Chapitre 2

Exponentielles et logarithmes

2.1 Exponentielles

Exemple 2.1.

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite. Si l'on imagine que l'on peut plier indéfiniment la feuille, combien de fois faudrait-il la plier pour atteindre une épaisseur qui dépasse 2 m ? 20 m ? 1 km ? la distance Terre-Soleil (149′600′000 km) ?

Définition 2.1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

On appelle ***exponentielle de base a****, la fonction f définie par $f(x) = a^x$.*

Remarque 2.1.

Attention à ne pas confondre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances.

- Pour les **fonctions exponentielles**, la base de la puissance est un nombre et la variable apparaît en exposant. Par exemple $f(x) = 2^x$ ou encore $g(x) = 7^{x-5}$.
- Pour les **fonctions puissances**, la base de la puissance contient la variable et l'exposant est un nombre réel. Par exemple $f(x) = x^6$ ou encore $g(x) = \sqrt[7]{(x-1)^3} = (x-1)^{3/7}$.

2.2 Logarithme

2.2.1 Notion de logarithme

En 1544, Stifel met en évidence les deux suites suivantes :

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

On constate que le passage de la ligne supérieure à la ligne inférieure transforme les produits en sommes. Par exemple, pour multiplier 8 par 32, on regarde le correspondant de 8 sur la ligne inférieure (c'est 3), on fait de même avec 32 (c'est 5), on additionne les deux nombres ($3 + 5 = 8$), on consulte le correspondant de 8 sur la première ligne (c'est 256) et ce nombre correspond au produit de 8 et 32 !

Les éléments de la deuxième ligne sont les **logarithmes en base 2** des éléments correspondants de la première ligne.

On a par exemple :

$$\log_2(8) = 3 \text{ ou encore } \log_2(32) = 5$$

et on constate que

$$\log_2(8 \cdot 32) = \log_2(8) + \log_2(32)$$

Définition 2.2

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.
Le logarithme de base b d'un nombre u strictement positif, noté $\log_b(u)$, se définit de la manière suivante :

$$x = \log_b(u) \iff b^x = u \quad \text{où } u \in \mathbb{R}_+^*$$

Logarithme de base 10

Par convention, lorsque 10 correspond à la base du logarithme, celui-ci n'est pas spécifié dans l'écriture du logarithme : par exemple, $\log_{10}(10\,000)$ s'écrit tout simplement $\log(10\,000)$.

On calcule le logarithme en base 10 d'un nombre réel positif non nul à l'aide de la touche $\boxed{\text{log}}$ de la calculatrice

Logarithme de base *e*

Si n est un entier positif, alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \cong 2.71828182846 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

Le nombre e obtenu est appelé le **nombre d'Euler** (Leonhard Euler, mathématicien suisse, Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783).

Une valeur approchée du nombre d'Euler e peut être obtenue à l'aide de la calculette à l'aide de la suite d'instructions $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\ln}$.

Le logarithme en base e est fréquemment utilisé en analyse mathématique.

Par convention, le logarithme de u en base e s'écrit $\ln(u)$ au lieu de $\log_e(u)$.

On calcule le logarithme en base e à l'aide de la touche $\boxed{\ln}$.

Exemple 2.2.

Sans l'aide d'une machine, calculer :

$x = \log_3(243) =$

$x = \log\left(\sqrt[3]{0.000001}\right) =$

$\log(x) = 2$

$\ln(e) =$

$\ln(1) =$

$\ln(x) = 7$

$\ln(\sqrt[3]{e^7}) =$

2.2.2 Propriétés des logarithmes

Théorème 2.3

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, *pour tout* $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, *on a*

base $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	***bases particulières*** $b = 10$ *et* $b = e$
1) $\log_b(1) = 0$	*1)* $\log(1) = 0, \ln(1) = 0$
2) $\log_b(b) = 1$	*2)* $\log(10) = 1, \ln(e) = 1$
3) $\log_b(b^x) = x$	*3)* $\log(10^x) = x, \ln(e^x) = x$
4) $b^{\log_b(x)} = x$	*4)* $10^{\log(x)} = x, e^{\ln(x)} = x$
5) $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$	*5)* $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v),$ $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
6) $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$	*6)* $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$ $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
7) $\log_b\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_b(v)$	*7)* $\log\left(\frac{1}{v}\right) = -\log(v)$ $\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln(v)$
8) $\log_b(u^x) = x \cdot \log_b(u)$	*8)* $\log(u^x) = x \cdot \log(u)$ $\ln(u^x) = x \cdot \ln(u)$
9) $\log_b(u) = \log_b(v) \iff u = v$	*9)* $\log(u) = \log(v) \iff u = v$ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$
10) $b^x = b^y \iff x = y$	*10)* $10^x = 10^y \iff x = y$ $e^x = e^y \iff x = y$

