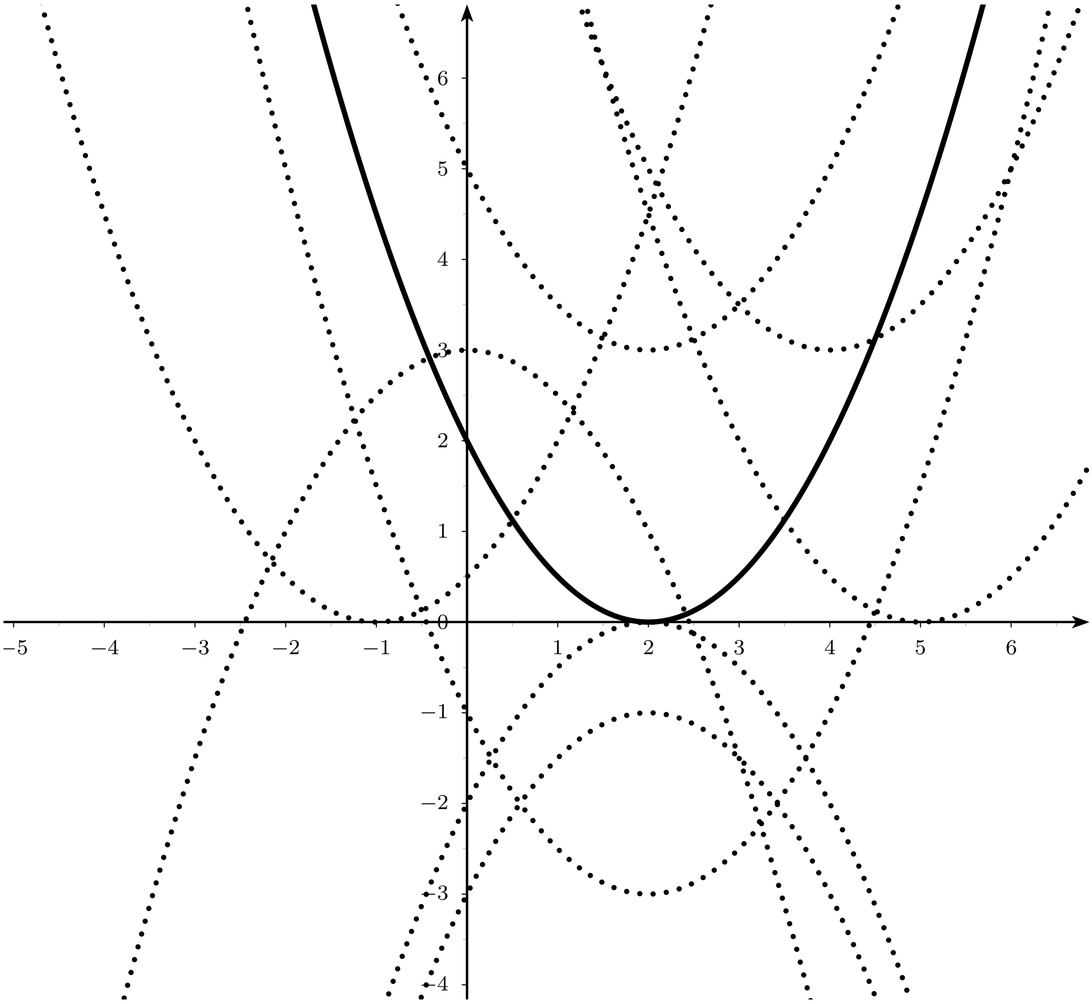
1.14

M. Picsou achète une action à la bourse au prix de 1000 fr. Le contexte économique fait en sorte que la valeur de cette action augmente régulièrement de 20 fr par jour pendant 30 jours, reste stable pendant les 10 jours suivants, puis diminue de 10 % par jour pour tous les jours qui suivent. Trouver une fonction f qui exprime la valeur de cette action en fonction du nombre n de jours écoulés depuis l'achat.