Remarque 2.2.

a) Les relations ci-dessus sont souvent utilisées pour transformer par équivalences des équations où apparaissent des logarithmes.

b) Les calculs utilisant des logarithmes sont parfois délicats. Attention à ne pas inventer des formules. Par exemple :

- le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas
- $\log_b(x) = \log_c(y)$ n'implique pas en général $x = y$
- $\log_b(x) = k \cdot \log_b(y)$ n'implique pas en général $x = k \cdot y$
- $\log_b(x) = \log_b(y) + \log_b(z)$ n'implique pas en général $x = y + z$
- $\dfrac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$ n'est pas en général égal à $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right)$
- $\log_b(x^u)$ n'est pas en général égal à $(\log_b(x))^u$

Exemple 2.3.

Simplifier l'écriture des expressions

a) $\log_2(1) =$

b) $\log_7(7) =$

c) $\log(2) + \log(5) =$

d) $\log_5(75) - \log_5(3) =$

e) $\log_3(81) =$

f) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

g) $\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right) =$

h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) =$

2.3 Formule du changement de base

Deux bases de logarithme sont fréquemment utilisées : la base 10 et la base e. Les calculatrices ne proposent (en général) que ces deux bases. On peut cependant utiliser comme base n'importe quel nombre strictement positif et différent de 1.

Pour calculer $\log_a(x)$ pour toute base a, il suffit d'utiliser la relation suivante :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Exemple 2.4.

a) Calculer à l'aide d'une calculette.

1) $\log_2(3) =$

2) $\log_{12}(7) =$

3) $\log_{0.7}(17) =$

b) Résoudre l'équation $2^x = 7$

c) Résoudre l'équation $3 \cdot e^{2x} = 21$

2.4 Equations logarithmes ou exponentielles

Définition 2.4

1) *Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans l'argument d'un logarithme.*
2) *Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans l'exposant d'une puissance.*

Exemple 2.5.

a) $\log_2(3x-4) = 3$ est une équation ....

admettant .... pour solution.

b) $3^{x-1} = 81$ est une équation ....

admettant .... pour solution.

c) Résoudre : $4^{x-2} = 16$

d) Résoudre : $3^x = 9 \cdot 27^{2x-1}$

e) Résoudre : $6 \cdot 10^{3x+1} = 40$

f) Résoudre : $4 \cdot \log(x+2) = 2$

g) Résoudre : $\log(2x-6) - \log(x) = \log(x-5)$

2.5 Processus exponentiels

Processus linéaire et exponentielle

On observe une grandeur q au cours du temps t :

t	0	1	2	3	$\cdots$	t
q	q_0	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	$q(t)$

- $t = 0$: début de l'observation.
- $q_0 = q(0)$: valeur de q au début de l'observation.
- $q_k = q(k)$: valeur de q au temps $t = k$.

Processus linéaire

Le processus est dit **linéaire** s'il existe un nombre réel $m \neq 0$ tel que

$$q_1 = q_0 + m, \quad q_2 = q_1 + m, \quad q_3 = q_2 + m, \quad \cdots \quad , q(t+1) = q(t) + m, \quad \cdots$$

Dans ce cas,

$$\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

On parle de **croissance linéaire** si $m > 0$ et de **décroissance linéaire** si $m < 0$.

Processus exponentiel

Le processus est dit **exponentiel** s'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que

$$q_1 = q_0 \cdot a, \quad q_2 = q_1 \cdot a, \quad q_3 = q_2 \cdot a, \quad \cdots \quad , q(t+1) = q(t) \cdot a, \quad \cdots$$

Dans ce cas,

$$\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

On parle de **croissance exponentielle** si $a > 1$ et de **décroissance exponentielle** si $0 < a < 1$.

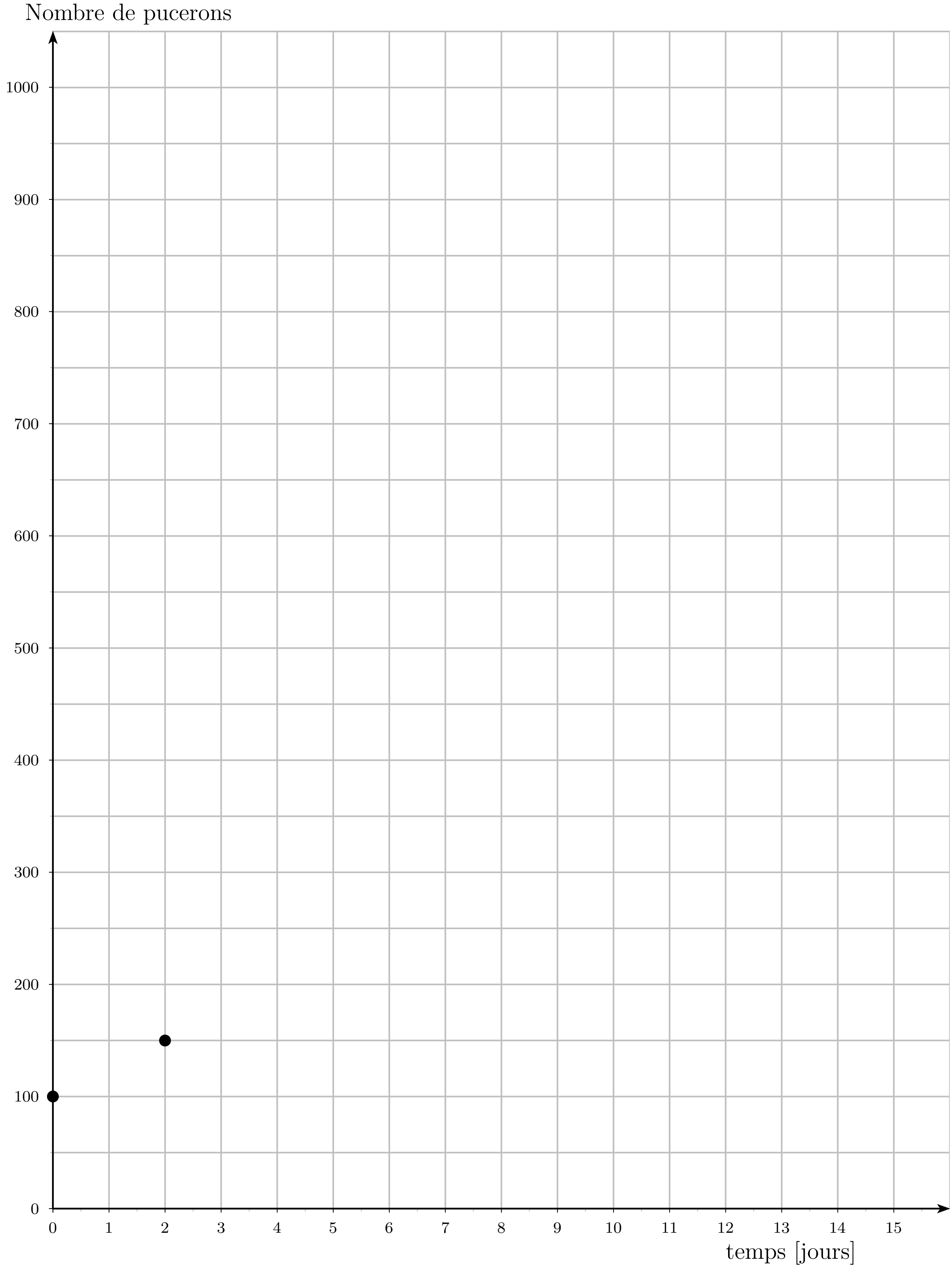
Exemple 2.6. (Colonie de pucerons)

On observe l'évolution d'une colonie de pucerons dans un champ. Pour cela, on compte chaque jour le nombre de pucerons contenus dans un carré de 10 cm de côté.