1.15

Le dessin ci-dessous donne (en gras) la courbe représentant le graphe d'une fonction *f*. Retrouver sur ce même dessin les graphes des fonctions données par :

- $g(x) = f(x+3)$
- $h(x) = f(x-3)$
- $i(x) = f(x)+3$
- $j(x) = f(x)-3$
- $k(x) = -f(x)$
- $l(x) = -f(x)-1$
- $m(x) = -f(x+2)+3$
- $n(x) = f(x-2)+3$



1.10 Réponses

1.1

a) $ED(f) = \mathbb{R},\ y = 2$

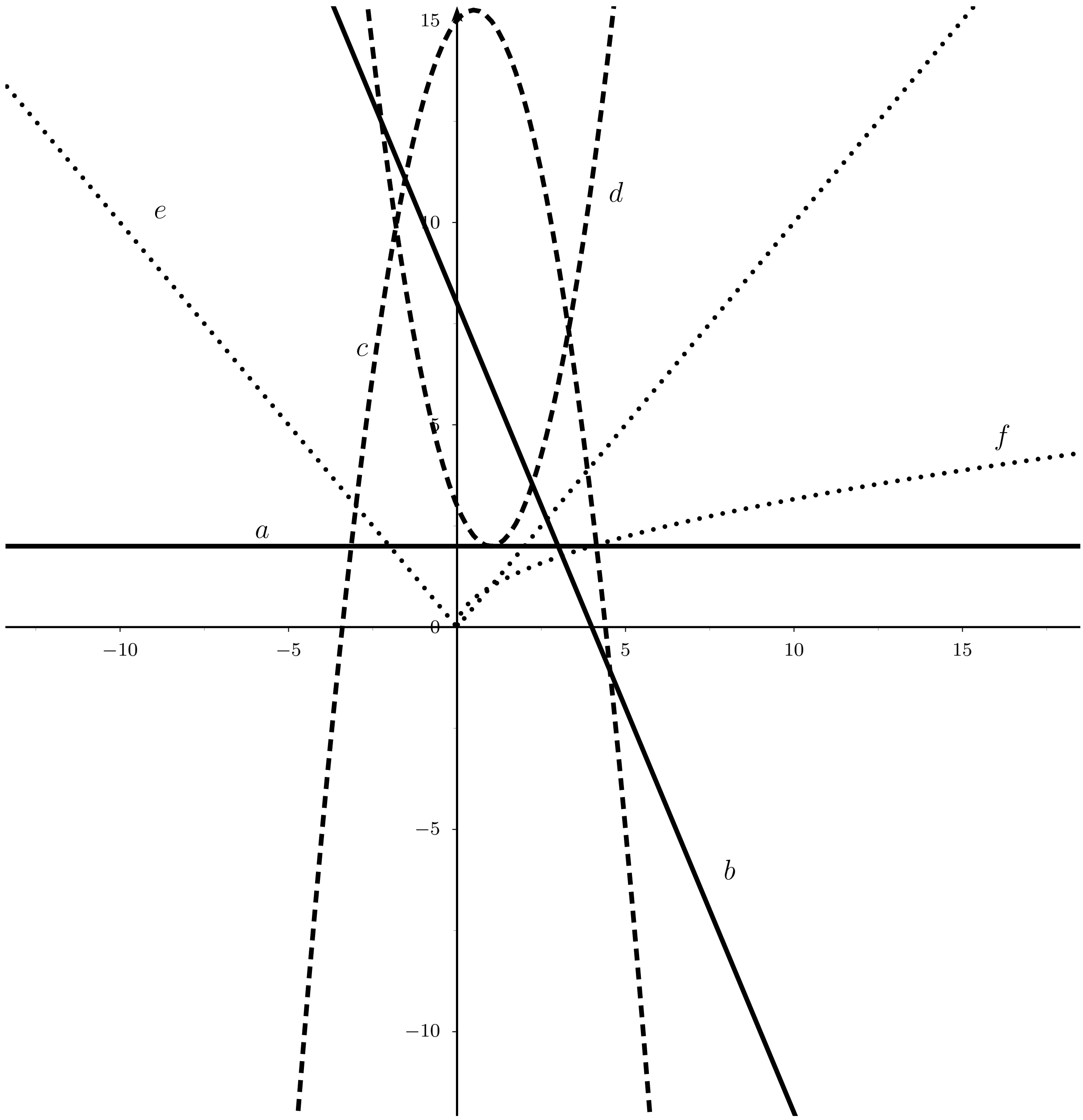
b) $ED(f) = \mathbb{R},\ y = -2x + 8$

c) $ED(f) = \mathbb{R},\ y = -x^2 + x + 15$

d) $ED(f) = \mathbb{R},\ y = x^2 - 2x + 3$

e) $ED(f) = \mathbb{R},\ y = \sqrt{x^2}$

f) $ED(f) = \mathbb{R}_+,\ y = \sqrt{x}$



1.2

a) $f(x) = \dfrac{3x-6}{2} = \dfrac{3}{2}x - 3$

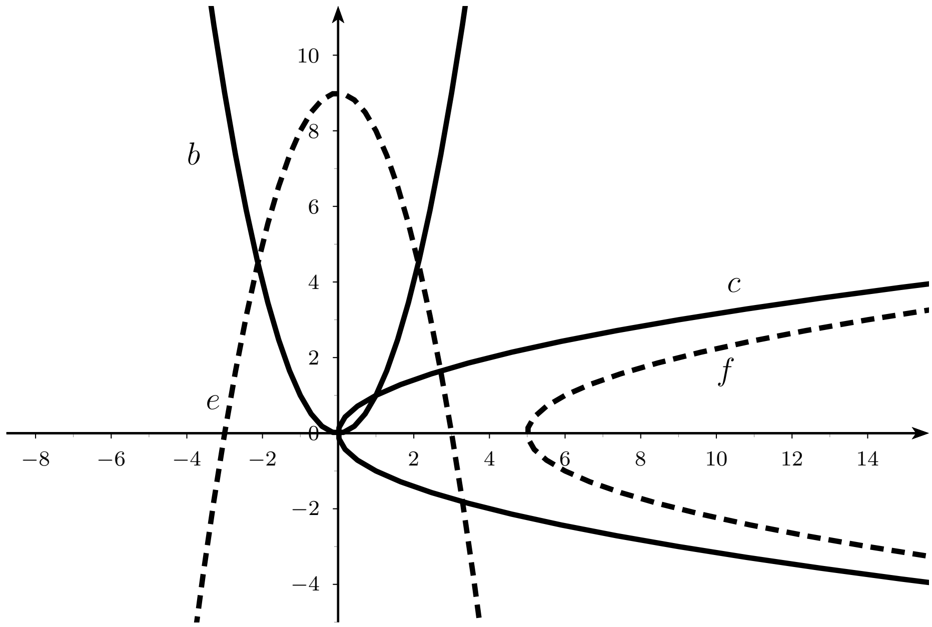
b) $f(x) = x^2$

c) -

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

e) $f(x) = 9 - x^2$

f) -



1.3

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

x		$\frac{4}{3}$	
$3x-4$	$-$	0	$+$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

x		$-\frac{1}{2}$		3	
$\frac{2x+1}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

c) $ED(f) = \mathbb{R}$

x		-4		-3	
$x^2+7x+12$	$+$	0	$-$	0	$+$

d) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-5; -3\}$

x		-5		-3	
$\dfrac{1}{x^2+8x+15}$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

e) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

x		-6		0		1	
$x+5-\dfrac{6}{x}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

f) $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3\}$

x		-3		-1		0	
$\dfrac{x+1}{x^2+3x}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

g) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

x		-3	
$\dfrac{-1}{x^3+3x^2+4x+12}$	$+$	‖	$-$

h) $ED(f) = \mathbb{R}$

x		-2		0		2	
x^3-4x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

i) $ED(f) = \mathbb{R} - \{5\}$

x		-4		5	
$\dfrac{(x+4)^3}{(x-5)^2}$	$-$	0	$+$	‖	$+$

j) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\}$

x		-4		$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{1}{3}$	
$\frac{(x^2+4x)(3x-1)}{15x^2+x-2}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$

1.4

a) $ED(f) = \mathbb{R}_-$

x		0	
$-\sqrt{-x}$	$-$	0	

b) $ED(f) = [-2; +\infty[- \{7\}$

x		-2		0		7	
$\frac{5x\sqrt{x+2}}{x-7}$		0	$+$	0	$-$	‖	$+$

c) $ED(f) = [-1; 1]$

x		-1		1	
$\sqrt{1-x^2}$		0	$+$	0	

d) $ED(f) = \emptyset$

e) $ED(f) = [5; +\infty[$

x		5	
$\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\sqrt{x-5}$		0	$+$

f) $ED(f) = [-2; 1] \cup [5; +\infty[$

x		-2		1		5	
$\sqrt{(x-1)(x+2)(x-5)}$		0	$+$	0		0	$+$

g) $ED(f) =]4; +\infty[$

x		4	
$\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$		||	$+$

h) $ED(f) =]-\infty;-3] \cup]4;+\infty[$

x		-3		4	
$\sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$	$+$	0		||	$+$

1.5

1)

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Max : $(-3;14)$; min : $(1;-2)$.