Soit $q(t)$ le nombre de pucerons t jours après le début de l'observation. On observe qu'il y a $q_0 = 100$ pucerons au début de l'observation et $q_2 = 150$ pucerons deux jours après.

a) On suppose que la croissance des pucerons est linéaire.
   a)1) Calculer le nombre de pucerons 10 jours après le début de l'observation.
   a)2) Après combien de jours la population franchit-elle pour la première fois le cap des 10 000 pucerons ?

b) Mêmes questions si la croissance est exponentielle.


Nombre de pucerons
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
temps [jours]

2.6 Intérêts simples et composés

2.6.1 Placement d'un capital

- Capital initial
- durée de placement
- taux d'intérêts (donné généralement en % par année)

Il existe deux types d'intérêts :

- **intérêts simples** : les intérêts sont proportionnels à la durée du placement et au taux.
- **intérêts composés** : Une **période de capitalisation** (durée entre deux bouclements) est précisée (année, semestre, trimestre, ...). Pendant la durée du placement, à la fin de chaque période de capitalisation, les intérêts de la période sont ajoutés au capital.

Exemple 2.7.

On place un capital de 10 000 francs à un taux annuel de 12%.

a) Avec des intérêts simples, calculer la somme disponible après 5 ans, après 10 ans, après 15 ans et après n années.

b) Avec des intérêts composés et un bouclement annuel, calculer la somme disponible après 5 ans, après 10 ans, après 15 ans et après n années.

2.6.2 Propriétés des intérêts composés

- C_0 : capital initial
- n : nombre de périodes de capitalisation du placement
- $t\% = \dfrac{t}{100} = i$: taux de la période de capitalisation
- C_n : capital disponible (intérêts et capital initial) après les n périodes de capitalisation du placement

$$C_n = C_0 \cdot (1 + \frac{t}{100})^n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

Remarque 2.3.

a) On dit que les intérêts composés suivent **une croissance exponentielle** (voir § 2.5)

b) En conservant le même taux annuel, le capital disponible augmente si la période de capitalisation est raccourcie, mais il existe une valeur limite (intérêts continus).

Exemple 2.8.

On place un capital de 10000 francs à un taux annuel de 6%. Calculer le capital disponible après 5 ans si le bouclement est :

a) annuel

b) semestriel

c) mensuel

d) journalier

e) toutes les heures

f) Toutes les minutes

2.7 Taux fixe de croissance ou décroissance

Exemple 2.9.

- Pour déterminer les 18% d'un nombre p, on calcule : ....
- Pour ajouter à un nombre p les 2% de ce nombre, on calcule :

  ....
- Pour enlever à un nombre p les 6% de ce nombre, on calcule :

  ....
- Si l'on multiplie un nombre p par 0.85, on enlève .... % à p.

  ....
- Si on multiplie un nombre p par 1.07, on ajoute .... % à p.

  ....
- Pour ajouter à un nombre p les 2.5% de ce nombre, ceci 5 fois de suite, on calcule :

  ....

  Cela correspond à une augmentation globale du nombre p de .... %

  ....

Taux fixe de croissance ou de décroissance d'une grandeur

On observe une grandeur q sur des intervalles de temps réguliers (par exemple toutes les secondes, ou toutes les 10 secondes).

- Si q augmente d'un pourcentage fixe de p % sur chaque intervalle de temps (relativement à la valeur du début de l'intervalle), q peut s'exprimer à l'aide de la fonction suivante

$$q(t) = q_0 \cdot (1+i)^t \text{ avec } q_0 = q(0) \text{ et } i = \frac{p}{100}$$

  q suit donc une croissance exponentielle.
- Si q diminue d'un pourcentage fixe de p % sur chaque intervalle de temps (relativement à la valeur du début de l'intervalle), q peut s'exprimer à l'aide de la fonction suivante

$$q(t) = q_0 \cdot (1-i)^t \text{ avec } q_0 = q(0) \text{ et } i = \frac{p}{100}$$

  q suit donc une décroissance exponentielle.

Exemple 2.10.

Dans un pays, on mesure une inflation de 0.6 % pendant le premier mois d'une année donnée.

En supposant que l'inflation est la même les 11 mois suivants, calculer le taux d'inflation annuel correspondant.

2.8 Processus logarithmique : les décibels

On peut utiliser deux grandeurs pour exprimer le niveau sonore : l'**intensité acoustique**, en watts par mètre carré (W/m^2), ou la **pression acoustique**, en pascals (newton par mètre carré, noté Pa). Mais ces grandeurs sont peu pratiques : du son plus faible au plus fort, la pression acoustique s'étale sur une échelle de un à un million, alors que l'intensité acoustique va de un à mille milliards ! De plus, la perception de l'oreille est relative : une augmentation de la pression acoustique de 1 Pa à 1,5 Pa est perçue comme identique à une augmentation de 0,1 Pa à 0,15 Pa. C'est le taux de multiplication (1.5 dans ce cas) qui compte.

C'est pour cette raison que le niveau sonore s'exprime en général en *décibels* (dB) grandeur sans dimension qui correspond au logarithme décimal du rapport entre l'intensité acoustique du son et l'intensité acoustique d'un son de référence.

Cette unité, d'abord appelée *TU* pour *transmission unit*, a ensuite été renommée décibel en 1923 en l'honneur de Alexander Graham Bell (1847-1922) fondateur du laboratoire du même nom.

Référence : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Son_(physique)

Le niveau sonore α (en dB) d'un son d'intensité acoustique I (en W/m^2) est donné par

$$\alpha = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 est l'intensité sonore de référence (seuil auditif).

Exemple 2.11.

a) Calculer le niveau sonore d'un son d'intensité acoustique $I = 1000\,I_0$.

b) Dans un choeur de 40 personnes, on suppose que chaque choriste développe un niveau sonore de 50 dB. Quel est le niveau sonore (à 0.1 dB près) de l'ensemble du choeur ?

2.9 Exercices

2.1

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $7^{x+6} = 7^{3x+4}$

b) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

c) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

d) $2^{-100x} = 0.5^{x-4}$

e) $(\frac{1}{4})^{6-x} = 4$

f) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

g) $2^x \cdot 4^x = -5$

h) $(5^{x-2})^4 = 125 \cdot 5^{5x-3}$

i) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

2.2

Calculer à la main :

a) $\log_3(1)$

b) $\log_2(8)$

c) $\log_2(64)$

d) $\log_2(1'024)$

e) $\log_5(5)$

f) $\log_3(\sqrt{3})$

g) $\log_{243}(1/243)$

h) $\log_3(27)$

i) $\log(1'000)$

j) $\log_4(\sqrt{2})$

k) $\log_{1/8}(64)$

l) $\log_5(0,04)$

m) $\log_3(\sqrt[4]{27})$

n) $\ln(e^2)$

o) $\log_a(a)$

p) $\log_a(a^3)$

q) $\log(10000)$

r) $\ln(e)$

s) $\log_2(1/8)$

t) $\log_3(\sqrt[4]{3})$

u) $\log(200) - \log(2)$

v) $\log_6(4) + \log_6(9)$

w) $\log_5(1)$

x) $\log(-1)$

y) $\log(0.0001)$

z) $\ln(0)$

2.3

A partir des valeurs approchées $\log(2) \approx 0.30$ et $\log(3) \approx 0.48$, calculer une valeur approchée sans utiliser la touche LOG de la calculatrice.

a) $\log(6)$

b) $\log(16)$

c) $\log(\sqrt{2})$

d) $\log(0.5)$

e) $\log(36)$

2.4

Simplifier les expressions ci-dessous sans utiliser la calculette :

a) $\log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(9)$

b) $\log(15) + 3\log(10) - \log(30) - \log(5)$

c) $4\log(5) + \log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(3) + \frac{1}{3}\log(27)$

d) $\dfrac{\log(20) + \log(100) - \log(2)}{\log(5'000) - \log(5) + \log(0,1)}$

2.5

Résoudre les équations suivantes (donner les valeurs exactes des solutions) :

a) $x = \log_2(32)$

b) $2^x = 100$

c) $\log_x(256) = 4$

d) $\log_2(x) = 4$

e) $10^x = 5$

f) $e^{2x-1} = 27$

g) $\log_x(1'000) = 3$

h) $12^x = -49$

2.6

Résoudre les équations suivantes (donner les valeurs exactes des solutions) :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$