2)

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Max : $(-2;2), (4;13)$; min : $(0;0)$.

1.6

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-6		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Min : $(-1;-25)$.

2) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-8		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2.5		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Min : $(-2.5;-60.5)$.

3) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		2.5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$	-0.25	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Max : $(-0.25; 15.125)$.

4) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Max : $(0; 4)$.

1.7

1) 15'840 ; 2) $T(x) = -12x^2 + 888x$; 3) 37 pommiers ; nombre maximal : 16'428 pommes.

1.8

1) $N(p) = -0.4p + 460$; 2) 575 francs ; revenu max : 132'250 francs ; 70 tondeuses non vendues.

1.9

a) $$f+g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2 - 3x + 8 \end{array}$$

b) $$f-3g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + x - 16 \end{array}$$

c) $$f \cdot g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 - 14x + 12 \end{array}$$

d) $$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-3; 2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2-2x}{6-x-x^2} \end{array}$$

e) $$\frac{5}{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-3; 2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{5}{6-x-x^2} \end{array}$$

f) $$f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 2x - 10 \end{array}$$

g) $f \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x-2 \end{array}$

h) $g \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -4x^2+10x \end{array}$

i) $g \circ g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^4-2x^3+12x^2+13x-36 \end{array}$

1.10

a) $f \circ g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x} \end{array}$

b) $f \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

c) $g \circ g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-1; -\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \dfrac{x}{2x+1} \end{array}$

d) $g \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \dfrac{1}{1+x} \end{array}$

1.11 Par exemple...

a) $g(x) = x^2+3x,\ h(x) = \sqrt[3]{x}$ et $f = h \circ g$

b) $g(x) = x^4-2x^2+5,\ h(x) = x^5$ et $f = h \circ g$

c) $g(x) = x^2-16,\ h(x) = \sqrt[4]{x}$ et $f = h \circ g$

d) $g(x) = x^2+3x-5,\ h(x) = x^3,\ j(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f = j \circ h \circ g$

e) $g(x) = x-3,\ h(x) = x^4,\ j(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f = j \circ h \circ g$

f) $g(x) = x+4,\ h(x) = \sqrt{x},\ j(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ et $f = j \circ h \circ g$

g) $g(x) = x^2+1,\ h(x) = \sqrt{x},\ j(x) = 4+x$ et $f = j \circ h \circ g$

h) $g(x) = \sqrt[3]{x},\ h(x) = \dfrac{x}{1+x}$ et $f = h \circ g$

1.12

a) $A = B = \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x}{3}$

b) $A = B = \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{3-x}{2}$

c) $A = B = \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $A = B = \mathbb{R} - \{1\},\ g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

e) $A = \mathbb{R} - \{1\}, B = \mathbb{R} - \{2\}\ g(x) = \dfrac{3-2x}{4-2x}$

f) $A = B = \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x}$

1.13

a) f et g se coupent en $I(-4;72)$ et $J(2;0)$.
Entre ces points, g est au-dessus de f, sinon g est au-dessous de f.

b) f et g se coupent en $I(2;27)$ et f est au-dessus de g.

c) f et g ne se coupent pas. g est toujours au-dessus de f.

d) f et g se coupent en $I(-3;-9)$.
Sur $]-\infty;-3] \cup]-1;1[$ g est au-dessus de f.
Sur $[-3;-1[\cup]1;+\infty[$ g est au-dessous de f.

1.14

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} 1000 + 20n & \text{si} \quad n \leq 30 \\ 1600 & \text{si} \quad 31 \leq n \leq 40 \\ 1600(0.9)^{n-40} & \text{si} \quad n \geq 41 \end{cases}$$

1.15