b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$

c) $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$

d) $2\log_3(x) = 3\log_3(5)$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$

f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(x-3)$

2.7

Résoudre à l'aide d'une calculette les équations ci-dessous (donner six chiffres significatifs)

a) $5^x = 100$

b) $20^x = 5$

c) $145^x = 3451$

d) $5^{(2x)} = 456.35$

e) $1000 \cdot 1.12^x = 10\,000$

f) $20 \cdot 5^{3x} = 800$

g) $e^{3x} = 1808.042$

h) $e^{x+1} = 2\,000$

i) $20 + 100 \cdot e^{-0.5x} = 60$

2.8

On considère un capital de $C_0 = 60\,000$ francs avec une capitalisation annuelle.

a) On place le capital C_0 à un taux annuel d'intérêts de 8 % pendant 8 ans. Quel est le capital final disponible ?

b) On place le capital C_0 à un taux annuel d'intérêts de 5 %. Quels sont les intérêts générés par ce capital après 10 ans ?

c) A quel taux d'intérêts a-t-on placé le capital C_0 si celui-ci nous a rapporté, après 5 ans, un total d'intérêts de 22 205.20 francs ?

d) On place le capital C_0 ainsi qu'une somme inconnue S à un taux de 6 % pendant 4 ans. Quelle était la somme inconnue S si l'on obtient finalement un capital total disponible de 90 898.34 francs ?

2.9

Si la capitalisation est annuelle, quelle somme retire-t-on au bout de 20 ans si l'on place 20'000 francs à 1,25 % pendant 5 ans, puis à 1,5 % pendant 12 ans et à 1,75 % pendant le reste du temps ?

2.10

On suppose que la capitalisation est annuelle.

a) Calculer la valeur acquise par 40'000 francs à 3,75 % pendant 10 ans à intérêts composés.

b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra 10'730,40 francs dans 7 ans à 5.25 %.

c) Il y a six ans, on a placé 12'000 francs à un certain taux. On retire aujourd'hui $14'751,05$ francs. Quel était ce taux ?

d) On dispose de 100'000 francs. On place cette somme à 9 %. Après combien d'années aura–t–on $364'248,25$ francs ?

2.11

La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

2.12

a) Un objet vaut actuellement 2 000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans.
Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? dans n ans ?

b) Il y a 5 ans, un objet valait 1 000 francs. Actuellement, il vaut 3 000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ?
Après combien de temps vaudra-t-il (au mois près) 21 000 francs ?

2.13

La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par le $P(t) = 6\,000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

a) Quelle est la valeur de l'achat ?

b) Quelle est la valeur après 5 ans ?

c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1 000 francs ?

2.14

Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

2.15

La demi-vie d'une substance radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs, initialement présents, se sont désintégrés. Le césium est une matière radioactive dont la demi-vie est égale à environ 30 ans. On dispose de 100 tonnes de cette substance.

a) Déterminer la quantité de substance restante Q après t années.

b) Combien restera-t-il de cette substance après 5 ans.

2.16

Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} (carbone 14) présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux. (la demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans).

2.17

Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C .
La relation $T = 37e^{-0{,}0045t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 30 minutes ?

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

2.18

Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient avale une dose de 10 mg d'un médicament. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité de médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

2.19

Une courbe logistique est le graphe d'une courbe géométrique du type

$$y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t}} \text{ où } k, b \text{ et } c \text{ sont des constantes positives}$$

La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique.

Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0{,}2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

2.20

Un journal annonce que l'indice des prix à la consommation a augmenté de 1.4% en janvier.

a) Déterminer la fonction $C(t)$ qui donne le prix d'une marchandise après t mois lorsque le prix initial est de C_0 et que l'inflation mensuelle est de 1.4%.

b) Vérifier à l'aide de cette fonction que les prix ont augmenté de 18% après 12 mois.

2.21

Une population de volatiles, dans une région donnée, chute de 10% chaque année relativement à la population du début de l'année.

a) Vérifier que dans 3 ans, la population aura chuté à environ 73% de sa valeur actuelle.

b) Quelle sera la situation dans 7 ans ?

2.22

Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale 18′000 francs est de 25%.

a) Trouver la valeur $V(t)$ de la voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

2.23

Calculer le taux de dépréciation annuel d'une machine de bureau si la valeur de cette machine après 5 ans est la moitié de sa valeur initiale.

2.24

La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

2.25

Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0.0151 + 0.258\log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants d'une ville dont la vitesse moyenne d'un piéton est de 1.5 m/s (arrondir la réponse à 100 habitants près).

2.10 Réponses

2.1

a) $S = \{1\}$

b) $S = \{2\}$

c) $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

d) $S = \left\{-\frac{4}{99}\right\}$

e) $S = \{7\}$

f) $S = \{3\}$

g) $S = \emptyset$

h) $S = \{-8\}$

i) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

2.2

a) 0

b) 3

c) 6

d) 10

e) 1

f) 1/2

g) -1

h) 3

i) 3

j) 1/4

k) -2

l) -2

m) 3/4

n) 2

o) 1

p) 3

q) 4

r) 1

s) -3

t) 1/4

u) 2

v) 2

w) 0

x) non défini

y) -4

z) non défini.

2.3

a) 0.78

b) 1.20

c) 0.15

d) $-0,3$

e) 1.56

2.4

a) $\log(12)$

b) 2

c) $\log\left(\frac{125}{9}\right)$

d) $\frac{3}{2}$

2.5

a) $S = \{5\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{\log(2)}\right\} = \left\{\frac{\ln(100)}{\ln(2)}\right\}$

c) $S = \{4\}$

d) $S = \{16\}$

e) $S = \{\log(5)\}$

f) $S = \left\{\frac{\ln(27)+1}{2}\right\}$

g) $S = \{10\}$

h) $S = \emptyset$

2.6

a) $S = \{6\}$

b) $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

c) $S = \emptyset$

d) $S = \{5\sqrt{5}\}$

e) $S = \{3\}$

f) $S = \{4\}$

2.7

a) $S = \{2.86135\}$
d) $S = \{1.90230\}$
g) $S = \{2.50000\}$
b) $S = \{0.537244\}$
e) $S = \{20.3178\}$
h) $S = \{6.60090\}$
c) $S = \{1.63690\}$
f) $S = \{0.764010\}$
i) $S = \{1.83258\}$

2.8

a) $111'055.81$ francs
b) $37'733.68$ francs
c) 6.5 %
d) $S = 12'000$ francs

2.9

$26'804, 08$ francs

2.10

a) $57'801, 76$ francs
b) 7500 francs
c) 3,5 %
d) 15 ans.

2.11

a) $N = 10'000 \cdot 2^{t/12}$
b) Après une semaine, il y aura $1, 6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

2.12

a) Après 12 ans : 32 000 francs, après n ans : $2\,000 \cdot 2^{\frac{n}{3}}$ francs
b) Après 12 ans : 41 900 francs , 8 ans et 10 mois plus tard il vaudra 21 000 francs

2.13

a) 6 000 francs
b) 2 224 francs
c) environ 9 ans

2.14

a) $Q = 1\,000 \cdot 0, 6^{t/3}$
b) après une année, il y aura environ 129 truites
c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14,8 mois.

2.15

a) $Q = 100 \cdot 0.97716^t$
b) Après 5 ans il restera 89 tonnes de substance.

2.16

Les grottes de Lascaux datent d'environ 12'700 av. J.C.

2.17

a) 32.3° C

b) Il faut le secourir avant environ 87 min.

2.18

a) $Q(t) = 10 \cdot 0,8^t$

b) Après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps

c) Il faut attendre 10h et 20min pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

2.19

a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m

b) Après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m

c) La hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

2.20

a) $C(t) = C_0 \cdot (1.014)^t$

2.21

b) La population aura chuté à 47.8% de sa valeur actuelle.

2.22

a) $V(t) = 18'000 \cdot 0.75^t$

b) $1'800$ francs

2.23

12.94%

2.24

a) Il mesure environ 1.2 m

b) Il pèse environ 37.9 kg

2.25

a) La vitesse moyenne est de 1.3 m/s ;

b) La population doit être d'environ $569'400$ habitants.